Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

Nº9, 2012

OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
SANTA CATARINA - UFSC

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Reitor: Álvaro Toubes Prata
Vice-Reitor: Carlos Alberto Justo da Silva

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E EXTENSÃO - PRPE

Pró-Reitora: Débora Peres Menezes

DEPARTAMENTO DE PROJETOS DE EXTENSÃO - DPE

Diretor: Nelson Canzian da Silva

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO - PREG

Pró-Reitora: Yara Maria Rauh Müller

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM

Diretor: Tarciso Antônio Grandi
Vice-Diretor: Valdir Rosa Correia

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Chefe: Rosimary Pereira
Sub-Chefe: Oscar Ricardo Janesch

Apoio:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina/
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],
2004 -
v.: 9 (2012) 23 cm

Anual
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas, Exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.

Comissão da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:

Coordenador: José Luiz Rosas Pinho.

Professores: Carmem Suzane Comitre Gimenez, Danilo Royer, Eliezer Batista, Licio Hernanes Bezerra e Nereu Estanislau Burin.

Bolsistas da Olimpíada: Amanda Magalhães, Ana Cristina Medaglia Dyonisio, Andrei Moriggi, Anieli Joana de Godoi, Bianca de Souza, Cláudia Dal Pont Rocha, Fernanda Cristina da Silva, Josiane Marina Hoffmann, Michely de Melo Pellizzaro, Rafaela Goulart de Andrade e Virgínia Angélica Reck.

Bolsistas do PET - Matemática: Ado Raimundo Dalla Costa, Aline Regina Becher, Daniella Losso da Costa, Douglas Manoel Guimarães, Felipe Augusto Tasca, Fernando Leandro, Gabriela Silmaia da Silva Yoneda, Jeremias Stein Rodriguês, Leonardo Businhani Biz, Leonardo Neves Meirelles, Luis Augusto Uliana, Maria Cláudia Schmitt Araujo, Mike Christian Nascimento de Lima, Ruana Maíra Schneider e Thuysa Schlichting de Souza.

Comitê Editorial da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:
Ana Cristina Medaglia Dyonisio
Bianca de Souza
Carmem Suzane Comitre Gimenez
Danilo Royer
Eliezer Batista
Fernanda Cristina da Silva
José Luiz Rosas Pinho
Licio Hernanes Bezerra
Maria Cláudia Schmitt Araujo
Michely de Melo Pellizzaro
Nereu Estanislau Burin
Rafaela Goulart de Andrade

Editoração Eletrônica:
Ana Cristina Medaglia Dyonisio
Alda Dayana Mattos
Fernanda Cristina da Silva
Rafaela Goulart de Andrade
Rodrigo Maciel Rosa

Tiragem:
1500 exemplares

Arte da Capa:
Rafaela Goulart de Andrade

Postagem:
Segundo semestre de 2011.

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina Nº9, 2012

ISSN 1679-7612

Sumário

Apresentação

Esta Revista é o resultado de um projeto de extensão do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática do qual participam seus bolsistas, alunos com bolsas de extensão do Departamento de Projetos de Extensão (DPE), da Pró-Reitoria de Pesquisa e Extensão (PRPE) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), alunos com bolsas permanência e professores do Departamento de Matemática da UFSC. A impressão da Revista foi financiada pelo CNPq, através de um projeto da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

A Revista é distribuída gratuitamente às escolas de Santa Catarina, e é enviada a várias universidades do país (através da Biblioteca Central da UFSC). Além disso, ela é entregue aos alunos premiados da ORM e seus professores na cerimônia de premiação, aos premiados na OBM, durante a Semana Olímpica e aos alunos calouros do Curso de Matemática da UFSC.

Agradeço a todos os alunos e professores que participaram de sua elaboração, ao apoio da PRPE e ao pessoal da Imprensa Universitária da UFSC, em especial ao seu diretor, João Luiz Laureano, e ao chefe da divisão técnica, Manoel Pacheco, pela pronta atenção ao nosso pedido e eficiência em seu trabalho.

Florianópolis, 19 de novembro de 2011.

José Luiz Rosas Pinho

Tutor do PET Matemática

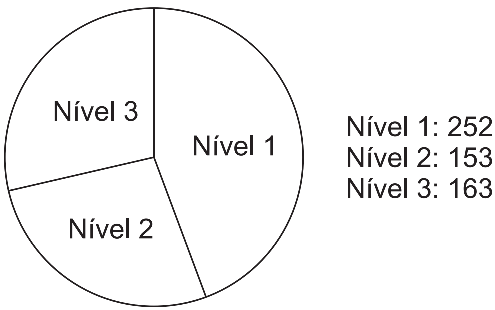
Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

XIII ORM (2010)

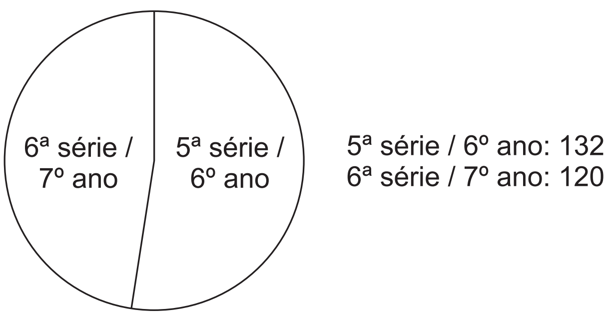
XIII ORM em Números

Na primeira fase da XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina participaram 6.450 alunos de ensino fundamental e médio de 106 escolas públicas e particulares de 40 municípios do estado. Deste total, foram classificados 1.226 alunos para a 2ª fase, dos quais 568 compareceram para realizar a prova, cujas distribuições por níveis e séries são mostradas abaixo.

Total de alunos participantes da 2ª fase, separados por níveis



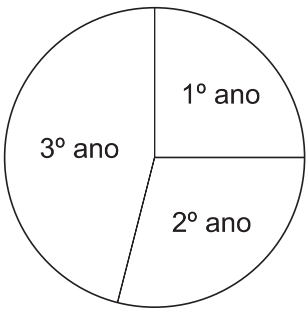
Nível 1



Nível 2

7ª série / 8º ano: 83
8ª série / 9º ano: 70

Nível 3



1º ano: 41
2º ano: 47
3º ano: 75

Premiados

Foram premiados 64 estudantes (o que corresponde a 11,3% dos alunos que participaram da segunda fase): 8 com medalhas de ouro, 11 com medalhas de prata, 13 com medalhas de bronze e 32 com menções honrosas.

Prêmio William Glenn Whitley[1]

- Júlia Bertelli (Joinville)

Nível 1

Ouro

- Júlia Bertelli (Joinville)

Prata

- Carlos Bruno Medeiros da Costa Pereira Neto (Joinville)
- Nicolly Longo (Joinville)
- Paulo Henrique Alves Kammrdt (Joinville)
- Ruan Victor Soares da Silva (Joinville)

Bronze

- Bruno Alexis Morales Huaco (Itajaí)
- Bruno Mota (Joinville)
- Douglas Ohf (Joinville)
- Maria Cecília Boagado (Florianópolis)
- Tiago Antônio de Queiroz Yunes (Florianópolis)

[1] O prêmio é destinado ao aluno com a maior pontuação na Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina. Esta é uma homenagem ao professor William Glenn Whitley (ver revista da ORM nº 4) e começou a ser entregue no ano de 2006.

Menção Honrosa

- Alexandre Z. Alegria (Blumenau)
- Ana Carolina de Medeiros da Silva (Joinville)
- Arthur Donaduzzi dos Santos (Itajaí)
- Gabriel Müller (Santo Amaro da Imperatriz)
- Gustavo Nava Stechinski (Videira)
- Isabela Pizzetti (Criciúma)
- Isabele Silveira Zanelatto (Criciúma)
- Joana Martins Luersen (Lages)
- João Gabriel Bezerra da Silva (Joinville)
- Julia Heck Deters (Itapiranga)
- Letícia Zacchi Adriano (São José)
- Luiz Antônio de Aquino (São José)
- Mariana Randon Savaris (Videira)
- Natalie Vanz Bettoni (Videira)
- Rodrigo Aleixo Fermino (Joinville)
- Vitor Augusto Woyakewicz (Blumenau)

Nível 2

Ouro

- Bruno Granella Serpa (Florianópolis)
- Flávia Longo de Araújo (Florianópolis)
- Mikhail Zimmer Heidrich (Lages)

Prata

- Diego Wyzykowski (Joinville)
- Karina Livramento dos Santos (Navegantes)
- Lucas da Silveira Guadagnin (Criciúma)
- Murilo Martini (Blumenau)

Bronze

- João Marcos Carnieletto Nicolodi (Florianópolis)
- Julian Vieira Franzen (Florianópolis)
- Leandro Jun Kimura (Joinville)
- Romeu Retzlaff Junior (Joinville)

Menção Honrosa

- Anna Carolina Schmidt Gamborgi Vallim (Florianópolis)
- Antônio Jerônimo Botelho (Tubarão)
- Hazael dos Santos Batista (Florianópolis)
- Lucas André Bibow (Joinville)
- Rodrigo Malheiros Remor (Florianópolis)
- Viktoria Weihermann (São Bento do Sul)

Nível 3

Ouro

- André Victorio Matias (Criciúma)
- Gustavo Bernardo de Oliveira (Joinville)
- Luiz Fernando Bossa (Brusque)

- Matheus Schramm Dall'Asta (Gaspar)

Prata

- Heloisa de Souza Machado (Tubarão)
- Leonardo Gonçalves Fischer (Fraiburgo)
- Luis Gustavo Longuen (Rio do Sul)

Bronze

- Gislaine Hoffmann (Antônio Carlos)
- Ivani Ivanova Ivanova (Blumenau)
- Luís Antônio Vinholi (Joinville)
- Marcelo Silva de Pina (Florianópolis)

Menção Honrosa

- Fernanda Kasper Ortolan (Maravilha)
- Gabriela Marques Almeida (Florianópolis)
- João Marcelo Bittencourt Lima (Tubarão)
- Karen Francine Heinen (Criciúma)
- Letícia Perini (Timbó)
- Lucas Madeira (Itajaí)
- Marçal Buttenberg (Blumenau)
- Michele Lays Bendotti (Timbó)
- Rogério Hannemann Júnior (Joinville)
- Suelen Mandelli Mota (Criciúma)

Escolas Participantes

ACBNL Colégio São José (Itajaí); **A**ssociação Educacional Luterana Bom Jesus (Joinville); **C**AIC Irmã Joaquina (São Francisco do Sul); **C**entro de Educação do Município de Mafra (Mafra); **C**entro de Educação Menino Jesus (Florianópolis); **C**entro Educacional Canguru (Jaraguá do Sul); **C**entro Educacional Criativo (Florianópolis); **C**entro Educacional Estimoarte (Florianópolis); **C**entro Educacional Fraiburgo (Fraiburgo); **C**entro Educacional SATC (Criciúma); **C**entro Educacional Universo do Saber (Maravilha); **C**etisa (Timbó); **C**MEB Vereador Avelino Biscaro (Salto Veloso); **C**olégio Atitude (Florianópolis); **C**olégio Bom Jesus Divina Providência (Jaraguá do Sul); **C**olégio Bom Jesus Santo Antônio (Blumenau); **C**olégio Catarinense (Florianópolis); **C**olégio Cenecista José Elias Moreira (Joinville); **C**olégio Cenecista Pedro Antônio Fayal (Itajaí); **C**olégio Cenecista São José (Rio Negrinho); **C**olégio Coração de Jesus (Florianópolis); **C**olégio da Lagoa (Florianópolis); **C**olégio da Univille (Joinville); **C**olégio de Aplicação UFSC (Florianópolis); **C**olégio Dehon (Tubarão); **C**olégio Dom Bosco (Rio do Sul); **C**olégio Dom Jaime Câmara (São José); **C**olégio dos Santos Anjos (Joinville); **C**olégio Elisa Andreoli (São José); **C**olégio Energia (Palhoça); **C**olégio Energia - Jurerê (Florianópolis); **C**olégio Evolução (São Ludgero); **C**olégio Geração (Florianópolis); **C**olégio Global (São Bento do Sul); **C**olégio Madre Francisca Lampel (Gaspar); **C**olégio Marista (Criciúma); **C**olégio Master Sigma Ltda. (Lages); **C**olégio Sagrada Família (Blumenau); **C**olégio Salesiano Itajaí (Itajaí); **C**olégio Santa Rosa de Lima (Lages); **C**olégio Santo Antônio (Joinville); **C**olégio São Bento (Criciúma); **C**olégio Sinodal Doutor Blumenau (Pomerode); **C**olégio Sinodal Ruy Barbosa (Rio do Sul); **C**olégio Santa Catarina (Florianópolis); **C**olégio Superação (Videira); **C**olégio Tradição (Florianópolis); **C**olégio Tupy (Joinville); **C**olégio Universitário (Gaspar); **C**ooperativa Educacional de Imbituba (Imbituba); **E**BM Álvaro Tancredo Dippold (São Francisco do Sul); **E**BM Alberto Bordin (Jaborá); **E**BM Doutor Franklin de Oliveira (São Francisco do Sul); **E**BM Doutor Hercílio Malinowsky (São Bento do Sul); **E**BM Waldemar da Costa (São Francisco do Sul); **E**ducandário

Imaculada Conceição (Florianópolis); **E**EB Altamiro Guimarães (Antônio Carlos); **E**EB André A. de Souza (Imbituba); **E**EB Professora Adélia Cabral Varejão (Laguna); **E**EB Erwin Radtke (Blumenau); **E**EB José Marcolino Eckert (Pinhalzinho); **E**EB Pedro II (Blumenau); **E**EB Sagrado Coração de Jesus (Tubarão); **E**EB Santa Terezinha (Brusque); **E**EB São Bento (São Bento do Sul); **E**EB Victor Felippe Rauen (Jaborá); **E**EF Polidoro Santiago (Timbó); **E**M Bom Jesus (Itaiópolis); **E**M Ervin Prade (Timbó); **E**M Esperança (Itapiranga); **E**M Funei (Itapiranga); **E**M Governador Pedro Ivo Campos (Joinville); **E**M Padre Martinho Stein (Timbó); **E**M Professor Edgar M. Castanheira (Joinville); **E**M Professora Anna Maria Harger (Joinville); **E**M Professora Elsir B. Gaya Muller (Navegantes); **E**M Professora Zulma do Rosário Miranda (Joinville); **E**MEB Professora Selma Teixeira Graboski (Rio Negrinho); **E**MEF Anna Towe Nagel (Jaraguá do Sul); **E**scola Barão do Rio Branco (Blumenau); **E**scola Comecinho de Vida (Videira); **E**scola Cristã de Florianópolis (Florianópolis); **E**scola da Fazenda (Florianópolis); **E**scola Dinâmica (Florianópolis); **E**scola Isolado Altos da Boa Vista (Bom Jardim da Serra); **E**scola Itinerante Ana Maria R. Coelho (Correia Pinto); **E**scola Sarapiquá (Florianópolis); **E**scola Técnica de Comércio de Tubarão (Tubarão); **E**scola Técnica do Vale do Itajaí (Itajaí); **E**scola Vivência (Florianópolis); **E**xathum Curso e Colégio (Joinville); **G**EM Professora Clotilde Ramos Chaves (Camboriú); **I**FSC - Florianópolis (Florianópolis); **I**nstituto Educacional Madre Elisa Savoldi (Sombrio); **I**nstituto Maria Auxiliadora (Rio do Sul); **K**umon - Joaçaba (Joaçaba); **L**ogus Sociedade de Ensino Ltda. (Santo Amaro da Imperatriz); **N**úcleo Escolar Pres. Adolfo Konder (Irineópolis); **S**enai - Concórdia (Concórdia); **S**enai - Jaraguá do Sul (Jaraguá do Sul); **S**enai - São José (São José); **S**enai - São Miguel D'Oste (São Miguel D'Oeste); **S**enai - Videira (Videira); **S**ociedade Educacional Posiville Ltda. (Joinville).

Provas e Gabaritos

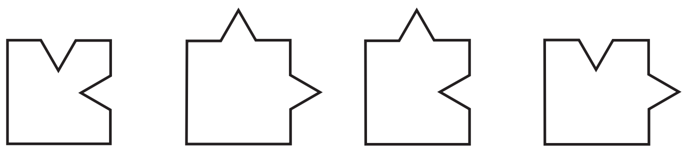
Prova Nível 1

1. Qual é o expoente de 67 na fatoração em primos do produto

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2010$$

dos números inteiros de 1 a 2010?

2. Deseja-se montar um quadrado, sobre uma mesa, utilizando quatro tipos de peças. Um mesmo tipo de peça pode ser usado mais de uma vez na montagem de cada quadrado. Os tipos de peças são:



Se cada peça tem um dos lados branco e o outro lado cinza, de quantas maneiras diferentes pode-se montar um quadrado branco? Considere que a montagem de dois quadrados é a mesma se um quadrado pode ser obtido a partir do outro por rotação sobre a mesa. Por exemplo, as montagens nas figuras 1 e 2 são as mesmas, pois uma é obtida da outra por rotação sobre a mesa.

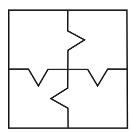


Fig. 1

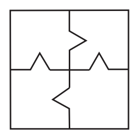


Fig. 2

3. Considere o conjunto dos números inteiros que podem ser formados com três números 3 e as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão, quando esta for possível e exata). É permitido o uso de parêntesis quando necessário. Por exemplo, $3 - (3 + 3) = -3$, e $(3 \times 3) + 3 = 12$.

a) Qual o maior e qual o menor número desse conjunto?
b) Quais são os números do conjunto {..., -4, -2, 0, 2, 4,...} que podem ser obtidos dessa maneira?

4. Uma pessoa disputa um torneio com partidas nas quais ela não obtém ponto se perder a partida, obtém um ponto se empatar e obtém três pontos se ganhar a partida.

   a) De quantas maneiras distintas ela pode obter 20%, do máximo possível de pontos disputados, em 15 partidas?
   b) Após 15 partidas jogadas, e com a pontuação obtida no item (a), qual é o número mínimo de partidas que ela deverá ainda jogar para obter 50% do total de pontos disputados?

5. Sabe-se que cada casal de gatos triameses gera um primeiro casal de filhos aos 6 meses de idade, e depois, a cada 3 meses gera mais um novo casal. Gautino e Gatarina são um casal de gatos triameses que acabaram de ter seu sétimo casal de gatos.

   a) Qual a idade mínima do casal Gautino e Gatarina?
   b) Quantos descendentes (filhos, netos, bisnetos etc) teriam, no máximo, o casal Gautino e Gatarina nesse momento?
   c) Quantos meses de idade, no mínimo, terão Gautino e Gatarina quando a sua família ultrapassar 100 gatos?

Prova Nível 2

1. Qual é o expoente de 5 na fatoração em primos do produto

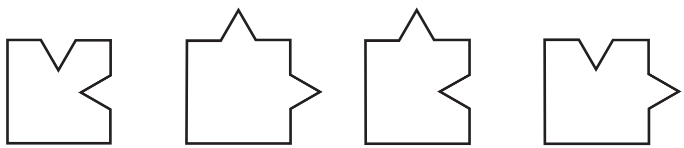
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2010$$

dos números inteiros de 1 a 2010?

2. Qual o menor inteiro n para o qual

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0,01\ ?$$

3. Deseja-se montar um quadrado, sobre uma mesa, utilizando quatro tipos de peças. Um mesmo tipo de peça pode ser usado mais de uma vez na montagem de cada quadrado. Os tipos de peças são:



De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito considerando-se que a montagem de dois quadrados é a mesma se um quadrado pode ser obtido a partir do outro por rotação sobre a mesa ou virando a peça ao contrário? Por exemplo, as montagens nas figuras 1, 2 e 3 são as mesmas, pois a da figura 2 é obtida da montagem da figura 1 por rotação sobre a mesa, enquanto que a montagem da figura 3 é obtida das outras duas virando-se o quadrado ao contrário:

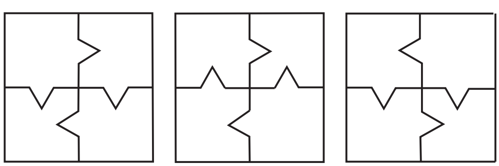


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

4. Dizemos que um número racional $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$, é matriz de um outro número racional $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, que satisfaz $0 < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2}$, se $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^{\mathbf{k}}$, em que $\mathbf{k}$ é um número inteiro positivo tal que $\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2^k}$.

   Nesse caso, dizemos que $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ é uma filial do número $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$.

   a) Qual a matriz de $\frac{3}{7}$?

   b) Qual a matriz de $\frac{3}{16}$?

   c) Mostre que todo número racional $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$ é matriz de alguma filial.

5. Uma pessoa disputa um torneio com partidas nas quais ela não obtém ponto se perder a partida, obtém um ponto se empatar e obtém três pontos se ganhar a partida.

   a) De quantas maneiras distintas ela pode obter 20%, do máximo possível de pontos disputados, em 15 partidas?
   b) Após 15 partidas jogadas, e com a pontuação obtida no item (a), qual é o número mínimo de partidas que ela deverá ainda jogar para obter 50% do total de pontos disputados?
   c) Após 15 partidas jogadas, e com a pontuação obtida no item (a), de quantas maneiras é possível obter 50%, do total de pontos disputados, com no máximo mais 15 partidas?

Prova Nível 3

1. Qual o menor inteiro n para o qual

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < \frac{1}{2010} \ ?$$

2. Dizemos que um número racional $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$, é matriz de um outro número racional $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, que satisfaz $0 < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2}$, se $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^{\mathbf{k}}$, em que $\mathbf{k}$ é um número inteiro positivo tal que $\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2^k}$.

   Nesse caso, dizemos que $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ é uma filial do número $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$.

   a) Qual a matriz de $\frac{3}{7}$?

   b) Qual a matriz de $\frac{3}{16}$?

   c) Mostre que todo número racional $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$ é matriz de uma infinidade de filiais.

3. Considere números inteiros positivos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ que satisfazem a igualdade $\mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$. Por exemplo:

$$3^3 + 13^2 = 14^2 \quad \text{e} \quad 6^3 + 15^2 = 21^2.$$

   a) Apresente mais uma solução de inteiros positivos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ que satisfazem a igualdade acima.
   b) Mostre que existe uma infinidade de soluções de inteiros positivos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ que satisfazem a igualdade acima.

4. Considere uma função real f, definida no conjunto dos números reais diferentes de 0 e 1, satisfazendo todas as seguintes relações:

$$\text{(i) } f(1-x) = \frac{1}{f(x)}$$

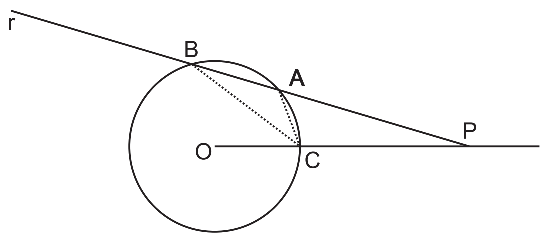
$$\text{(ii) } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(f(x))}$$

$$\text{(iii) } f(f(f(x))) = x$$

a) Calcule $f(2)$, $f(-1)$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Determine $f(x)$.

5. Na figura abaixo o raio da circunferência é igual a 6 e a distância $\mathbf{PC}$ é igual a 10. Por $\mathbf{P}$ traça-se uma reta r que intercepta a cicunferência em dois pontos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.



a) Calcular a razão entre as distâncias dos pontos $\mathbf{O}$ à reta r e de $\mathbf{C}$ à reta r.

b) Variando a inclinação da reta r produzimos outros pontos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, e consequentemente temos novos triângulos $\mathbf{ABC}$. Dentre todos esses triângulos, um deles possui a maior área. Calcular essa área.

Gabarito Nível 1

1. Observe que

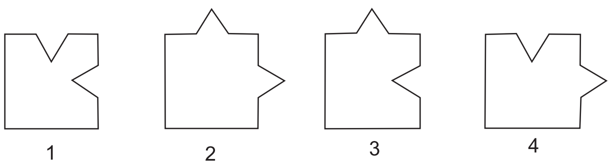
$$2010 = 67 \times 30.$$

Portanto há 30 múltiplos de 67 entre 1 e 2010, e o fator 67 aparecerá pelo menos 30 vezes no produto de 1 a 2010. Agora, como

$$67^2 = 4489 > 2010,$$

então não há números que são múltiplos de potências de 67, com expoente maior do que um, nos números de 1 a 2010. Portanto o expoente de 67 no produto de 1 a 2010 é igual a 30.

2. Vamos numerar as peças, para efeito de referência:



Cada peça tem pontas (P) ou entradas (E). A peça 1 é do tipo (EE), a peça 2 do tipo (PP) e as peças 3 e 4 do tipo (PE). A peça 3 não pode ser obtida da peça 4 por rotação sobre a mesa. Os números de pontas e de entradas das quatro peças em um quadrado devem ser iguais (devido aos encaixes).
Observemos então o seguinte:

(a) definindo-se duas peças em diagonal no quadrado, as outras duas peças ficam determinadas.

(b) para cada peça do tipo 2 (PP) usada deverá haver uma peça do tipo 1 (EE), para compensar o número de pontas e de entradas no total, já que as peças do tipo 3 e 4 se autocompensam.

Vamos então considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 2. Na sua diagonal podemos ter :

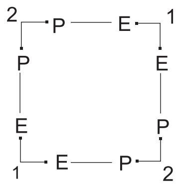
(i) Outra peça tipo 2 - neste caso, as peças da outra diagonal serão do tipo 1.

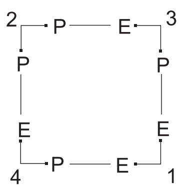
(ii) Uma peça tipo 1 - neste caso, as peças da outra diagonal serão uma do tipo 3 e outra do tipo 4, em posições definidas.

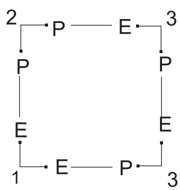
(iii) Uma peça do tipo 3 - neste caso, as peças da outra diagonal serão uma do tipo 1 e outra do tipo 3.

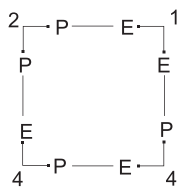
(iv) Uma peça do tipo 4 - neste caso, as peças da outra diagonal serão uma do tipo 1 e outra do tipo 4.

Vejamos as figuras:

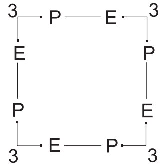

(i)


(ii)

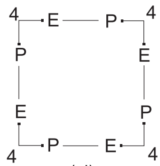

(iii)


(iv)

Observe que todos esses quadrados são distintos.
Vamos agora considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 3 e sem peças dos tipos 1 e 2. Então só há uma possibilidade de quadrado: o quadrado com peças todas do tipo 3:


(v)

Vamos agora considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 4 e sem peças dos tipos 1 e 2. Então só há uma possibilidade de quadrado: o quadrado com peças todas do tipo 4:



(vi)

Os seis quadrados obtidos acima são todos distintos, e portanto são seis maneiras diferentes de montar um quadrado branco.

3. **(a)** O maior número do conjunto é aquele que é obtido pela multiplicação dos três 3:

$$3 \times 3 \times 3 = 27.$$

O menor número do conjunto é aquele que é obtido pela subtração de $3 \times 3 = 9$ do número 3:

$$3 - (3 \times 3) = -6.$$

(b) A melhor maneira de resolver esse item é realizar as operações de forma sistemática, obtendo todos os possíveis valores (o que incluirá o item a):

$(3 \times 3) \times 3 = 27$
$(3 \times 3) + 3 = 12$
$(3 \times 3) - 3 = 6$ e $3 - (3 \times 3) = -6$
$(3 \times 3)/3 = 3$ e $3/(3 \times 3)$ não é inteiro

$(3 + 3) \times 3 = 18$
$(3 + 3) + 3 = 9$
$(3 + 3) - 3 = 3$ e $3 - (3 + 3) = -3$
$(3 + 3)/3 = 2$ e $3/(3 + 3)$ não é inteiro

$(3 - 3) \times 3 = 0$
$(3 - 3) + 3 = 3$

$(3-3)-3=-3$ e $3-(3-3)=3$
$(3-3)/3=0$ e $3/(3-3)$ não tem sentido

$(3/3)\times 3=3$
$(3/3)+3=4$
$(3/3)-3=-2$ e $3-(3/3)=2$
$(3/3)/3$ não é inteiro e $3/(3/3)=3.$

Portanto os números do conjunto $\{...,-4,-2,0,2,4,...\}$ que podem ser obtidos dessa maneira são: -6, -2, 0, 2, 4, 6, 12 e 18.

4. **(a)** Em 15 partidas disputadas o máximo possível de pontos que podem ser obtidos é igual a $15\times 3=45$.

   Tomando 20% desse total teremos $\dfrac{45}{5}=9$ pontos. Então a pergunta é: de quantas maneiras distintas ele pode obter 9 pontos em 15 partidas (a menos da ordem em que isso ocorra)?

   Vamos fazer sistematicamente:

   - ele pode ter 3 vitórias e 12 derrotas;
   - ele pode ter 2 vitórias, 3 empates e 10 derrotas;
   - ele pode ter uma vitória, 6 empates e 8 derrotas;
   - ele pode ter 9 empates e 6 derrotas.

   Portanto são 4 maneiras distintas, a menos da ordem em que ocorrem os resultados.

   (b) O número mínimo deverá ocorrer se todas as partidas seguintes forem ganhas. A quantidade total de pontos disputados, das 15 partidas já jogadas mais esse número mínimo de partidas, é igual a 45 mais três vezes esse número mínimo de partidas. (I)

   A quantidade de pontos que a pessoa obterá com as 15 partidas já jogadas mais esse número de partidas, é igual a 9 mais três vezes esse número mínimo de partidas. (II)

   Como a pessoa deverá alcançar 50% do total de pontos disputados, a diferença entre (I) e (II) deve ser igual ao valor de (II). Mas essa diferença é igual a $45-9=36$. Portanto a pessoa deverá jogar mais $\dfrac{(36-9)}{3}=9$ partidas, ganhando sempre.

5. **(a)** Gautino e Gatarina têm seu primeiro casal, pelo menos, aos seis meses de idade. Para ter mais seis casais de filhos eles deverão ter, no mínimo, mais $6 \times 3 = 18$ meses de idade. Portanto, pelo menos aos $6 + 18 = 24$ meses, ou seja, aos 2 anos de idade, eles acabaram de ter o sétimo casal de gatos.

   (b) Vejamos o desenvolvimento das ninhadas:

   - Aos 6 meses Gautino e Gatarina têm um casal, que chamaremos de casal 1 (C_1).
   - Aos 9 meses Gautino e Gatarina têm mais um casal, que chamaremos de C_2.
   - Aos 12 meses Gautino e Gatarina têm mais um casal, que chamaremos de C_3, e C_1 tem o seu primeiro casal (C_{11}). Portanto são gerados 2 casais aos 12 meses de idade de Gautino e Gatarina.
   - Aos 15 meses Gautino e Gatarina têm mais um casal, que chamaremos de C_4, o casal C_2 tem seu primeiro casal (C_{21}) e o casal C_1 tem seu segundo casal (C_{12}). Portanto nascem 3 casais quando Gautino e Gatarina têm 15 meses de idade.
   - Aos 18 meses Gautino e Gatarina têm mais um casal, que chamaremos de C_5, o casal C_3 tem seu primeiro casal (C_{31}), o casal C_2 tem seu segundo casal (C_{22}), o casal C_1 tem seu terceiro casal (C_{13}) e o casal C_{11} tem seu primeiro casal (C_{111}). Portanto nascem 5 casais nessa época.

   Basta agora observar a sequência de casais que nascem:

6 meses	1 casal
9 meses	1 casal
12 meses	$1 + 1 = 2$ casais
15 meses	$1 + 2 = 3$ casais
18 meses	$2 + 3 = 5$ casais

   Essa é a seqüência de Fibonacci. Então teremos:

21 meses	$3 + 5 = 8$ casais
24 meses	$5 + 8 = 13$ casais

   No total, Gautino e Gatarina terão gerado $1+1+2+3+5+8+13 = 33$ casais, ou seja, 66 gatos.

(c) Aos 27 meses nascerão mais 8 + 13 = 21 casais, ou seja, mais 42 gatos, totalizando $66 + 42 = 108$ descendentes de Gautino e Gatarina.

Portanto aos 27 meses de idade, no mínimo, Gautino e Gatarina terão mais de 100 gatos em sua família.

Gabarito Nível 2

1. Para responder a essa pergunta vamos determinar quantos múltiplos de 5 existem entre 1 e 2010.

   Esses múltiplos são $2010/5 = 402$. Portanto o expoente de 5 na fatoração do produto acima é pelo menos 402.

   Agora, há múltiplos de $5^2 = 25$, de $5^3 = 125$ e de $5^4 = 625$. Cada um desses múltiplos contribui com mais fatores 5 na fatoração do produto acima.

   Os múltiplos de 25 contribuem com mais um fator 5. Note que $2010 = 25 \times 80 + 10$. Portanto há 80 múltiplos de 25 entre os números de 1 a 2010.

   Os múltiplos de 125 contribuem com mais um fator 5. Note que $2010 = 125 \times 16 + 10$. Portanto há 16 múltiplos de 125 entre os números de 1 a 2010.

   Os múltiplos de 625 contribuem com mais um fator 5. Note que $2010 = 625 \times 3 + 135$. Portanto há 3 múltiplos de 625 entre os números de 1 a 2010.

   Então o expoente de 5 na fatoração em primos do produto acima será:

   $$402 + 80 + 16 + 3 = 501.$$

2. Note que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$.

   Portanto a pergunta passa a ser: qual o menor inteiro n para o qual

   $$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} < 0,01 \ ?$$

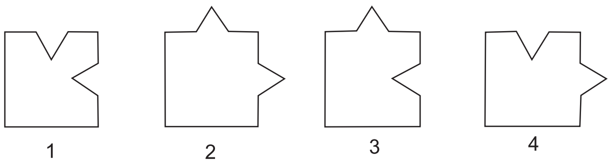
   Ou seja, qual o menor inteiro n para o qual $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 100$?
   Como $\sqrt{n} > \sqrt{n-1}$ então se $\sqrt{n-1} \geq 50$ teremos $\sqrt{n} > 50$ e então

   $$\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 100.$$

   Mas $\sqrt{n-1} \geq 50$ e então $n - 1 \geq 2500$ ou seja $n \geq 2501$.

Observe agora que $n = 2500$, ou, $\sqrt{n} = 50$ e $\sqrt{n-1} < 50$ o que nos dá $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 100$.
Portanto o menor inteiro n para o qual a desigualdade acima ocorre é 2501.

3. Vamos numerar as peças, para efeito de referência:



Cada peça tem pontas (P) ou entradas (E). A peça 1 é do tipo (EE), a peça 2 do tipo (PP) e as peças 3 e 4 do tipo (PE). A peça 3 não pode ser obtida da peça 4 por rotação sobre a mesa. Os números de pontas e de entradas das quatro peças em um quadrado devem ser iguais (devido aos encaixes).
Observemos então o seguinte:

(a) definindo-se duas peças em diagonal no quadrado, as outras duas peças ficam determinadas.

(b) para cada peça do tipo 2 (PP) usada deverá haver uma peça do tipo 1 (EE), para compensar o número de pontas e de entradas no total, já que as peças do tipo 3 e 4 se autocompensam.

(c) a peça 4 pode ser obtida da peça 3 virando-a ao contrário (do avesso), e reciprocamente.

Vamos então considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 2. Na sua diagonal podemos ter :

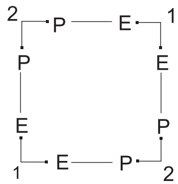
(i) Outra peça tipo 2 - neste caso, as peças da outra diagonal serão do tipo 1.

(ii) Uma peça tipo 1 - neste caso, as peças da outra diagonal serão uma do tipo 3 e outra do tipo 4, em posições definidas.

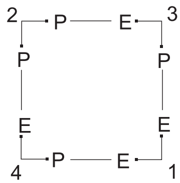
(iii) Uma peça do tipo 3 - neste caso, as peças da outra diagonal serão uma do tipo 1 e outra do tipo 3.

(iv) Uma peça do tipo 4 - neste caso, as peças da outra diagonal serão uma do tipo 1 e outra do tipo 4.

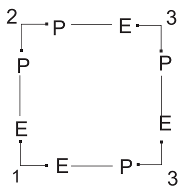
Vejamos as figuras:



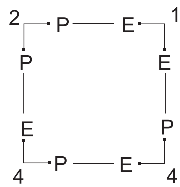
(i)



(ii)

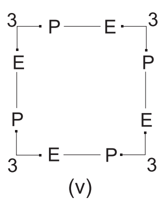


(iii)



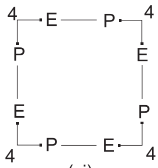
(iv)

Observe que esses quadrados não coincidem por rotação sobre a mesa.
Vamos agora considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 3 e sem peças dos tipos 1 e 2. Então só há uma possibilidade de quadrado, o quadrado com peças todas do tipo 3:



(v)

Vamos agora considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 4 e sem peças dos tipos 1 e 2. Então só há uma possibilidade de quadrado, o quadrado com peças todas do tipo 4:



(vi)

Os seis quadrados obtidos acima são todos distintos por rotação sobre a mesa. Vamos agora determinar quais desses seis quadrados coincidem ao virar ao contrário (ou seja do avesso). Isso só poderá ocorrer naqueles quadrados que contenham peças do tipo 3 ou 4.
Então vemos que os quadrados (iii) e (iv) são os mesmos ao virar um ou outro ao contrário. O mesmo ocorre com os quadrados (v) e (vi). Portanto há somente 4 quadrados distintos. (Os quadrados (i) e (ii) quando virados ao contrário resultam neles mesmos).

4. **(a)** Note que $\frac{1}{2^2} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$.

   Portanto $\mathbf{k} = 1$ e a matriz $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ de $\frac{3}{7}$ será $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{6}{7}$.

   Observe que $\frac{1}{2} < \frac{6}{7} < 1$.

   (b) Note que $\frac{1}{2^3} < \frac{3}{16} < \frac{1}{2^2}$.

   Portanto $\mathbf{k} = 2$ e a matriz $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ de $\frac{3}{16}$ será $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{3}{16} \cdot 2^2 = \frac{3}{4}$.

   Observe que $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$.

   (c) Seja $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$. Queremos provar que existe um número $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, que satisfaz $0 < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2}$, tal que $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^{\mathbf{k}}$, em que $\mathbf{k}$ é um número inteiro positivo tal que $\frac{1}{2^{\mathbf{k}+1}} < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2^{\mathbf{k}}}$.

   Então, tomando $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}}$, qualquer que seja $\mathbf{k}$ inteiro positivo, teremos que $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^{\mathbf{k}}$ e $\frac{1}{2^{\mathbf{k}+1}} < \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}} \leq \frac{1}{2^{\mathbf{k}}}$, pois $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$.

Portanto dado $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$, o número $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}}$ é uma filial de $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$.

5. **(a)** Em 15 partidas disputadas o máximo possível de pontos que podem ser obtidos é igual a $15 \times 3 = 45$. Tomando 20% desse total teremos $45/5 = 9$ pontos. Então a pergunta é: de quantas maneiras distintas ele pode obter 9 pontos em 15 partidas (a menos da ordem em que isso ocorra) ?

   Vamos fazer sistematicamente:

   - ele pode ter 3 vitórias e 12 derrotas;
   - ele pode ter 2 vitórias, 3 empates e 10 derrotas;
   - ele pode ter uma vitória, 6 empates e 8 derrotas;
   - ele pode ter 9 empates e 6 derrotas.

   Portanto são 4 maneiras distintas, a menos da ordem em que ocorrem os resultados.

   (b) O número mínimo deverá ocorrer se todas as partidas seguintes forem ganhas. A quantidade total de pontos disputados, das 15 partidas já jogadas mais esse número mínimo de partidas, é igual a 45 mais três vezes esse número mínimo de partidas. (I)

   A quantidade de pontos que a pessoa obterá com as 15 partidas já jogadas mais esse número de partidas, é igual a 9 mais três vezes esse número mínimo de partidas. (II)

   Como a pessoa deverá alcançar 50% do total de pontos disputados, a diferença entre (I) e (II) deve ser igual ao valor de (II). Mas essa diferença é igual a $45 - 9 = 36$. Portanto a pessoa deverá jogar mais $\frac{(36-9)}{3} = 9$ partidas, ganhando sempre.

   (c) Sejam $\mathbf{V}$ o número de vitórias, $\mathbf{D}$ o número de derrotas e $\mathbf{E}$ o número de empates obtidos após jogadas as 15 partidas iniciais (item (a)). Então deverão ser satisfeitas:

$$\mathbf{V} + \mathbf{D} + \mathbf{E} \leq 15, \tag{1}$$

e

$$9 + 3\mathbf{V} + \mathbf{E} = \frac{45 + 3(\mathbf{V} + \mathbf{D} + \mathbf{E})}{2}. \quad (2)$$

De (2) obtemos:

$$\mathbf{V} = 9 + \mathbf{D} + \frac{\mathbf{E}}{3}. \quad (3)$$

A igualdade (3) nos diz que $\mathbf{E}$ deve ser múltiplo de 3 e que

$$\mathbf{V} = 9 + \mathbf{D} + \frac{\mathbf{E}}{3} \geq 9.$$

Segue-se dessa última desigualdade e de (1) que $\mathbf{D} + \mathbf{E} \leq 6$. Portanto teremos três casos: $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{E} = 3$ e $\mathbf{E} = 6$.

- Se $\mathbf{E} = 0$, então de (3) teremos $\mathbf{V} = 9 + \mathbf{D}$ e, de (1), teremos que
$$9 + \mathbf{D} + \mathbf{D} \leq 15 \Rightarrow \mathbf{D} \leq 3.$$
Portanto, se
$\mathbf{D} = 3$ então $\mathbf{V} = 12$,
$\mathbf{D} = 2$ então $\mathbf{V} = 11$,
$\mathbf{D} = 1$ então $\mathbf{V} = 10$
e
$\mathbf{D} = 0$ então $\mathbf{V} = 9$.
- Se $\mathbf{E} = 3$, então de (3) teremos $\mathbf{V} = 9 + \mathbf{D} + 1 = \mathbf{10} + \mathbf{D}$ e, de (1) teremos que
$$10 + \mathbf{D} + \mathbf{D} + 3 \leq 15 \Rightarrow \mathbf{D} \leq 1.$$
Portanto, se
$\mathbf{D} = 1$ então $\mathbf{V} = 11$ e
$\mathbf{D} = 0$ então $\mathbf{V} = 10$.
- Se $\mathbf{E} = 6$, então de (3) teremos $\mathbf{V} = 9 + \mathbf{D} + 2 = 11 + \mathbf{D}$ e, de (1) teríamos que
$11 + \mathbf{D} + \mathbf{D} + 6 \leq 15$, o que é impossível.

Portanto há seis maneiras para $(\mathbf{V}, \mathbf{E}, \mathbf{D})$ de se conseguir o que foi pedido neste item: (12, 0, 3), (11, 0, 2), (10, 0, 1), (9, 0, 0), (11, 3, 1) e (10, 3, 0).

Gabarito Nível 3

1. Note que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$.

   Portanto a pergunta passa a ser: qual o menor inteiro n para o qual

   $$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} < \frac{1}{2010}, \text{ ou equivalentemente } \sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 2010 \text{ ?}$$

   Como $\sqrt{n} > \sqrt{n-1}$ então se $\sqrt{n-1} \geq \dfrac{2010}{2} = 1005$ teremos $\sqrt{n} > 1005$ e então $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 2010$.

   Mas $\sqrt{n-1} \geq 1005$ e então $n - 1 \geq 1005^2$ ou seja $n \geq 1005^2 + 1$.
   Observe agora que $n = 1005^2$, ou, $\sqrt{n} = 1005$ e $\sqrt{n-1} < 1005$, o que nos dá

   $$\sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 2010.$$

   Portanto o menor inteiro n para o qual a desigualdade acima ocorre é $1005^2 + 1 = 1010026$.

2. **(a)** Note que $\dfrac{1}{2^2} < \dfrac{3}{7} < \dfrac{1}{2}$.

   Portanto $\mathbf{k} = 1$ e a matriz $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ de $\dfrac{3}{7}$ será $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \dfrac{3}{7} \cdot 2 = \dfrac{6}{7}$.
   Observe que $\dfrac{1}{2} < \dfrac{6}{7} < 1$.

   (b) Note que $\dfrac{1}{2^3} < \dfrac{3}{16} < \dfrac{1}{2^2}$.

   Portanto $\mathbf{k} = 2$ e a matriz $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ de $\dfrac{3}{16}$ será $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \dfrac{3}{16} \cdot 2^2 = \dfrac{3}{4}$.
   Observe que $\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$.

   (c) Seja $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ que satisfaz $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$. Queremos provar que existe um número $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, que satisfaz $0 < \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \dfrac{1}{2}$, tal que $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^k$, em que $\mathbf{k}$ é um número inteiro positivo tal que $\dfrac{1}{2^{k+1}} < \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \dfrac{1}{2^{\mathbf{k}}}$.

Então, tomando $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \dfrac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}}$, qualquer que seja $\mathbf{k}$ inteiro positivo, teremos que $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^{\mathbf{k}}$ e $\dfrac{1}{2^{\mathbf{k}+1}} < \dfrac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}} \leq \dfrac{1}{2^{\mathbf{k}}}$, pois $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ satisfaz $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$.

Assim, dado $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ que satisfaz $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$, o número $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \dfrac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}}$ é uma filial de $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, para todo $\mathbf{k}$ inteiro positivo.

Portanto, todo número racional $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, que satisfaz $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$, é matriz de uma infinidade de filiais.

3. **(a)** Uma maneira de dar uma resposta para este item consiste em encontrar um terno Pitagórico no qual um dos quadrados correspondentes a um cateto também seja um cubo. Por exemplo, $64 = 4^3 = 8^2$. Então, como $64 + 36 = 100$, temos:

$$4^3 + 6^2 = 10^2 ,$$

fornecendo-nos mais uma solução.

(b) Observe agora que

$$\mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{c}^2 - \mathbf{b}^2 = (\mathbf{c} - b) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{b}).$$

Assim, se fizermos

$$\begin{gathered} \mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{a} \\ \mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{a}^2 \end{gathered}$$

teremos $\mathbf{c} = \dfrac{\mathbf{a}(\mathbf{a}+1)}{2}$ e $\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a}(\mathbf{a}-1)}{2}$. Note que $\mathbf{c}$ e $\mathbf{b}$ são inteiros, pois o produto de dois inteiros consecutivos é par.

Portanto, para todo inteiro $\mathbf{a}$ maior do que 1, teremos uma solução, com $\mathbf{c}$ e $\mathbf{b}$ encontrados acima. Assim, existe uma infinidade de soluções de inteiros positivos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ que satisfazem $\mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$.

4. Observemos inicialmente que, como a relação (iii) deve ser satisfeita para todo x do domínio, os valores 0 e 1 não devem pertencer à imagem de f. Então:

   (a) fazendo $x = \dfrac{1}{2}$ em (i), obtemos

   $$f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 1.$$

   Mas então ou $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ ou $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$. Pela observação acima, só podemos ter $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$.

   Fazendo agora $x = 2$ em (ii), obtemos

   $$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f(f(2))} \Rightarrow f(f(2)) = -1$$

   e, de (iii) obtemos

   $$f(f(f(2))) = f(-1) \Rightarrow f(-1) = 2.$$

   Finalmente, fazendo $x = 2$ em (i), obtemos

   $$f(1-2) = \frac{1}{f(2)} \Rightarrow f(-1) = 2 = \frac{1}{f(2)} \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}.$$

   (b) para determinar f, mudamos x para $\dfrac{1}{x}$ em (i). Então, usando sucessivamente (ii) e (iii), obtemos

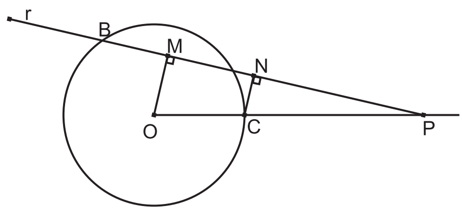
   $$f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = f(f(x)) \Rightarrow$$

   $$f\left(f\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = f(f(f(x))) = x.$$

   Aplicando f mais uma vez e novamente usando (iii), obtemos

   $$f\left(f\left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)\right) = f(x) \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

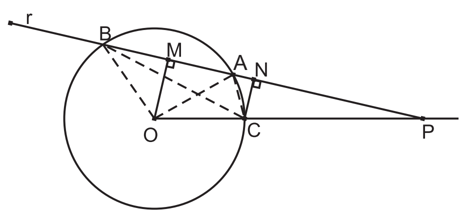
5. **(a)** Os triângulos retângulos $\triangle POM$ e $\triangle PCN$ são semelhantes, pois são retângulos e têm o ângulo agudo $\angle P$ comum.



Então, a razão entre as distâncias do ponto O à reta r e de C à reta r é igual a

$$\frac{OM}{CN} = \frac{PO}{PC} = \frac{PC + OC}{PC} = \frac{10+6}{10} = \frac{8}{5}.$$

(b) Os triângulos $\triangle ABO$ e $\triangle ABC$ têm a mesma base $\overline{AB}$ e alturas $\overline{OM}$ e $\overline{CN}$ respectivamente.

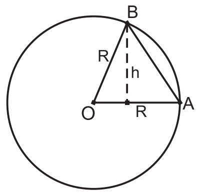


Então, a razão entre suas áreas será

$$\frac{A_{\triangle ABO}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{OM}{CN} = \frac{8}{5}.$$

Portanto, a área do triângulo $\triangle ABC$ será máxima quando a área do triângulo $\triangle ABO$ for máxima. Mas a área do triângulo $\triangle ABO$ será máxima quando o ângulo $\angle AOB$ for reto, pois

$$A_{\triangle AOB} = \frac{R \times h}{2} \leq \frac{R^2}{2} \quad \text{e} \quad A_{\triangle AOB} = \frac{R^2}{2} \Rightarrow A\hat{O}B = 90^\circ.$$



Se $A\hat{O}B = 90°$, então $AB = AO\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ e $OM = \dfrac{AB}{2} = 3\sqrt{2}$.
Então, do item (a), temos

$$\frac{OM}{CN} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{CN} = \frac{8}{5} \Rightarrow CN = \frac{15\sqrt{2}}{8}.$$

Logo, a área máxima do triângulo $\triangle ABC$ será:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{AB \times CN}{2} = \frac{6\sqrt{2} \times \dfrac{15\sqrt{2}}{8}}{2} = \frac{90}{8} = \frac{45}{4}.$$

Artigos

Calculando Juros Tintim por Tintim

Asteroide Santana [1]

asteroidemtm@yahoo.com.br

No artigo "Uma Mistura Hiperbólica de Água e Sabão", publicada na edição anterior, usamos funções exponenciais para descrever uma bolha muito interessante. Agora, vamos retomar as funções exponenciais para tratar de um assunto mais sério que está relacionado ao dinheiro.

Em nossa sociedade as pessoas aprendem a lidar com dinheiro desde criança. Isso sempre envolve Matemática e parece uma tarefa fácil. Pelo menos enquanto nos restringimos às operações básicas para contar dinheiro, dar troco, e assim por diante. Por outro lado, existem muitas outras formas de se lidar com o dinheiro, através das quais nem tocamos em moedas ou cédulas. Exemplos disso são os cartões de crédito, cheques, financiamentos, contas bancárias, entre outros. Vamos aprender que nestes casos pode ser necessário mais conhecimento matemático do que a maioria das pessoas imaginam. De fato, quando se tratam de empréstimos e financiamentos, muitas pessoas fazem negócios e não sabem quanto estão pagando a mais por isso. Sim, pagando a mais. Porque quando adquirimos um bem pagando à vista, pagamos somente o que ele realmente custa. Mas, quando pagamos em prestações o valor aumenta. Não que seja uma prática incorreta, bem pelo contrário. É justo pagar mais quando não se paga à vista. A questão é: quanto pagamos a mais?

O valor *a mais* do qual estamos falando é denominado *juros*. Inclusive, *juros* é a palavra chave deste artigo. A questão é que saber somar, subtrair, multiplicar e dividir pode ser pouco para lidar com juros. Convém saber um pouco mais.

Através desta discussão estamos entrando numa importante área da Matemática, denominada *Matemática Financeira*, segundo a qual o que hoje vale $R\$100,00$ daqui a alguns meses valerá $R\$100,00$ mais um pouquinho (juros), ou um poucão se a taxa de juros for alta. Aliás, é através da taxa de juros que se calculam os juros. Quanto mais alta for a taxa, maiores serão os juros. Sendo assim, taxa de juros alta é bom

[1] Estudante do curso de Mestrado em Matemática e Computação Científica do Departamento de Matemática da UFSC.

para quem empresta ou vende em prestações e ruim para quem toma emprestado ou não paga à vista.

Para esclarecer melhor os fatos, suponhamos que você tenha comprado um tênis de $R\$100,00$ e que você usou o cartão de crédito de seus pais para pagá-lo. Isto é, o banco que forneceu o cartão de crédito paga o tênis para você, que por sua vez fica devendo para o banco. Depois o banco lhe cobra por isso, claro! É comum ser cobrado uma taxa de juros de 11% ao mês para uma compra com cartão de crédito, mas vamos fazer de conta que no cartão de seus pais é cobrado apenas 10% ao mês. Isso significa que ao final de cada mês o banco cobra 10% do valor que você estava devendo naquele mês.

Desta maneira, passado um mês da data da compra você deveria pagar o valor de $R\$100,00$, correspondente a dívida inicial, mais 10% de $R\$100,00$, referente aos juros, isto é, ao final do primeiro mês sua dívida é de

$$100,00 + \underbrace{\frac{10}{100}100,00}_{10\% \text{ de } R\$100{,}00} = 100,00 + 10,00 = R\$110,00.$$

Se você não quita a dívida nessa data, os $R\$10,00$ de juros passam a fazer parte da dívida, de modo que ao final do segundo mês você deveria pagar $R\$110,00$ mais 10% de $R\$110,00$, ou seja,

$$110,00 + \frac{10}{100}110,00 = 110,00 + 11,00 = R\$121,00.$$

Note que os juros aumentaram de $R\$10,00$ para $R\$11,00$ em decorrência do aumento da dívida no mês anterior.

Suponhamos que você ainda não conseguiu levantar a grana necessária para pagar a fatura do cartão ao final do segundo mês e deixou para acertar tudo ao final do terceiro mês. Então, você vai pagar $R\$121,00$ mais 10% de $R\$121,00$:

$$121,00 + \frac{10}{100}121,00 = 121,00 + 12,10 = R\$133,10!!$$

Novamente os juros aumentaram. Desta vez passaram de $R\$11,00$ para $R\$12,10$.

Portanto, pela utilização de $R\$100,00$, durante três meses, você paga $10,00 + 11,00 + 12,10 = R\$33,10$ de juros. Ou seja, o tênis que custava $R\$100,00$ saiu por $R\$133,10$!

Toda essa discussão nos leva a crer que pode ser muito mais vantajoso comprar à vista, ainda que seja necessário adiar a compra por algum tempo.

Até agora não usamos muita Matemática e também não encontramos funções exponenciais. Pois bem, as funções exponenciais surgem com a generalização do raciocínio aplicado anteriormente. E é justamente nessa direção que vamos seguir. Essa generalização vai nos fornecer uma fórmula que nos permite calcular o valor de uma dívida de maneira muito eficiente.

Denotemos por C o valor do empréstimo, por i a taxa de juros, por n o número de meses em que o capital C ficou emprestado e por M_k o valor da dívida ao final do k-ésimo mês. Assim, fazendo um raciocínio análogo aquele aplicado no problema do tênis, temos

$$
\begin{aligned}
M_1 &= C + C \cdot i = C(1+i) \\
M_2 &= M_1 + M_1 \cdot i = C(1+i) + C(1+i) \cdot i = C(1+i)^2 \\
M_3 &= M_2 + M_2 \cdot i = C(1+i)^2 + C(1+i)^2 \cdot i = C(1+i)^3.
\end{aligned}
$$

Diante disso é fácil acreditar[2] que

$$M_n = C(1+i)^n.$$

Para simplificar a notação, vamos escrever M em vez de M_n. Daí ficamos com a fórmula

$$M = C(1+i)^n. \tag{1}$$

É basicamente a partir desta relação que a Matemática Financeira se desenvolve. O valor da dívida que estamos denotando por M é denominado *montante*. Observe na Figura 1 que uma vez determinado o montante é possível calcular o valor dos juros.

Veremos alguns exemplos.

Usando nossa fórmula fica fácil calcular quanto se pagaria pelo tênis caso a dívida fosse quitada somente depois de um ano, por exemplo. Neste caso teríamos $C = 100,00$, $i = 10\%$ ao mês e $n = 12$ meses. Assim,

$$M = C(1+i)^n = 100\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{12} = 313,84 \text{ reais!!!}$$

Você achou caro?! Pois fique sabendo que, nestas condições, depois de quatro anos a dívida já passa de nove mil reais!! Faça as contas com outros valores de n e veja o que acontece.

[2] Quem duvida pode usar o princípio de indução matemática para provar este fato.

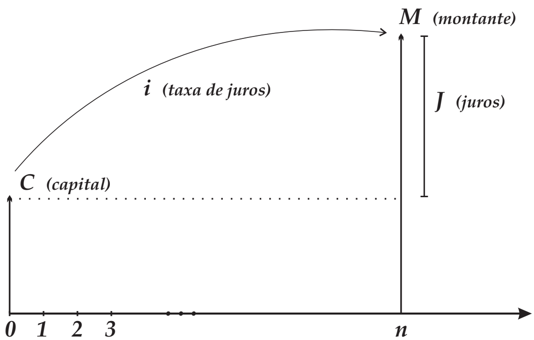


Figura 1: Representação dos conceitos de capital, montante e juros.

Um probleminha de Matemática Financeira particularmente interessante, e que pode ser resolvido com a nossa fórmula, é o seguinte:

Considerando uma taxa de juros de 11% *ao mês, quantos meses são necessários para que o valor de uma dívida duplique?*

Intuitivamente parece que vai levar muitos meses, não é mesmo? Pois bem, façamos as contas.

Como não foi informado o valor do empréstimo, isto é, o valor inicial da dívida, parece que a resposta independe deste dado. Então vamos denotá-lo por C. Assim, o valor final da dívida é $M = 2C$, visto que queremos saber em quanto tempo o valor da dívida duplica. Sabendo que $i = 11\%$ ao mês, queremos calcular n.

Substituindo os dados na fórmula temos

$$2C = C\left(1 + \frac{11}{100}\right)^n = C\left(1 + 0,11\right)^n = C\left(1,11\right)^n.$$

Dividindo a equação por C resulta

$$2 = 1,11^n.$$

Gostaríamos de isolar o n que aparece no expoente. Para isso, comecemos aplicando o logaritmo natural[3] nos dois membros da equação e usemos uma propriedade[4]

[3] Não tem problema se você ainda não estudou logaritmos. Apenas observe o resultado.

[4] Se trata da seguinte propriedade: $log(a^n) = n \cdot log(a)$, onde n é uma constante.

de logaritmo para obtermos

$$ln(2) = ln(1,11^n) = n \cdot ln(1,11).$$

Assim, como $ln(1,11) \neq 0$ podemos escrever

$$n = \frac{ln(2)}{ln(1,11)}.$$

Ou ainda, usando uma calculadora científica para avaliar $ln(2)$ e $ln(1,11)$, concluímos que

$$n = \frac{ln(2)}{ln(1,11)} \cong \frac{0,6931}{0,1043} \cong 6,64 \text{ meses.}$$

Isto é, com uma taxa de juros de 11% ao mês, o valor de uma dívida duplica em pouco mais de seis meses e meio!!

Isso deixa claro que tomar empréstimos pode ser um péssimo negócio, principalmente se a pessoa levar muito tempo para quitar a dívida. O fato que se esconde por trás disso é que o valor da dívida cresce **exponencialmente** com o passar do tempo. E é justamente isso que muita gente não consegue perceber! Depois você pode explicar para seus pais o que acontece. Talvez eles também não saibam disso.

Para entender melhor o fenômeno do crescimento exponencial, vamos analisar o comportamento do gráfico de uma função exponencial.

Definição: *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial de base a.*

Na Matemática Financeira vamos nos deparar apenas com funções exponenciais em que a base é maior que 1. Além disso, estaremos interessados nos valores de $f(x)$ apenas para $x \geq 0$. Veja o gráfico de $f(x) = a^x$ para $a = 1,5$ e $a = 2$ na Figura 2.

Notemos que o valor de $y = f(x)$ cresce rapidamente a medida em que x aumenta. É dai que vem a expressão “crescimento exponencial”. Ela significa que algo cresce, aumenta o valor ou o tamanho muito depressa. Vale observar que quanto maior a base mais rápido cresce a função.

LEGAL! Então isso explica o valor absurdo que se pagaria pelo tênis depois de um ano! Pois, se olharmos para o valor da dívida M como uma função do tempo n, temos uma função exponencial de base $a = 1,1$:

$$M(n) = 100\left(1 + \frac{1}{10}\right)^n = 100 \cdot 1,1^n$$

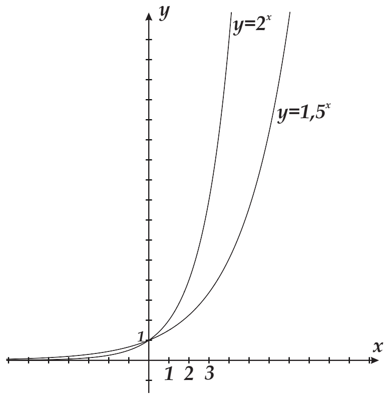


Figura 2: Gráfico de duas funções exponenciais.

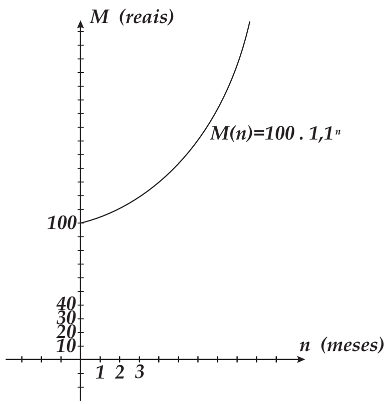


Figura 3: Gráfico da função $M(n) = 100 \cdot 1,1^n$.

Na verdade, neste caso, se trata de uma função exponencial multiplicada por 100, o que a faz crescer mais depressa ainda. Veja o gráfico desta função na Figura 3.

Analisando o caso geral

$$M(n) = C(1+i)^n,$$

podemos ver uma função exponencial multiplicada por C e é fácil perceber que quanto maior for a taxa de juros i, maior será a base $1+i$. Isso mostra que a dívida cresce mais rápido quando a taxa é maior.

Agora, uma pergunta natural é a seguinte: como usar o crescimento exponencial que acabamos de identificar na Matemática Financeira a nosso favor?

Vamos usar um pouco mais de Matemática para dar um exemplo.

Imaginemos que você comece, a partir do próximo mês, a depositar mensalmente $R\$200,00$ numa conta poupança que paga 1% de juros ao mês (você acha essa taxa muito pequena?! Lamento informar que em geral os bancos pagam menos que isso! Mas vamos confiar no poder do crescimento exponencial). Suponhamos que você possa manter essa rotina de depósitos durante 30 anos. Vamos calcular o saldo da poupança depois do último depósito. A situação está esquematizada na Figura 4, onde cada flecha representa um depósito.

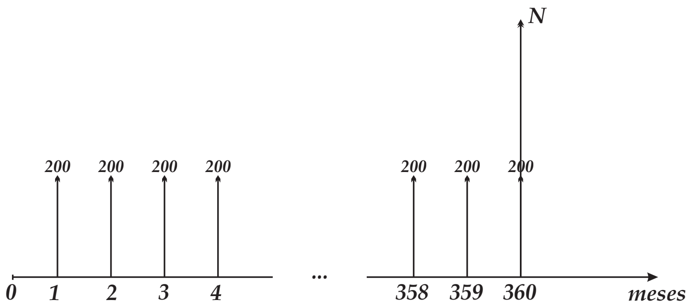


Figura 4: Representação gráfica dos 360 depósitos.

Tudo o que temos a fazer é calcular o valor de cada depósito na data 360 e somar os resultados para obtermos o montante que vamos denotar por N. É necessário "levar" cada depósito para a data 360 porque em Matemática Financeira não faz sentido somar valores que estão em datas distintas.

O primeiro depósito vai permanecer no banco por 359 meses (Veja a Figura 4). Assim, usando a fórmula $M = C(1+i)^n$ podemos calcular o valor deste capital na data 360 fazendo

$$M_1 = 200\left(1+\frac{1}{100}\right)^{359}.$$

O segundo depósito fica na conta por 358 meses. Logo, na data 360 ele vale

$$M_2 = 200\left(1+\frac{1}{100}\right)^{358}.$$

Seguindo este raciocínio temos

$$\begin{aligned}
N &= M_1 + M_2 + \cdots + M_{359} + M_{360}\\
&=200\left(1+\frac{1}{100}\right)^{359} + 200\left(1+\frac{1}{100}\right)^{358} + \cdots + 200\left(1+\frac{1}{100}\right)^{1} + 200\\
&=200[\underbrace{1,001^{359} + 1,001^{358} + \cdots + 1,001^{1}}_{S}] + 200.
\end{aligned}$$

Observemos que as parcelas entre colchetes formam uma progressão geométrica (PG) de 359 termos, com razão $q = 1,001$, cujo primeiro termo é $a_1 = 1,001$. Assim, usando a fórmula para a soma dos termos de uma PG, temos

$$S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1,001(1-1,001^{359})}{1-1,001} = 432,07.$$

Segue-se que

$$N = 200\cdot S + 200 = 200\cdot 432,07 + 200 = 86.614,00 \text{ reais}.$$

Esse seria o saldo da poupança depois do último depósito! Note que $R\$14.614,00$ corresponde aos juros, pois se o dinheiro ficasse guardado em casa, por exemplo, o montante seria de apenas $360 \cdot 200,00 = 72.000,00$ reais.

Agora que você já deve estar entendendo um pouco de Matemática Financeira e como funciona o processo de formação de juros, observe a situação a seguir.

A loja Altastaxas oferece um cartão de crédito com o qual se pode comprar um televisor de 32 polegadas em 5 prestações mensais iguais, sem entrada, no valor de $R\$263,79$ cada. Do outro lado da rua, a loja Papajuros também oferece um cartão de crédito com o qual se pode comprar o mesmo televisor em 6 prestações mensais iguais, sem entrada, no valor de $R\$236,37$ cada uma.

Na sua opinião, qual seria a opção financeiramente mais vantajosa, sabendo que em ambas as lojas se pode comprar o televisor à vista por apenas $R\$1.000,00$?

Eu diria que a maioria das pessoas optariam por comprar na loja Papajuros, visto que o valor das prestações são menores. No entanto, a melhor opção é comprar na loja Altastaxas, visto que o cartão de crédito que ela oferece cobra uma taxa de 10% ao mês e no cartão da loja Papajuros é cobrado uma taxa de 11% ao mês. Você lembra o que isso significa, não é mesmo? Quanto maior a taxa, maiores são os juros.

De fato, não é simples fazer as contas para se chegar a essas conclusões. Seria necessário estudar um pouco mais de Matemática Financeira. Mas, numa situação real o cliente deveria se informar das taxas antes mesmo de adquirir o cartão. É exatamente isso que as pessoas não fazem. Por isso que no Brasil quase todas as lojas grandes oferecem um cartão de crédito próprio.

Ficamos por aqui. Bons estudos e bons negócios!

A notável aproximação $\frac{355}{113}$ para π

Antônio Vladimir Martins [1]

Esta fração coincide com π até a sexta casa decimal e a sua representação decimal é uma dizima periódica tendo 112 algarismos no período. Era conhecida pelo chinês Tsu Ch'ung - Chih $(430 - 501)$, que considerava $\frac{22}{7}$ como um "valor inexato" de π e $\frac{355}{113}$ como o "valor preciso" de π. Não se sabe como ele chegou a esta fração mas o desenvolvimento de π em fração contínua é $[3; 7, 15, 1, 292, \ldots]$. Os cinco primeiros convergentes desta fração contínua são $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103993}{33102}$ e o quarto é exatamente a nossa fração!

Pode ser mostrado que

$$|\pi - \frac{355}{113}| < \frac{1}{(113)\cdot(33102)} < \frac{3}{10^7}$$

e

$$|\pi - \frac{22}{7}| < \frac{1}{7\cdot(50)} < \frac{1}{7^2}.$$

A seguir apresentaremos a construção da parte não inteira de $\frac{355}{113}$ com régua e compasso.

$$\frac{355}{113} = \frac{3(113)+16}{113} = 3 + \frac{\frac{4^2}{8^2}}{(\frac{7}{8})^2+1} = 3 + \frac{(\frac{1}{2})^2}{1^2+(\frac{7}{8})^2} = 3 + d^2,$$

onde

$$d = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1^2+(\frac{7}{8})^2}} = \frac{a}{b} < 1; \qquad a = \frac{1}{2}$$

e

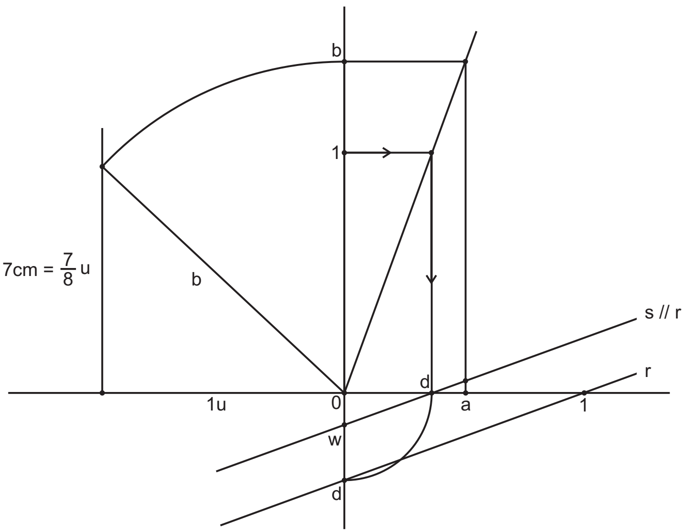
$$b = \sqrt{1^2+(\frac{7}{8})^2} > 1.$$

[1]Professor do Departamento de Matemática da UFSC.

Para fazer a construção de $\omega = d^2$ (= parte não inteira de $\frac{355}{113}$) é conveniente escolher a unidade de comprimento para ser $1\mu = 8cm$.

$$1\mu = 8cm; \frac{1}{8}\mu = 1cm; \frac{7}{8}\mu = 7cm; d = \frac{a}{b}; \frac{1}{d} = \frac{b}{a}; \frac{\omega}{d} = \frac{d}{1}.$$

A figura abaixo nos dá o segmento 0w= $\frac{(\frac{1}{2})^2}{1^2+(\frac{7}{8})^2} = 0,141592... = \omega$



Nota:

1. Agradeço aos antigos alunos do PET Matemática da UFSC, Mael Sachine e Leonardo Koller Sacht, e também ao estimado Franco Kagoiki pelas nossas conversas do tempo que eles foram meus alunos.

2. Para memorizar a fração $\frac{355}{113}$ é só escrever a lista 113355 e separar os 3 primeiros números da lista dos 3 últimos.

Áreas e Semelhanças

Eliezer Batista [1]

Resumo

Analisando-se a maioria dos problemas geométricos presentes em olimpíadas de matemática, podemos perceber uma forte tendência a explorar a interrelação entre diversos aspectos quantitativos das figuras. Uma fonte inesgotável de problemas de diversos níveis de dificuldade são os problemas envolvendo áreas e semelhanças. Neste artigo, primeiramente revisaremos os conceitos geométricos envolvidos; posteriormente, através da análise de problemas, explicitaremos algumas técnicas envolvendo o uso de semelhanças e o cálculo de áreas de figuras planas.

Áreas de Figuras Planas

A noção de área é um conceito primitivo em geometria, isto é, não podemos definir o que é área mas podemos formular axiomas para estabelecermos seu funcionamento. Basicamente, a área é um número real positivo associado a um determinado tipo de subconjunto do plano. Mais precisamente, os subconjuntos do plano para os quais se pode atribuir um valor de área são aqueles delimitados por uma curva fechada, simples e de variação limitada. Por curva fechada, entende-se de maneira intuitiva uma curva que pode ser obtida por deformação contínua de uma circunferência. Por curva simples, entende-se uma curva que não possui auto intersecções. Finalmente, a terceira condição, mais técnica, significa basicamente que a curva não oscila de maneira incontrolável. Com estas três primeiras condições, pode-se mostrar que esta curva divide os pontos do plano que não estão sobre a mesma em dois subconjuntos disjuntos: o lado de dentro e o lado de fora. Vamos simplesmente denominar estes tipos de subconjuntos de regiões planas.

Definição 1 *Dada uma região plana Σ, a área desta região plana é o número $A(\Sigma) \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo às seguintes condições.*

[1] Professor do Departamento de Matemática da UFSC.

(i) *Se duas regiões planas* Σ *e* Σ' *são congruentes, isto é, existe um movimento rígido que leva uma na outra, então* $A(\Sigma) = A(\Sigma')$.

(ii) *Se a intersecção de duas regiões planas,* Σ *e* Σ'*, não contêm pontos interiores, então* $A(\Sigma \cup \Sigma') = A(\Sigma) + A(\Sigma')$.

(iii) *A área de um quadrado de lado unitário é igual a* 1.

Note que os dois primeiros itens nos conduzem a uma interessante consequência: se quisermos medir a área de uma figura complexa, podemos sempre subdividí-la em regiões simples e calcularmos as áreas destas regiões de forma a obtermos por adição a área desejada. Duas figuras planas que podem ser formadas com o mesmo conjunto de peças elementares são chamadas equicompostas ou equidecomponíveis [1]. Também podemos aumentar a região, acrescentando outras figuras simples, de modo que saibamos calcular a área, de forma a obtermos também uma figura maior mais simples. Neste caso, a área desejada é obtida por subtração. Duas figuras planas que, acrescentando-se o mesmo conjunto de peças formam figuras congruentes, são denominadas equicomplementáveis [1]. Vamos ilustrar estes métodos na análise dos problemas nas seções seguintes.

O cálculo do valor numérico da área, que é o real objetivo, depende estritamente do terceiro item, que nos fornece uma unidade padrão para o cálculo de áreas. Medir a área de uma região plana significa comparar esta região com o padrão dado. O teorema a seguir, que apresentaremos sem demonstração[2], é o primeiro passo na direção de determinarmos as áreas das figuras planas conhecidas e, conceitualmente, também este é o teorema mais complexo.

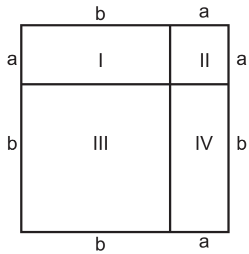
Teorema 1 *A área de um quadrado de lado* a *é igual a* a^2.

A dificuldade principal da demonstração deste teorema está no cálculo da área de um quadrado cuja medida do lado seja um número irracional. Uma vez assumido este resultado, todas as outras áreas de figuras poligonais decorrem automaticamente, com o uso apenas dos itens (i) e (ii). Vamos primeiramente calcular o valor da área de um retângulo.

Teorema 2 *A área de um retângulo é igual ao produto das medidas de seus lados.*

Demonstração: Considere um retângulo de lados a e b e construamos um quadrado de lado igual a $(a + b)$ dividido em quatro regiões conforme ilustrado na figura seguinte.

[2]Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada na referência [2].



Por um lado, a área total do quadrado, pelo item (ii) da definição de área, é igual à soma das áreas das regiões I, II, III e IV. As regiões I e IV são retângulos de lados a e b, portanto são figuras congruentes (é fácil ver que é possível movimentar um dos retângulos até sobrepô-lo ao outro), e pelo item (i), concluímos que têm a mesma área, ou seja $A_I = A_{IV} = A$. A região II é um quadrado de lado a, portanto de área igual a a^2. A região III, por sua vez, é um quadrado de lado b, com área b^2. O quadrado total, de lado $(a+b)$ possui área igual a $(a+b)^2$. Logo

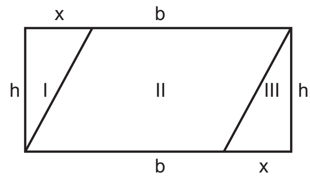
$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} \\
a^2 + 2ab + b^2 &= 2A + a^2 + b^2 \\
ab &= A
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a área $A = ab$. ■

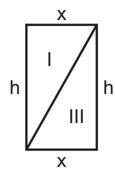
Uma vez conhecido o valor da área de um retângulo, podemos deduzir a fórmula para o valor da área de um paralelogramo. Um paralelogramo é um quadrilátero que possui os seus pares de lados opostos paralelos. Tomemos um dos pares de lados opostos do paralelogramo e o denominemos de base. A distância entre estas duas retas paralelas será denominada altura. Então, temos o seguinte resultado.

Teorema 3 *A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela sua altura correspondente.*

Demonstração: Considere um paralelogramo cuja medida da base é igual a b e cuja altura é igual a h. Sejam dois triângulos retângulos, que serão denominados por I e III, de forma que o paralelogramo unido aos dois triângulos forme um retângulo, conforme ilustrado na figura seguinte.



As medidas das hipotenusas dos triângulos I e III são iguais, correspondendo ao par de lados paralelos do paralelogramo, que na figura é denotado como região II. Também estes dois triângulos retângulos possuem um dos catetos com medida igual à altura do paralelogramo. Portanto, podemos concluir que estes triângulos são congruentes. Logo, possuem a mesma área. Seja x a medida do outro cateto destes triângulos. Assim, as regiões I, II e III formam juntas um retângulo de lados $b + x$ e h, cuja área é igual a $(b + x)h$. Por outro lado, os triângulos I e III, juntos, formam um retângulo de lados x e h, cuja área é igual a xh, conforme ilustrado na figura abaixo.



Portanto, temos que

$$(b + x)h = bh + xh = A_I + A_{II} + A_{III} = A_{II} + xh,$$

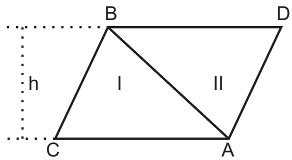
o que nos leva à conclusão que $A_{II} = bh$, como queríamos. ■

Note que, esta fórmula nos diz que a área do paralelogramo só depende da medida de sua base e da sua altura, não importando sua forma, ou seja, a inclinação do outro par de lados paralelos. Outra importante conclusão é que o raciocínio usado na demonstração do teorema acima pode ser feito igualmente se usarmos o outro par de lados paralelos como base, e considerarmos a altura relativa a estas bases. O resultado numérico será o mesmo.

A partir da expressão para a área de um paralelogramo, podemos também deduzir a expressão da área de um triângulo. Se escolhermos qualquer um dos lados, que será denominado base do triângulo, podemos definir a altura relativa àquela base como sendo a distância entre a reta que a contém e o vértice oposto à base.

Teorema 4 *A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela sua altura correspondente.*

Demonstração: Seja ΔABC um triângulo cuja medida da base $\overline{AC}$ é igual a b e cuja altura relativa a esta base é igual a h. Denominemos este triângulo de região I. Considere também um triângulo ΔBAD congruente ao primeiro triângulo dado, o qual chamaremos de região II, e o coloque na posição indicada pela figura abaixo.



Como $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$, temos que $\angle BAC \equiv \angle ABD$. Logo, $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BD}$. Também $\angle ACB \equiv \angle BDA$. Logo, $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{AD}$. Portanto $ADBC$ é um paralelogramo cuja base mede b e cuja altura é igual a h. Assim

$$bh = A_I + A_{II} = 2A_I,$$

o que nos leva à conclusão que $A_I = \frac{1}{2}bh$. ■

Note mais uma vez que o mesmo raciocínio pode ser utilizado para qualquer escolha que se faça de um dos lados do triângulo para que seja base, desde que se tome a altura respectiva: o resultado numérico será o mesmo.

Também, notamos que, como a área de um triângulo somente depende da medida da base e da altura relativa a esta base, dois triângulos com mesma base e mesma altura possuem a mesma área, muito embora seu formato possa diferir. Também, é importante e útil na resolução de problemas, notar que a razão entre as áreas de dois triângulos de mesma altura é igual à razão entre as bases. E que a razão entre dois triângulos de mesma base é igual à razão entre suas alturas. Vamos utilizar estes conceitos nos problemas que serão analisados logo adiante.

A partir destas áreas elementares, é possível calcular as áreas de quaisquer regiões planas delimitadas por polígonos, pois toda região deste tipo admite uma triangularização [5]. Assim, a partir da triangularização, ao calcularmos as áreas de todos os triângulos envolvidos na figura e somá-los, obteremos a área da figura plana desejada. Para figuras planas delimitadas por curvas mais gerais, utiliza-se um processo de limite, aproximando-se a curva que delimita a região por polígonos de número cada vez maior de lados. No entanto, este tratamento fica fora do escopo do presente artigo.

Exercício 1 *Mostre que a área de um trapézio é igual ao produto entre a média aritmética das medidas dos lados paralelos (bases) e a altura do trapézio.* (**Sugestão:** *Divida o trapézio em dois triângulos cujas bases são os lados paralelos do trapézio)*

Semelhança e Homotetia

Uma semelhança é, intuitivamente falando, uma transformação realizada sobre uma dada figura que preserva as proporções e posições relativas entre suas partes. Qualquer movimento rígido, de rotação, translação ou reflexão é uma semalhança, uma vez que todas as medidas são estritamente preservadas. Mas, se efetuarmos uma mudança global de escalas, também as proporções são preservadas. Este é o princípio básico utilizado pelos profissionais que trabalham com maquetes. A apresentação que faremos de semelhança, embora com algumas modificações, é fortemente baseada na exposição dada no texto [3].

Definição 2 *Uma transformação de semelhança (ou simplesmente uma semelhança) de razão r em um plano Π é um par (σ, r) em que $\sigma : \Pi \to \Pi$ é uma função, e r é um número real estritamente positivo, tal que, para todo par de pontos $A, B \in \Pi$ temos $\sigma(A)\sigma(B) = rAB$.*

Definição 3 *Duas figuras planas, isto é, dois subconjuntos Ω e Ω' de pontos do plano, são ditos semelhantes se existir uma transformação de semelhança σ no plano tal que $\sigma(\Omega) = \Omega'$.*

Podemos, de fato definir transformações de semelhança para quaisquer espaços vetoriais. Mas neste artigo nos restringiremos a semelhanças no plano.

Primeiramente, é importante ressaltarmos as propriedades geométricas das semelhanças, pois são estas propriedades que as tornam tão úteis no estudo da geometria como um todo. Talvez um dos resultados mais simples e mais importantes é o fato de que toda transformação de semelhança preserva colinearidade entre pontos.

Teorema 5 *Uma transformação de semelhança associa pontos colineares a pontos colineares e pontos não colineares a pontos não colineares.*

Demonstração: Seja σ uma transformação de semelhança de razão r e sejam A, B e C três pontos colineares no plano. Sem perda de generalidade, suponha que B esteja entre A e C, isto é, o ponto B pertence ao segmento $\overline{AC}$. Assim

$$AC = AB + BC.$$

Sejam $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$, temos que

$$A'C' = rAC = r(AB + BC) = rAB + rBC = A'B' + B'C'.$$

Portanto, os pontos A', B' e C' são colineares. Por outro lado, suponha agora que os três pontos A, B e C formem um triângulo, isto é, não são colineares. Pela desigualdade triangular temos

$$AC < AB + BC, \qquad AB < AC + BC, \qquad BC < AB + AC.$$

Novamente, sejam $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$, assim

$$A'C' = rAC < r(AB + BC) = rAB + rBC = A'B' + B'C'.$$

De igual modo, conseguimos provar que $A'B' < A'C' + B'C'$ e $B'C' < A'B' + A'C'$. Logo, os três pontos A', B' e C' não são colineares. ∎

Também é imediato que uma semelhança é uma aplicação injetiva, conforme a seguinte proposição.

Proposição 6 *Uma semelhança $\sigma : \Pi \to \Pi$ de razão $r > 0$ é uma aplicação injetiva no plano.*

Demonstração: Sejam dois pontos $A, B \in \Pi$ tais que $A' = \sigma(A) = \sigma(B) = B'$, assim $A'B' = 0$. Por outro lado $A'B' = rAB$. O que nos leva à conclusão que $AB = 0$, ou seja $A = B$. Portanto σ é uma aplicação injetiva. ∎

A injetividade nos garante que se duas figuras não se intersectam, então dada uma semelhança no plano, as figuras semelhantes a elas por esta semelhança também não se intersectarão. O fato de uma semelhança ser uma função nos diz que se duas figuras se intersectam, então dada uma semelhança no plano, as figuras semelhantes a elas também se intersectarão.

Enunciaremos aqui, sem demonstração, uma série de resultados que nos garantem que as transformações de semelhança preservam bem as características dos objetos transformados.

Teorema 7 *(1) A imagem de uma (semi)reta por uma semelhança é uma reta.*

(2) A imagem inversa de uma (semi)reta por uma semelhança é uma reta.

(3) A imagem de um segmento por uma semelhança é um segmento.

(4) A imagem inversa de um segmento por uma semelhança é um segmento.

(5) A imagem de uma circunferência (um círculo) por uma semelhança é uma circunferência (um círculo), seus centros estão correlacionados e o raio da imagem é o raio da primeira multiplicado pela razão de semelhança.

(6) *A imagem inversa de uma circunferência (um círculo) por uma semelhança é uma circunferência (um círculo), seus centros estão correlacionados e o raio da pré imagem é o raio da circunferência dada (do círculo dado) dividido pela razão de semelhança.*

(7) *Uma semelhança associa pontos interiores (exteriores, de fronteira) a pontos interiores (exteriores, de fronteira).*

(8) *Uma semelhança associa ângulos a ângulos.*

(9) *Uma semelhança associa uma poligonal a uma outra poligonal com o mesmo número de vértices e arestas.*

Estes fatos geométricos nos ajudam a provar um resultado importante, que garante que toda semelhança é uma bijeção.

Teorema 8 *Uma semelhança $\sigma : \Pi \to \Pi$ de razão $r > 0$ é uma bijeção no plano.*

Demonstração: Já demonstramos a injetividade anteriormente. Só nos resta agora demonstrar a sobrejetividade. Primeiramente, devemos observar que no conjunto imagem da semelhança σ deve haver três pontos não colineares, pois no plano existem três pontos não colineares e toda semelhança associa pontos não colineares a pontos não colineares. Sejam $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$ estes três pontos e seja P um ponto arbitrário que queremos provar que também faz parte do conjunto imagem. Considere as distâncias de P aos pontos A', B' e C', respectivamente $a = A'P$, $b = B'P$ e $c = C'P$. Então o ponto P está na intersecção de três circunferências: a circunferência de centro A' e raio a, a circunferência de centro B' e raio b e a circunferência de raio C' e raio c. O teorema anterior nos garante que estas circunferências, respectivamente, são imagens da circunferência de centro A e raio $\frac{a}{r}$, da circunferência de centro B e raio $\frac{b}{r}$ e da circunferência de centro C e raio $\frac{c}{r}$. Como as imagens destas três circunferências se intersectam no ponto P e a semelhança é uma função injetora, temos que estas três circunferências também se intersectam em um ponto X. Também é fácil verificar que três circunferências cujos centros não são colineares podem ter, no máximo, um ponto em comum. Portanto, o ponto P é a imagem por esta semelhança do ponto X, garantindo a sobrejetividade. ■

Ao trabalharmos com semelhanças como bijeções, torna-se interessante analisarmos o que ocorre quando fazemos a composição de diversas semelhanças, bem como sabermos como uma determinada semelhança se decompõe em transformações de semelhança mais elementares. Primeiramente, precisamos entender que o conjunto das transformações de semelhança é fechado pela composição, isto é, a composta de duas transformações de semelhança é também uma semelhança. Em termos técnicos, o conjunto das transformações de semelhança no plano constitui um grupo.

Proposição 9 *(1) A composta de duas transformações de semelhança é uma transformação de semelhança.*

(2) A inversa de uma transformação de semelhança é uma transformação de semelhança.

Demonstração: (1) Sejam ρ e σ duas semelhanças com razões de semelhança, respectivamente, iguais a r e s. Sejam dois pontos A e B no plano. Denotemos $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$, $A'' = \rho(A')$ e $B'' = \rho(B')$. Então temos

$$A''B'' = rA'B' = rsAB.$$

Portanto, a composta $\rho \circ \sigma$ é uma semelhança de razão rs.

(2) Como uma semelhança é uma bijeção, então sempre existe a inversa. Seja σ uma semelhança de razão r e sejam A e B dois pontos quaisquer do plano. Denotando $A' = \sigma(A)$ e $B' = \sigma(B)$, temos que $A = \sigma^{-1}(A')$ e $B = \sigma^{-1}(B')$. Logo

$$A'B' = rAB, \text{ ou seja, } AB = \tfrac{1}{r}A'B'.$$

Portanto, σ^{-1} é uma semelhança de razão $\frac{1}{r}$. ■

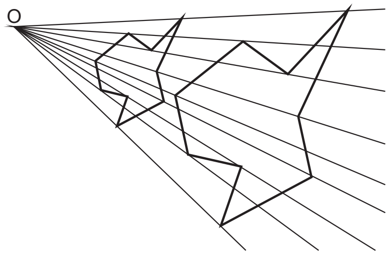
Finalmente, falta-nos identificar as semelhanças elementares, de forma que toda transformação de semelhança possa ser escrita como a composta destas semelhanças. É uma ideia equivalente a escrevermos os números naturais como produtos de números primos. Em primeiro lugar, é importante notar que toda isometria (translações, rotações, simetrias axiais, simetrias centrais e composições destas) são semelhanças. A única liberdade que uma semelhança pode ter em relação a uma isometria é exatamente a mudança de escala. Vamos apresentar as transformações de semelhança mais elementares que permitem mudança de escala, as homotetias.

Definição 4 *Uma homotetia de centro O e razão $r > 0$ é uma função $h : \Pi \to \Pi$ tal que:*

(h1) $h(O) = O$.

(h2) Para qualquer ponto $A \neq O$, $h(A) = A'$ é um ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$ tal que $OA' = rOA$.

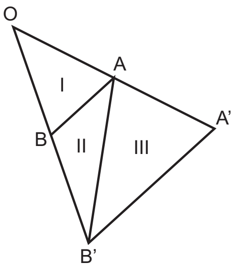
A figura abaixo nos mostra como é uma homotetia.



Vamos mostrar que toda homotetia é uma transformação de semelhança que associa retas paralelas. Além do mais, vamos verificar que toda transformação de semelhança é a composição de uma homotetia com uma isometria, ou seja, toda a responsabilidade pela mudança de escala é devida a uma homotetia (é óbvio que temos uma liberdade infinita de escolhas para esta homotetia, pois a mesma pode ser feita com centro em qualquer ponto escolhido).

Teorema 10 *Uma homotetia é uma transformação de semelhança que associa cada reta ou a si própria ou a uma reta paralela.*

Demonstração: Seja uma homotetia h de centro O e razão r. Primeiramente, é fácil ver que se uma determinada reta passa pelo ponto O, todos os seus pontos serão associados a pontos sobre a mesma reta, isto devido à própria definição de homotetia. Para verificarmos que h é uma transformação de semelhança, considere dois pontos A e B no plano. Se, por exemplo $A = O$ então $h(O) = O$ e $h(B) = B'$ é tal que $OB' = rOB$, por definição, o que já verificaria a propriedade de semelhança neste caso particular. Então, suponhamos que ambos os pontos A e B sejam diferentes de O. Ainda assim, temos dois casos a verificar, o caso em que eles são colineares com O e o caso em que A, O e B formam um triângulo. Se A, O e B são colineares, podemos ter que O está entre A e B, isto é, estão em semirretas opostas em relação a O, ou podemos ter que A e B estão sobre a mesma semirreta em relação a O. No primeiro caso, temos $AB = AO + OB$, então $A'B' = A'O + OB' = rAO + rOB = r(AO + OB) = rAB$. No segundo caso (sem perda de generalidade, suponha que A esteja entre O e B), temos que $OB = OA + AB$. Assim, $A'B' = OB' - OA' = rOB - rOA = r(OB - OA) = rAB$. Isto verifica a condição de semelhança para todos os casos em que A, B e O são colineares. Falta-nos o caso mais difícil: quando A, O e B não são colineares. Na figura seguinte, vamos fazer a ilustração para $r > 1$, mas o raciocínio é completamente análogo para o caso $r < 1$.



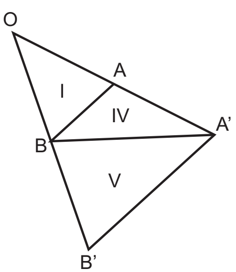
Como $OB' = rOB$, da figura acima deduzimos que a área do triângulo formado pelas regiões I e II é igual a r vezes a área do triângulo correspondente à região I, pois são dois triângulos de mesma altura. Também temos, devido ao fato que $OA' = rOA$, que a área do triângulo formado pelas regiões I, II e III é igual a r vezes a área do triângulo formado pelas regiões I e II. Assim

$$A(I) + A(II) = rA(I) \qquad \Rightarrow \qquad A(II) = (r-1)A(I) \tag{1}$$

e

$$\begin{aligned} & A(I) + A(II) + A(III) = r(A(I) + A(II)) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & rA(I) + A(III) = rA(I) + rA(II) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & A(III) = rA(II). \end{aligned} \tag{2}$$

Agora, considere a mesma região mas com outra configuração de triângulos, conforme a figura abaixo.



Nesta figura, temos a seguinte relação:

$$A(I) + A(IV) = rA(I) \qquad \Rightarrow \qquad A(IV) = (r-1)A(I). \tag{3}$$

Comparando as fórmulas (1) e (3), temos que $A(IV) = A(II)$. Como são dois triângulos de base $\overline{AB}$, concluímos que eles devem ter a mesma altura, o que nos leva à conclusão que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{A'B'}$. Por outro lado, a fórmula (2) nos diz que a área do triângulo correspondente à região III é r vezes a área do triângulo relativo à região II. Como estes triângulos possuem a mesma altura, a razão entre as medidas de suas bases deve ser igual a r, portanto $A'B' = rAB$. ∎

A própria demonstração deste teorema é um belíssimo exemplo do uso de áreas para resolução de problemas geométricos. Note que utilizamos várias vezes o princípio que foi discutido na seção anterior, que a razão entre as áreas de dois triângulos de mesma altura é igual à razão entre suas bases. Para também transitarmos no sentido contrário, isto é, para utilizarmos técnicas de semelhanças para a resolução de problemas de áreas, precisamos de mais alguns resultados que estão relacionados com semelhanças de triângulos. Mas antes vamos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 11 *Toda transformação de semelhança é a composição de uma homotetia e de uma isometria.*

Demonstração: Considere uma semelhança σ de razão r, sejam A, B e C três pontos não colineares e sejam ainda $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$. Podemos efetuar uma homotetia h de centro A e razão r. Então, tomando os pontos $A = h(A)$, $B'' = h(B)$ e $C'' = h(C)$, temos que os triângulos $\Delta AB''C''$ e $\Delta A'B'C'$ são congruentes pelo caso LLL. Logo existe uma isometria f, que associa o ponto A ao ponto A', o ponto B'' ao ponto B' e o ponto C'' ao ponto C'. Como todos os outros pontos do plano estão unicamente determinados pelas suas distâncias a três pontos não colineares fixos, temos que a semelhança σ é a composta $f \circ h$. ∎

As ferramentas mais importantes de semelhança em geometria estão relacionadas com semelhanças de triângulos. Dois triângulos são semelhantes se existir uma transformação de semelhança que mapeia um deles no outro. Denotaremos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ para indicarmos que os dois triângulos são semelhantes, ou seja, que existe uma semelhança $\sigma : \Pi \to \Pi$ tal que $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$. Os resultados a seguir mostram critérios para reconhecermos se dois triângulos são semelhantes.

Teorema 12 *(***Teorema Fundamental de Semelhança de Triângulos***) Considere um triângulo ΔABC e pontos $D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$. Então os triângulos ΔABC e ΔADE são semelhantes se, e somente se, $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$.*

Demonstração: Suponha que os triângulos sejam semelhantes. Portanto existe $r > 0$ tal que $AD = rAB$ e $AE = rAC$. Então os pontos D e E são imagem por uma homotetia de centro A e razão r, respectivamente, dos pontos B e C, o que nos leva à conclusão que $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$.

Suponha, por outro lado, que $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$. Então os triângulos ΔDEB e ΔDEC possuem a mesma área, pois a base de ambos é o segmento $\overline{DE}$ e a altura de ambos é a distância entre estas duas retas paralelas (faça a figura). Assim

$$\begin{aligned}\frac{A(\Delta ABE)}{A(\Delta ADE)} &= \frac{A(\Delta ADE) + A(\Delta DEB)}{A(\Delta ADE)} = \\ &= \frac{A(\Delta ADE) + A(\Delta DEC)}{A(\Delta ADE)} = \\ &= \frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ADE)}.\end{aligned}$$

Como a razão entre as áreas destes triângulos é igual à razão entre as bases correspondentes, temos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{r}.$$

Assim, uma homotetia de centro A e razão r associaria o ponto B ao ponto D e o ponto C ao ponto E. Portanto $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. ■

Teorema 13 *Considere os triângulos ΔABC e ΔDEF.*

(1) (Caso ângulo-ângulo, AA) Se $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e $\angle ABC \equiv \angle DEF$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

(2) (Caso lado-ângulo-lado, LAL) Se $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

(3) (Caso lado-lado-lado, LLL) Se $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demonstração: (1) Considere o ponto $X \in \overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AX} \equiv \overline{DE}$, e considere a semirreta $\overrightarrow{XZ}$ tal que Z esteja do mesmo lado que C e $\angle AXZ \equiv \angle DEF$ (a existência deste ponto e desta semirreta estão garantidos pelos axiomas da geometria elementar). Podemos facilmente mostrar que, nestas condições $\overleftrightarrow{XZ} // \overleftrightarrow{BC}$, portanto existe um ponto Y no cruzamento da semirreta $\overrightarrow{AC}$ com a semirreta $\overrightarrow{XZ}$. Pelo teorema fundamental $\Delta ABC \sim \Delta AXY$ e pelo caso ALA de congruência de triângulos, temos que $\Delta AXY \equiv \Delta DEF$, e portanto, se são congruentes, são semelhantes. Compondo estas duas semelhanças obtidas, podemos concluir que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

(2) Considere os pontos $X \in \overrightarrow{AB}$ e $Y \in \overrightarrow{AC}$ tais que $\overline{AX} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{AY} \equiv \overline{DF}$. Como

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = r,$$

temos que

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC} = r.$$

Portanto, a homotetia de centro A e razão r mapeia os pontos B e C, respectivamente, nos pontos X e Y, o que faz com que $\Delta ABC \sim \Delta AXY$. Por outro lado, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $\Delta AXY \equiv \Delta DEF$, e portanto, estes triângulos são semelhantes. Compondo as duas semelhanças, temos finalmente que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

(3) Considere a homotetia h de centro A e razão

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = r.$$

Denomine $X = h(B)$ e $Y = h(C)$. Portanto, temos que $\Delta ABC \sim \Delta AXY$. Por outro lado, temos que $AX = rAB = DE$, $AY = rAC = DF$ e $XY = rBC = EF$. Pelo caso LLL de congruência de triângulos, podemos concluir que $\Delta AXY \equiv \Delta DEF$. Novamente, compondo estas semelhanças, obtemos que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. ■

Este teorema nos diz que não precisamos verificar todos os detalhes de dois triângulos para sabermos se eles são congruentes. Basta verificarmos dois ângulos, ou a razão entre dois lados e o ângulo entre eles ou a razão entre os três lados respectivos. Isto se deve ao fato que um triângulo é uma figura bastante simples, e portanto possui uma certa rigidez, pois tem apenas um número limitado de combinações possíveis de medidas de lados e ângulos.

Exercício 2 *Mostre que, se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ e $\Delta DEF \sim \Delta XYZ$, então $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$.*

Exercício 3 *Considere dois triângulos semelhantes ΔABC e $\Delta A'B'C'$. Mostre que escolhidas as bases respectivas nos dois triângulos, por exemplo $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, as suas alturas respectivas também estão na mesma proporção, isto é, $\frac{H'}{H} = \frac{A'B'}{AB}$.*

O último grande resultado que nos auxiliará na resolução de problemas geométricos é a relação que existe entre áreas de figuras semelhantes. Basicamente, o que se tem é que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Proposição 14 *Seja $\sigma : \Pi \to \Pi$ uma semelhança de razão r e sejam Ω e Ω' duas regiões do plano Π, delimitadas por curvas fechadas e simples, tais que $\Omega' = \sigma(\Omega)$. Então $A(\Omega') = r^2 A(\Omega)$.*

Demonstração: Iniciemos com o caso mais simples: Quando a região Ω for um triângulo ΔABC, então $\Omega' = \Delta A'B'C'$, onde $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$. Escolhamos como base, por exemplo $\overline{AB}$, e seja H a medida da altura relativa a esta base. Então $A'B' = rAB$ e $H' = rH$, onde H' é a altura relativa à base $\overline{A'B'}$. Logo

$$A(\Delta A'B'C') = \frac{1}{2}A'B'.H' = \frac{1}{2}rAB.rH = r^2.\frac{1}{2}AB.H = r^2.A(\Delta ABC).$$

Se Ω for um polígono, é possível mostrar que existe uma triangulação para este polígono [4]. Portanto, podemos subdividir a região Ω em triângulos Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n. Sejam $\Delta_i' = \sigma(\Delta_i)$, para $i = 1, \ldots, n$. Assim, a região Ω' ficará subdividida em triângulos Δ_1', Δ_2', ..., Δ_n'. Portanto

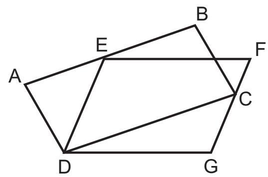
$$A(\Omega') = \sum_{i=1}^{n} A(\Delta_i') = \sum_{i=1}^{n} r^2 A(\Delta_i) = r^2 A(\Omega).$$

Para regiões delimitadas por curvas fechadas e simples em geral, o procedimento é estimar a área da região por um limite entre polígonos inscritos e circunscritos de número arbitrário de lados que aproximem a curva (isto é, tenham os vértices sobre a curva). Como para cada polígono a relação vale, pode-se mostrar que esta relação permanece no limite. ■

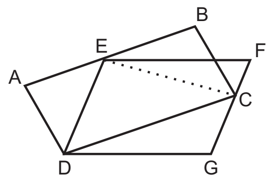
Análise de Problemas Selecionados

Nesta seção, vamos analisar alguns problemas de teor olímpico de níveis variados que envolvam os conceitos apresentados nas seções anteriores.

Problema 1 *Sejam $ABCD$ e $DEFG$ dois paralelogramos tais que $C \in \overline{FG}$ e $E \in \overline{AB}$, conforme a figura seguinte. Mostre que ambos os paralelogramos possuem a mesma área.*



Resolução: Este é um problema bem simples, cujo propósito básico é exercitar nossa capacidade de reconhecer a mesma figura em posições diferentes. O único artifício necessário para a resolução deste problema é a construção do segmento $\overline{EC}$, conforme nos mostra a figura abaixo.



Agora, só nos resta observar que o triângulo ΔCED pode ser visto de duas maneiras diferentes: primeiramente, se considerarmos como base o lado $\overline{CD}$ temos que este triângulo possui a mesma base e a mesma altura que o paralelogramo $ABCD$. Portanto

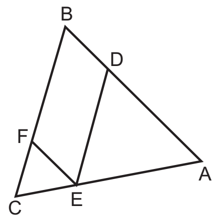
$$A(\Delta CED) = \frac{1}{2}A(ABCD).$$

Por outro lado, se considerarmos a base do triângulo como o lado $\overline{DE}$, verificamos que este mesmo triângulo possui a mesma base e mesma altura que o paralelogramo $DEFG$. Portanto

$$A(\Delta CED) = \frac{1}{2}A(DEFG).$$

Destas duas igualdades, decorre a igualdade entre as áreas dos paralelogramos dados.

Problema 2 *Considere em um triângulo ΔABC os pontos $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ e $F \in \overline{BC}$ tais que $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{AB}$, conforme nos ilustra a figura seguinte. Se a área do triângulo ΔADE é quatro vezes a área do triângulo ΔCEF calcule a razão entre as áreas dos triângulos ΔBFD e ΔABC.*



Resolução: Como $\overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{BC}$, temos, pelo teorema fundamental, que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. Também, $\overleftrightarrow{EF}//\overleftrightarrow{AB}$. Logo, pelo teorema fundamental, temos que $\Delta ABC \sim \Delta EFC$. Portanto, também concluímos que $\Delta ADE \sim \Delta EFC$. Como

$$\frac{A(\Delta ADE)}{A(\Delta CEF)} = 4,$$

podemos concluir, pelo último teorema da seção anterior, que a razão de semelhança entre estes dois triângulos é igual a 2, ou seja

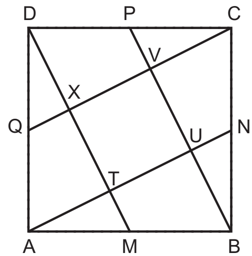
$$\frac{AD}{EF} = \frac{AE}{EC} = \frac{DE}{FC} = 2.$$

Como $EDBF$ é um paralelogramo, temos que $DE = BF$. Assim $\frac{BF}{FC} = 2$ ou seja, $BF = \frac{2}{3}BC$ e $FC = \frac{1}{3}BC$. Desta segunda igualdade, concluímos que a razão de semelhança entre ΔEFC e ΔABC é igual a $\frac{1}{3}$. Portanto, sua altura relativa ao lado $\overline{FC}$, que vamos denotar por h, será um terço da altura do triângulo ΔABC relativa ao lado $\overline{BC}$, que vamos denotar aqui por H. Novamente, como $EDBF$ é um paralelogramo, sua altura relativa ao lado $\overline{BF}$ também se iguala a h. Assim

$$\begin{aligned} A(\Delta BFD) &= \frac{1}{2}BF.h = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}BC.\frac{1}{3}H = \\ &= \frac{2}{9}(\frac{1}{2}BC.H) = \frac{2}{9}A(\Delta ABC). \end{aligned}$$

Portanto, a razão entre as áreas dos triângulos ΔBFD e ΔABC é igual a $\frac{2}{9}$.

Problema 3 *Na figura seguinte, $ABCD$ é um quadrado e M, N, P e Q são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Mostre que $TUVX$ é um quadrado e calcule a razão entre as áreas de $TUVX$ e $ABCD$.*



Resolução: Deixamos ao seu encargo a verificação de que $TUVX$ é, de fato, um quadrado. Isto requer, basicamente, uma análise dos ângulos envolvidos e algumas semelhanças e congruências de triângulos.

Para o cálculo da área de $TUVX$, podemos começar identificando as regiões que formam o quadrado original $ABCD$. Podemos ver que este quadrado é formado pela união (não disjunta) do quadrado $TUVX$ e dos triângulos ΔABN, ΔBCP, ΔCDQ e ΔDAM. Como dissemos, estas regiões não são duas a duas disjuntas, pois cada triângulo intersecta outros dois triângulos. Assim, a área do quadrado $ABCD$ não é simplesmente a soma das áreas do quadrado $TUVX$ com as áreas dos quatro triângulos, pois cada uma das intersecções, que correspondem aos triângulos ΔAMT, ΔBNU, ΔCPV e ΔDQX é contada duas vezes. Portanto, para obtermos a área correta de $ABCD$ temos que subtrair uma vez a área de cada um destes triângulos da interseção, ou seja

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(TUVX) + A(\Delta ABN) + A(\Delta BCP) \\ &\quad + A(\Delta CDQ) + A(\Delta DAM) - A(\Delta AMT) \\ &\quad - A(\Delta BNU) - A(\Delta CPV) - A(\Delta DQX). \end{aligned} \tag{4}$$

Notemos ainda que, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que

$$\Delta ABN \equiv \Delta BCP \equiv \Delta CDQ \equiv \Delta DAM,$$

e portanto possuem a mesma área. De fato, sendo l a medida do lado do quadrado $ABCD$, temos que

$$A(\Delta ABN) = \frac{1}{2}.\frac{l}{2}.l = \frac{1}{4}l^2 = \frac{1}{4}.A(ABCD).$$

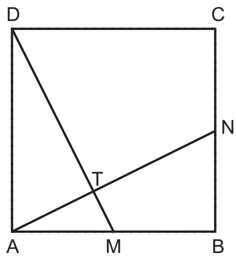
Este é o valor da área dos outros três triângulos congruentes a este. Portanto, da expressão (4) nós concluímos que

$$A(TUVX) = A(\Delta AMT) + A(\Delta BNU) + A(\Delta CPV) + A(\Delta DQX).$$

Deixamos ao seu encargo também a verificação de que os triângulos ΔAMT, ΔBNU, ΔCPV e ΔDQX são todos congruentes (de fato, você já precisou verificar isto para mostrar que $TUVX$ é um quadrado) e logo possuem a mesma área. Portanto

$$A(TUVX) = 4A(\Delta AMT).$$

Agora, só nos resta avaliar a área do triângulo ΔAMT. Faremos alguns detalhes apenas para ilustrarmos as técnicas, mas certamente você já deve ter chegado a estas conclusões anteriormente, por exemplo, para mostrar que os triângulos ΔAMT, ΔBNU, ΔCPV e ΔDQX são todos congruentes. Na figura abaixo, podemos ver que $\angle MAT = \angle NAB$ e que $\angle AMT = \angle DMA \equiv \angle ANB$. Portanto, pelo caso AA de semelhança de triângulos temos que $\Delta AMT \sim \Delta ANB$.



A razão de semelhança pode ser obtida comparando-se os lados $\overline{AM}$ com $\overline{AN}$. Claramente $AM = \frac{l}{2}$, enquanto AN pode ser obtido pelo teorema de Pitágoras:

$$AN = \sqrt{(AB)^2 + (NB)^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{5}}{2}.$$

Assim

$$\frac{AM}{AN} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

A razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança,

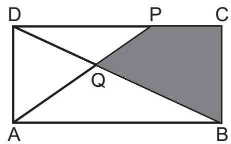
$$\frac{A(\Delta AMT)}{A(\Delta ANB)} = \frac{1}{5}.$$

Como $A(\Delta ANB) = \frac{l^2}{4}$, temos que $A(\Delta AMT) = \frac{l^2}{20}$. Finalmente, chegamos à conclusão que

$$A(TUVX) = 4.A(\Delta AMT) = 4.\frac{l^2}{20} = \frac{l^2}{5}.$$

Portanto, a razão entre a área do quadrado $TUVX$ e a área do quadrado $ABCD$ é igual a $\frac{1}{5}$.

Problema 4 *(***Olimpíada de Maio 2011***) Na figura abaixo, temos o retângulo $ABCD$ com $BC = 5$ unidades de comprimento e as áreas dos triângulos ΔQAB e ΔQPD são, respectivamente, 27 e 12 unidades de área. Calcule a área do quadrilátero $BCPQ$.*



Resolução: O problema consiste em encontrar a área do quadrilátero $BCPQ$, que claramente pode ser obtida efetuando-se a subtração entre a área do triângulo ΔBCD e a área do triângulo ΔQPD. Sabemos somente a altura do triângulo ΔBCD, que é igual a 5, mas não sabemos as bases de qualquer um dos dois triângulos nem a altura do triângulo ΔQPD. Devemos primeiramente notar que, pelo fato de os lados $\overline{DC}$ e $\overline{AB}$ estarem sobre retas paralelas, temos que

$$\angle QDP = \angle BDC \equiv \angle DBA = \angle QBA$$

e também

$$\angle QPD = \angle APD \equiv \angle PAB = \angle QAB.$$

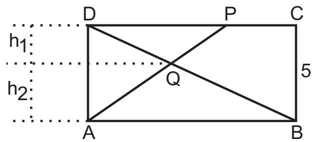
Portanto, pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos que $\Delta QPD \sim \Delta QAB$. Esta semelhança irá nos auxiliar no cálculo das bases e da altura desconhecidas. O enunciado nos fornece a informação que

$$\frac{A(\Delta QAB)}{A(\Delta QPD)} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}.$$

Esta razão entre as áreas dos dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Portanto a razão de semelhança é igual a $\frac{3}{2}$, ou seja

$$\frac{AB}{PD} = \frac{3}{2}. \tag{5}$$

Sabemos que as alturas dos dois triângulos semelhantes também obedecem à mesma razão de semelhança. Denotamos por h_1 a altura do triângulo ΔQPD e por h_2 a altura do triângulo ΔQAB, conforme ilustrado na figura seguinte.



Temos duas informações importantes a respeito destas duas alturas:

$$\begin{aligned} \frac{h_2}{h_1} &= \frac{3}{2} \qquad (6) \\ h_1 + h_2 &= 5. \qquad (7) \end{aligned}$$

Da igualdade (6), temos que $h_2 = \frac{3}{2}.h_1$, e substituindo em (7), obtemos

$$h_1 + \frac{3}{2}h_1 = \frac{5}{2}h_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad h_1 = 2.$$

Este procedimento de comparação entre alturas de triângulos semelhantes cujas alturas resultam em uma soma conhecida é muito útil na resolução de problemas (veja alguns dos problemas propostos no final deste artigo).

Bem, mas ainda não é tudo. Precisamos conhecer as bases. De novo, a informação no enunciado, que a área do triângulo ΔQPD é igual a 12, nos ajudará nesta tarefa. Vejamos:

$$A(\Delta QPD) = \frac{1}{2}PD.h_1 = \frac{1}{2}PD.2 = 12 \quad \Rightarrow \quad PD = 12.$$

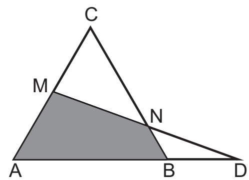
Finalmente, da igualdade (5), concluímos que $AB = 18$. Portanto

$$A(BCPQ) = A(\Delta BCD) - A(\Delta QPD) = \frac{1}{2}18.5 - \frac{1}{2}12.2 = 33.$$

A intenção destes problemas analisados foi explicitar alguns procedimentos e técnicas comuns na resolução de problemas envolvendo o cálculo de áreas e o trato com figuras semelhantes (mais especificamente, triângulos semelhantes). Os problemas propostos a seguir, alguns realmente retirados de olimpíadas, podem ser resolvidos utilizando as mesmas técnicas. E, é claro, como não poderia deixar de ser em problemas olímpicos, com uma boa dose de imaginação e criatividade.

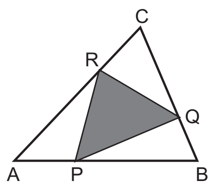
Problemas Propostos

1) Na figura abaixo, ΔABC é um triângulo equilátero com lado igual a 20, o ponto D está sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e $BD = 12$, e M é o ponto médio de $\overline{AC}$. Calcule a área do quadrilátero $ABNM$. (**Dica:** Utilize o mesmo tipo de procedimento de comparação de alturas de triângulos semelhantes que foi utilizado na análise do problema 4)



2) Na figura seguinte, temos que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA} = \frac{1}{2}.$$



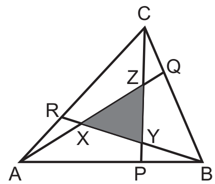
a) Calcule a razão entre a área do triângulo ΔPQR e a área do triângulo ΔABC.

b) Calcule a razão entre a área do triângulo ΔPQR e a área do triângulo cujos lados são congruentes às medianas do triângulo ΔABC.

(**Dica:** Devemos nos lembrar, para resolvermos este problema, que o baricentro, que é o encontro das três medianas, divide cada mediana na razão $\frac{2}{1}$)

3) Na figura abaixo, temos que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA} = \frac{2}{1}.$$



a) Calcule a razão entre a área do triângulo ΔXYZ e a área do triângulo ΔABC.

b) Faça o mesmo cálculo para o caso

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA} = \frac{n}{1}.$$

(**Dica:** Neste problema, você terá que utilizar o procedimento de decomposição da área do triângulo maior nas regiões que o constituem, não se esquecendo de subtrair as regiões de intersecção que são contadas mais de uma vez, como no problema 3. E também utilize a técnica de comparação de alturas em triângulos semelhantes, como no problema 4)

Referências

[1]Batista, E. "Áreas, Volumes e Equidecomponibilidade", notas de minicurso, 2ª Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador, BA (2004). Disponível em: http://www.mtm.ufsc.br/∼ ebatista/Escritos _Didaticos_arquivos/Escritos_Didaticos.htm

[2]Batista, E., Carvalho, N.T.B., Pinho, J.L.R.: "Geometria I", 2ª Ed. EAD UFSC (2010).

[3]Lima, E.L.: "Medida e Forma em Geometria", Coleção do Professor de Matemática, Vol 3, 4ª Edição, SBM (2009).

[4]Lima, E.L.: "Isometrias", Coleção do Professor de Matemática, Vol 12, SBM (1996).

[5]Lima, E.L.: "Matemática e Ensino", Coleção do Professor de Matemática, Vol 16, 3ª Edição, SBM (2001).

Curiosidades

Data histórica: 20/02 de 2002

Quarta-feira, dia 20 de fevereiro de 2002, foi uma data histórica. Durante um minuto, houve uma conjunção de números que somente ocorre duas vezes por milênio.

Essa conjugação ocorreu exatamente às 20 horas e 02 minutos de 20 de fevereiro do ano 2002, ou seja, 20:02 20/02 2002.

É uma simetria que na matemática é chamada de capicua (algarismos que dão o mesmo número quando lidos da esquerda para a direita, ou vice-versa). A raridade deve-se ao fato de que os três conjuntos de quatro algarismos são iguais (2002) e simétricos em si (20:02, 20/02 e 2002).

A última ocasião em que isso ocorreu foi às 11h11 de 11 de novembro do ano 1111, formando a data 11h11 $11/11/1111$. A próxima vez será somente às 21h12 de 21 de dezembro de 2112 (21h12 21/12/2112). Provavelmente não estaremos aqui para presenciar.

Depois, nunca mais haverá outra capicua. Em 30 de março de 3003 não ocorrerá essa coincidência matemática, já que não existe a hora 30.

Quadrados perfeitos e suas raízes

Os pares de quadrados perfeitos: 144 e 441, 169 e 961, 14884 e 48841 e suas respectivas raízes: 12 e 21, 13 e 31, 122 e 221, são formados pelos mesmos algarismos, porém escritos em ordem inversa.

O matemático Thébault investigou os pares que têm esta curiosa propriedade. Encontrou, por exemplo, a seguinte dupla: $1113^2 = 1.238.769$ e $3111^2 = 9.678.321$.

Mágica com o calendário

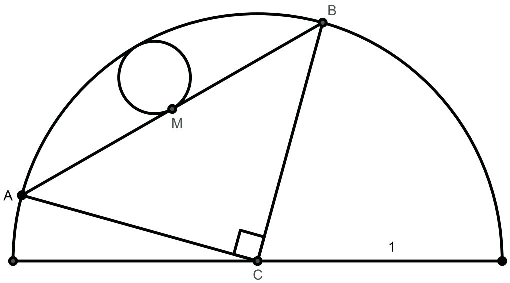
Peça a uma pessoa que, em um mês qualquer do calendário, ela delimite um quadrado 3 por 3, contendo 9 dias quaisquer.

Depois, peça que ela informe qual é a menor data do quadrado, e diga que com apenas essa data você irá descobrir a soma de todas as datas escolhidas. Para isso, você deve somar a menor data com 8 e multiplicar o resultado por 9.

Por exemplo se o quadrado contém as datas $10, 11, 12, 17, 18, 19, 24, 25$ e 26, então $(10 + 8) \times 9 = 18 \times 9 = 162$. Que é a soma de: $10 + 11 + 12 + 17 + 18 + 19 + 24 + 25 + 26 = 162$.

Soluções dos Problemas Propostos

1. Com base na figura abaixo, encontre o comprimeto da circunferência que tangencia o segmento $\overline{AB}$ em seu ponto médio M e tangencia a semicircunferência da raio 1.



(Proposto por Allysson Gomes Dutra, aluno do curso de Pós-Graduação em Matemática da UFSC, na Revista da Olimpíada Regional de Matemática, nº8)

SOLUÇÃO : (apresentada por Felipe Augusto Tasca, aluno de graduação do curso de Matemática da UFSC)

Note que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ têm comprimento 1, pois são raios da semicircunferência.

O triângulo retângulo $\triangle ABC$ tem catetos de comprimento 1 e assim, pelo teorema de pitágoras, tem hipotenusa de comprimento $\sqrt{2}$.

Como M é ponto médio de $\overline{AB}$, temos que $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Considere o segmento $\overline{MC}$. Note que $\overline{MC}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e forma dois triângulos semelhantes $\triangle AMC$ e $\triangle CMB$.

Assim, $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}}$, logo $\overline{AM} \cdot \overline{MB} = \overline{CM} \cdot \overline{CM}$, então $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = (\overline{CM})^2$.

Portanto $(\overline{CM})^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, logo $\overline{CM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Note que o ponto C, o centro da circunferência e o ponto de tangência desta circunferência com a semicircunferência são colineares. Por outro lado, como $\overline{CM} \perp \overline{AB}$ (M é ponto médio da corda AB) e como o segmento de extremidades M e o centro da circunferência é perpendicular a AB, então os pontos C, M e o centro da circunferência são colineares. Segue-se que os quatro pontos C, M, centro da circunferência e o ponto de tangência desta com a semicircunferência são colineares.

Desta forma, o diâmetro da circunferência é o raio da semicircunferência menos $\overline{MC}$, ou seja, $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, o comprimento da circunferência é $\pi\cdot$ o diâmetro $= \pi(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão um exemplar da mesma (Veja "Informações Gerais").

1. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)*

   Um grupo de 23 pessoas , cada uma com um peso inteiro, decide fazer um jogo de futebol, tendo uma pessoa para árbitro e 11 para cada time. Por entendimento da maioria, os dois times devem ter pesos iguais. Se qualquer uma das 23 pessoas pode ser escolhida para árbitro, prove que as 23 pessoas devem ter o mesmo peso.

2. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)*

a) Desenhe dois círculos disjuntos em um papel. Mostre que é possível traçar uma reta que divide cada círculo em partes iguais.

b) Agora, no lugar de dois círculos, provar a afirmação acima para dois retângulos disjuntos, dois polígonos convexos disjuntos, dois triângulos equiláteros disjuntos e dois feijões (planos) disjuntos e não convexos.

3. *(Proposto pelo Professor José Luiz Rosas Pinho, do Departamento de Matemática da UFSC)*

   Usando somente argumentos geométricos, dizer qual o triângulo retângulo, cuja soma dos catetos é conhecida, que tem hipotenusa mínima.

Veja também os problemas propostos no artigo "Áreas e Semelhanças", na página 56.

Premiados da ORM em Outras Olimpíadas

Premiados da ORM em outras olimpíadas

Ana Carolina de Medeiros da Silva - Joinville
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Anderson Negreli - São Bento do Sul
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Bruno da Silveira Dias - Florianópolis
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Bruno Leonardo Schneider - São José
Medalha de Bronze na I Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1998 (Nível 1)
Medalha de Prata na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)
Menção Honrosa na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Menção Honrosa na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)
Medalha de Prata na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2003 (Nível 3)
Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Bruno Mota - Joinville
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Bruno Nunes - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Carlos Bruno Medeiros da Costa Pereira Neto - Joinville
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Caroline da Silveira - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Douglas Ohf - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Eduardo Adelano Agostini Pasold - Timbó
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Eduardo José Mendes - Biguaçu
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Felipe Paupitz Schilichting - Florianópolis
Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)
Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)
Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2001 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Fernanda Momm Antunes - Joinville
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Gabriel Augusto Moreira - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Gislaine Hoffmann - Antônio Carlos
Medalha de Prata na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Medalha de Prata na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2010 (Nível 3)

Giuliano Boava - Criciúma

Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 3)
Menção Honrosa na III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2000
Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2001
Menção Honrosa na IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2001
Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2002
Menção Honrosa na V Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2002
Medalha de Bronze na XXV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2003
Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2004

Guilherme Rohden Echelmeier - Itajaí

Medalha de Prata na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)
Medalha de Ouro na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)
Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)
Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 2)
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)

Gustavo Bernardo de Oliveira - Joinville

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Gustavo Lisbôa Empinotti - Florianópolis
Medalha de Prata na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)
Medalha de Ouro na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Medalha de Prata na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na 13ª Olimpíada de Maio em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XIX Olimpíada de Matemática do Cone Sul em 2008 - Temuco, Chile
Medalha de Prata na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na LI Olimpíada Internacional de Matemática em 2010 - Astana, Cazaquistão
Medalha de Bronze na III Romanian Master in Mathematics em 2010
Medalha de Bronze na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2010
Medalha de Prata na 25ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2010 - Assunção, Paraguai
Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 3)
Menção Honrosa na IV Romanian Master in Mathematics em 2011
Medalha de Prata na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2011
Medalha de Bronze na LII Olimpíada Internacional de Matemática em 2011 - Amsterdã, Holanda

Hanna Kurihara e Silva - Florianópolis
Medalha de Bronze na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)

Medalha de Bronze na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)
Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Helena Carolina Rengel Koch - Jaraguá do Sul
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Ivani Ivanova Ivanova - Blumenau
Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Janine Garcia - São Francisco do Sul
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na V Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

João Marcos Carnieletto Nicolodi - Florianópolis
Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 1)
Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 1)

Júlia Bertelli - Joinville
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Medalha de Prata na 17ª Olimpíada de Maio em 2011 (Nível 1)

Julia Hech Deters - Itapiranga
Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Karina Livramento dos Santos - Navegantes
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Laiane Freitas Suzart - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Leandro Augusto Lichtenfelz - Blumenau
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2008
Medalha de Prata (Second Prize) na XVI Internacional Mathematical Competition for University Students em 2009 - Budapeste, Hungria

Leandro Jun Kimura - Joinville
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Leandro Roza Livramento - Florianópolis
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Leonardo Gonçalves Fischer - Fraiburgo
Medalha de Bronze na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)
Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Leonard Henrrik Wodtke - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Letícia Perini - Timbó
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Lucas Bruno Barbosa Sandoval - Florianópolis
Medalha de Ouro na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 2)
Medalha de Bronze na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)

Lucas Lolli Savi - Florianópolis
Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)
Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 2)
Medalha de Bronze na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2002 (Nível 3)

Luiz Fernando Bossa - Brusque
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Mikhail Zimmer Heidrich - Lages
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Natan Cardozo Leal - São Bento do Sul
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)
Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 3)
Medalha de Prata na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (Nível 3)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Nicole Braga de Medeiros Nicolak - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Renan Henrique Finder - Joinville
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 1)
Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)
Medalha de Prata na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 2)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XVIII Olimpíada de Matemática do Cone sul em 2007 - Uruguai
Medalha de Prata na 23ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2008 - Brasil
Medalha de Prata na 49ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2008 - Madri, Espanha
Medalha de Prata na 50ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2009 - Bremen, Alemanha
Medalha de Prata na 24ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2009 - Santiago de Querétaro, México

Medalha de Ouro na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)
Medalha de Ouro na Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2010
Medalha de Ouro (First Prize) na XVIII International Mathematics Competition for University Students em 2011

Rogério Hannemann Júnior - Joinville
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Ruan Victor Soares da Silva - Joinville
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Shadi Bavar - Blumenau
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Tiago Madeira - Itajaí
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 1)
Medalha de Bronze na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada de Maio em 2003 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 2)

Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada de Maio em 2005 (Nível 2)

Vitor Costa Fabris - Criciúma
Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)
Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Informações Gerais

Envio de Problemas e Soluções

As seções de problemas propostos e soluções são seções dinâmicas. Contribua propondo problemas ou enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém, podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o LaTeX, então o artigo deverá ser preferencialmente submetido neste formato.

Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) devem cadastrar suas escolas. O cadastramento para a OBM e ORM é feito somente no site da OBM (www.obm.org.br). Escolas já cadastradas em anos anteriores deverão confirmar a cada novo ano a sua inscrição. Para o cadastramento será necessário o código do Inep da escola. Existe um período para cadastramento ou confirmação. Consulte o site da OBM. No site não aparece a opção para cadastramento na ORM. As escolas cadastradas para a OBM estarão automaticamente cadastradas para a ORM. No cadastramento deve ser indicado o nome do coordenador regional (José Luiz Rosas Pinho ou Licio Hernanes Bezerra).

Alunos interessados em participar das olimpíadas devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberem a revista podem solicitar o envio da mesma.

Além disso, a revista é enviada às universidades federais brasileiras (um exemplar por IES), por intermédio da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

– Nosso site: www.orm.mtm.ufsc.br
– Telefone/Fax: (48) 37216809 (PET - Matemática)
– e-mail: orm@pet.mtm.ufsc.br
– Endereço: PET - Matemática
Departamento de Matemática - CFM
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Universitário - Trindade
88040-900 – Florianópolis/SC