Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina

Nº8, 2011

OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA

SANTA CATARINA - UFSC

Apoio:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina/ Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n], 2004 -
v.: 8 (2011) 23 cm

Anual
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas, exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.

Comissão da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:

Coordenador: José Luiz Rosas Pinho.

Professores: Carmem Suzane Comitre Gimenez, Danilo Royer, Eliezer Batista, Licio Hernanes Bezerra e Nereu Estanislau Burin.

Bolsistas da Olimpíada: Amanda Magalhães, Ana Cristina Medaglia Dyonisio, Andrei Moriggi, Bianca de Souza, Cláudia Dal Pont Rocha, Fernanda Cristina da Silva, Michely de Melo Pellizzaro, Rafaela Goulart de Andrade e Virgínia Angélica Reck.

Bolsistas do PET - Matemática: Ado Raimundo Dalla Costa, Camila Fabre Sehnem, Fernando Correia, Fernando Leandro, Gabriel Samuel de Andrade, Gabriela Silmaia da Silva Yoneda, Helena Martins, Jeremias Stein Rodriguês, Leonardo Neves Meirelles, Luis Augusto Uliana, Maria Cláudia Schmitt Araujo, Mike Christian Nascimento de Lima, Renan Diogo Manfron, Ruana Maíra Schneider, Sara Regina da Rosa Pinter, Soyara Carolina Biazotto, Thuysa Schlichting de Souza e Tiara Martini.

Comitê Editorial da Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina:

Carmem Suzane Comitre Gimenez
Danilo Royer
Eliezer Batista
Fernanda Cristina da Silva
Gabriela Silmaia da Silva Yoneda
José Luiz Rosas Pinho
Licio Hernanes Bezerra
Nereu Estanislau Burin
Rafaela Goulart de Andrade
Ruana Maíra Schneider

Editoração Eletrônica:

Alda Dayana Mattos
Fernanda Cristina da Silva
Rafaela Goulart de Andrade
Rodrigo Maciel Rosa

Tiragem:
1500 exemplares

Arte da Capa:
Renata Leandro Becker
Rafaela Goulart de Andrade

Postagem:
Segundo semestre de 2010.

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina Nº8, 2011

ISSN 1679-7612

Sumário

Apresentação

Os projetos *Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina* (ORM) e *Revista da ORM* são totalmente idealizados, organizados e executados por bolsistas de extensão, com bolsas do programa PROBOLSA 2010, do Departamento de Projetos de Extensão (DPE) da *Pró-Reitoria de Pesquisa e Extensão* (PRPE), por bolsistas do *Programa de Educação Tutorial* (PET/SESu/MEC) Matemática da UFSC, com o apoio da *Pró-Reitoria de Ensino e Graduação*, por alunos com bolsas de permanência, da *Pró-Reitoria de Assuntos Estudantis* (PRAE), por alunos voluntários do *Curso de Matemática*, e com a participação de seis professores do *Departamento de Matemática* da UFSC. Estes projetos foram apresentados na 9ª Semana de Ensino, Pesquisa e Extensão (SEPEX) da UFSC realizada em outubro de 2010. A *Revista* foi totalmente financiada pelo *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq), através de um projeto nacional de olimpíadas regionais. Cabe ressaltar que tanto a ORM como a *Revista* são projetos de extensão do PET Matemática e do *Departamento de Matemática* da UFSC, sendo considerados Projetos Institucionais Permanentes desta Universidade, recebendo ainda um importante apoio do *Centro de Ciências Físicas e Matemáticas* (CFM) ao qual o *Departamento de Matemática* está vinculado.

Neste número discutimos as provas e as soluções da XII ORM (2009), juntamente com alguns dados, listas de premiados e escolas participantes daquele ano. Seis artigos são aqui apresentados, um deles contando um pouco da história da ORM, e os outros com conteúdo matemático de nível intermediário. Na seção *Problemas Propostos* são encontrados problemas de desafio, acessíveis aos estudantes das escolas, em especial aqueles do ensino médio.

A *Revista* contém ainda uma seção com uma lista de todos os alunos participantes das ORM e que foram premiados em outras olimpíadas de matemática, tais como as nacionais *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas* (OBMEP) e *Olimpíada Brasileira de Matemática* (OBM), e as internacionais *Olimpíada Iberoamericana de Matemática*, a *Olimpíada de Matemática do Cone Sul*, a *Olimpíada de Mayo*, a *International Mathematical Olympiad* (IMO), a *Romanian Master in Mathematics*, a *Asian Pacific Mathematics Olympiad* (APMO) e a universitária *International Mathematical Competition for Uniiversity Students*. Salientamos que há alunos de Santa Catarina premiados em cada uma dessas olimpíadas e destacamos, em especial, os alunos que integraram as equipes brasileiras na IMO, Renan Henrique Finder (medalhas de prata na 49ª e na 50ª IMO), e Gustavo Lisbôa Empinotti (medalha de bronze na 51ª IMO).

Sugerimos que os leitores consultem nossa página (ver na contra-capa) para acessar todos os números anteriores da *Revista*, os treinamentos realizados com os estudantes das escolas, com a nova opção neste ano de video-treinamentos (uma parceria com o *Laboratório de Ambiente de Ensino à Distância* - LAED - do *Departamento de Matemática* da UFSC), e outras informações sobre a ORM.

Esta *Revista* estará sendo distribuída gratuitamente, no decorrer de 2011, a mais de 800 escolas de todo o estado de Santa Catarina, aos alunos premiados em 2010 aos e professores de suas escolas, aos alunos calouros de 2011 do Curso de Matemática da UFSC e a várias universidades do país. As escolas interessadas em receber esta *Revista* devem nos escrever solicitando o envio da mesma.

Encorajamos ainda todos os leitores e interessados a nos enviar artigos, problemas e soluções de problemas propostos, bem como críticas e sugestões.

Florianópolis, 20 de novembro de 2010.

José Luiz Rosas Pinho

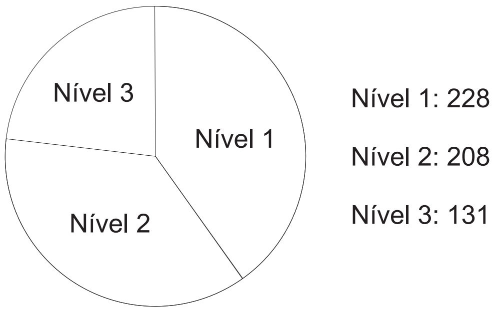
Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

XII ORM (2009)

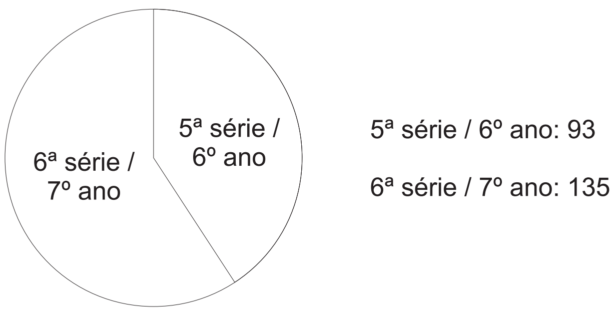
ORM em Números

Na primeira fase da XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina participaram 7.935 alunos de ensino fundamental e médio de 238 escolas de 85 municípios do estado. Deste total, foram classificados 1.012 alunos para a 2ª fase, dos quais 567 compareceram para realizar a prova, cujas distribuições por níveis e séries são mostradas abaixo.

Total de alunos participantes da 2ª fase, separados por níveis



Nível 1

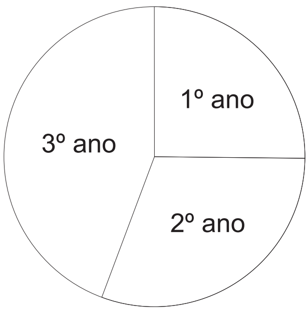


Nível 2

7ª série / 8º ano: 85

8ª série / 9º ano: 123

Nível 3



1º ano: 33

2º ano: 40

3º ano: 58

Provas e Gabaritos

Prova Nível 1

1. Amanda, Bianca, Cláudia, Carmem, Danilo, Eliezer, Licio, Michely, Nereu e Virgínia são dez amigos que possuem pelo menos um gato em suas casas. Nenhum deles tem mais do que nove gatos. Conhecem-se as somas dos gatos de algumas dessas pessoas, segundo as linhas e as colunas da tabela a seguir:

	Danilo	Bianca	Cláudia	10
Nereu	Michely	Virgínia	Carmem	30
Eliezer	Amanda	Licio		21
13	13	24	11	

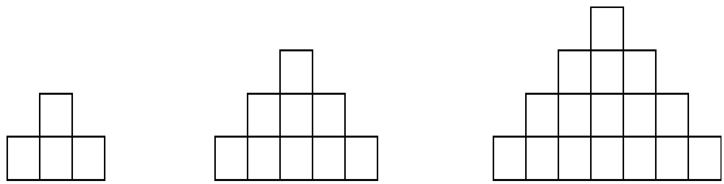
   As quantidades de gatos das pessoas em cada linha ou em cada coluna são diferentes.
   Por exemplo, na primeira linha, Danilo, Bianca e Cláudia têm quantidades diferentes de gatos, cuja soma é igual a 10; e na terceira coluna, Bianca, Virginía e Licio possuem quantidades diferentes de gatos, cuja soma é igual a 24. Quantos gatos tem cada um deles?

2. O traço de um número natural é a soma de seus algarismos. Por exemplo, o traço de 51 é 6 pois $5 + 1 = 6$

   a) Quais são os números de dois algarismos cujo traço é o quadrado de um número inteiro?
   b) Quais são todos os números, cujos algarismos são todos diferentes de zero, tais que seu traço é 5?

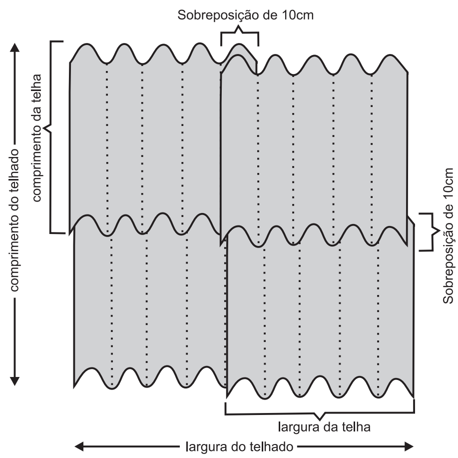
3. Encontre todos os números primos de dois algarismos cujo quadrado, diminuído de 1, é divisível por 45.

4. Quadrados de lado 1 são empilhados formando sucessivamente figuras com 3 quadrados na base, 5 quadrados na base, 7 quadrados na base, e assim por diante.



Calcule o perímetro da figura que tem 2009 quadrados em sua base. (Observação: o perímetro de uma figura é o comprimento da linha que delimita a figura. Por exemplo, a primeira figura acima tem perímetro 10 e a segunda tem perímetro 16).

5. O Sr. Tejado pretende construir um telhado retangular de 3m de comprimento por 10m de largura. Uma loja vende três tipos de telhas , T_1, T_2 e T_3, todas com 1 metro de largura e comprimentos de 1 metro, 60 centímetros e 40 centímetros, respectivamente. Os três tipos de telhas podem ser usados para cobrir o telhado (não é necessário usar apenas um tipo de telha). No entanto, quaisquer duas telhas vizinhas devem ser sobrepostas por 10cm (conforme exemplo com um telhado de 4 telhas). Além disso, qualquer fileira de telhas ao longo da largura deve ser formada por telhas de mesmo tipo, sendo permitida a variação de tipo ao longo do comprimento.



a) Dê um exemplo de um modo de cobrir o telhado (quantas telhas de cada tipo) sem que sobrem ou faltem telhas.
b) De quantas maneiras (quantas telhas de cada tipo) é possível cobrir o telhado (sem sobrar nem faltar telhas)?

Prova Nível 2

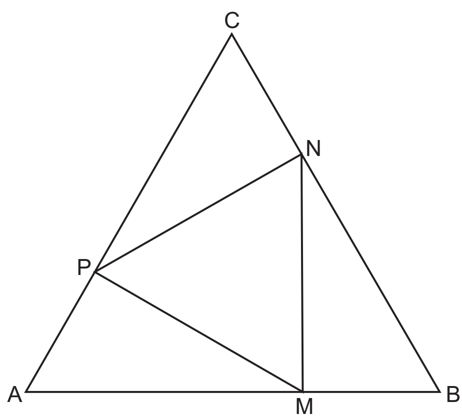
1. Amanda, Bianca, Cláudia, Carmem, Danilo, Eliezer, Licio, Michely, Nereu e Virgínia são dez amigos que possuem pelo menos um gato em suas casas. Bianca, Michely e Eliezer têm o mesmo número de gatos e Carmem e Licio também possuem o mesmo número de gatos. Além disso, Virgínia não tem o mesmo número de gatos que Bianca. Conhecem-se as somas dos gatos de algumas dessas pessoas, segundo as linhas e colunas da tabela a seguir:

	Danilo	Bianca	Cláudia	10
Nereu	Michely	Virgínia	Carmem	30
Eliezer	Amanda	Licio		21
13	13	24	11	

   Por exemplo, na quarta coluna, a soma dos números de gatos de Cláudia e Carmem é 11, e na terceira linha, a soma dos números de gatos de Eliezer, Amanda e Licio é 21. Quantos gatos tem cada um deles?

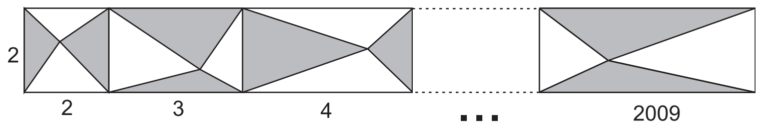
2. Escreva 2009 como soma dos quadrados de dois números inteiros positivos.

3. Na figura, Δ**ABC** é um triângulo equilátero de lado igual a l e Δ**MNP** é um triângulo inscrito em Δ**ABC** tal que **MN** é perpendicular a **AB, NP** é perpendicular a **BC** e **PM** é perpendicular a **AC**.

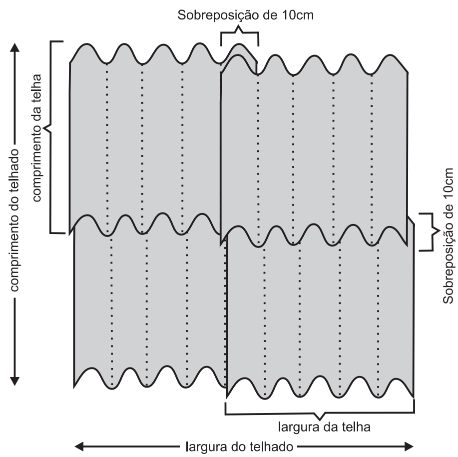


Explique porque Δ**MNP** também é equilátero e calcule a razão entre as áreas dos triângulos Δ**ABC** e Δ**MNP**.

4. Na figura abaixo estão 2008 retângulos colados, todos de altura 2cm, e de bases 2cm, 3cm, 4cm, . . ., 2009cm (são mostrados apenas os três primeiros e o último retângulo). Em cada um desses retângulos há um ponto em seu interior que forma, com os vértices do retângulo, dois triângulos que estão sombreados. Calcule a soma das áreas de todos esses triângulos sombreados.



5. O Sr. Tejado pretende construir um telhado retangular de 3m de comprimento por 10m de largura. Uma loja vende três tipos de telhas , T_1, T_2 e T_3, todas com 1 metro de largura e comprimentos de 1 metro, 60 centímetros e 40 centímetros, respectivamente. Os três tipos de telhas podem ser usados para cobrir o telhado (não é necessário usar apenas um tipo de telha), no entanto, quaisquer duas telhas vizinhas devem ser sobrepostas por 10cm (conforme exemplo com um telhado de 4 telhas). Além disso, qualquer fileira de telhas ao longo da largura deve ser formada por telhas de mesmo tipo, sendo permitida a variação de tipo ao longo do comprimento.



a) Dê um exemplo de como cobrir o telhado (quantas telhas de cada tipo) sem que sobrem ou faltem telhas.
b) Com quantas combinações de telhas é possível cobrir o telhado (sem sobrar nem faltar telhas)?
c) Para fixar as telhas são usadas ripas de madeira, ao longo da largura do telhado, da seguinte forma: 5 ripas para cada telha T_1, 3 ripas para cada telha T_2 e 2 ripas para cada telha T_3. Qual combinação de telhas deve ser usada para que seja gasto a menor quantidade possível de metros de ripas para fixar o mesmo telhado? Sabe-se que uma ripa pode suportar mais de uma telha, e que o espaçamento entre as ripas deve ser pelo menos 15cm. Quantos metros de ripas são necessários neste caso?

Prova Nível 3

1. Chamaremos um número inteiro y maior do que 1 de *harmônico* se existir um número inteiro positivo x de n algarismos tal que:

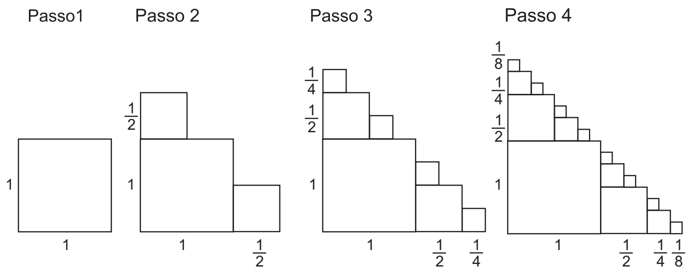
$$\frac{y}{y-1} = \frac{x}{10^n - x}$$

Neste caso diremos que x é um conjugado harmônico de y.

a) Encontre o menor número harmônico.
b) Prove que todo número harmônico, exceto o menor deles, termina em 13 ou em 63.
c) Mostre que não é possível encontrar um número harmônico cujo conjugado harmônico seja também harmônico.

2. Escreva 2009 como a soma de três quadrados perfeitos positivos.

3. Considere a figura plana construída com quadrados empilhados de forma recursiva da seguinte maneira:



Após uma infinidade de passos obtemos uma figura final com infinitos quadrados (suponha que isso fosse possível de ser feito).

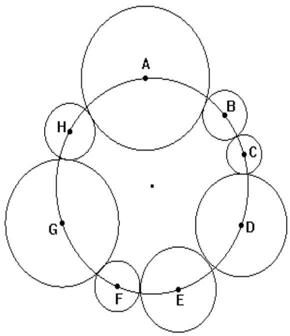
a) Calcule o perímetro da figura final.
b) Calcule a área da figura final.

4. Encontre todos os pares (x, y), com x e y inteiros, para os quais a expressão

$$(x^2 + 3y^2) \cdot 2^{(1-x^2-y^2)}$$

atinge seu valor máximo. Que valor é esse?

5. Oito pontos A, B, C, D, E, F, G e H são distribuídos aleatoriamente em uma circunferência de raio R fixado. Se for possível traçar oito circunferências, com centros em cada um desses pontos e com raios menores do que a distância de cada um deles aos dois pontos vizinhos, tais que elas sejam tangentes consecutivamente (conforme figura), diremos que essa distribuição de pontos apresenta solução para o problema de tangência das circunferências.



a) Mostre que, se os pontos forem distribuídos formando um octógono com quatro pares de lados consecutivos de mesmo comprimento (por exemplo, se AB = BC, CD = DE, EF = FG e GH = HA), então essa distribuição de pontos apresenta uma infinidade de soluções para o problema de tangência.

b) Dê um exemplo de uma distribuição de pontos que não apresenta solução para o problema de tangência.

c) Seja S a soma dos comprimentos das oito circunferências quando uma distribuição de pontos apresenta solução para o problema de tangência. Mostre que S não varia, qualquer que seja a solução para a distribuição de pontos do item (a).

d) Calcule S , em função de R, no caso em que os oito pontos estão distribuídos formando um octógono regular.

Gabarito Nível 1

1. Como as quantidades das pessoas em cada linha ou em cada coluna são diferentes, as somas máximas possíveis nas linhas ou colunas são:

$$\begin{gathered}2 \text{ pessoas: } 9+8=17\\ 3 \text{ pessoas: } 9+8+7=24\\ 4 \text{ pessoas: } 9+8+7+6=30\end{gathered}$$

   Essas somas máximas são atingindas na segunda linha e na terceira coluna. Começando pela terceira coluna, temos que Bianca, Virgínia e Licio têm 9, 8 ou 7 gatos, não se sabe ainda a ordem. Porém, Bianca só poderá ter 7 gatos pois, caso tivesse 8 gatos, então Danilo e Cláudia, ambos na primeira linha, teriam 1 gato cada, o que não pode ocorrer. Caso Bianca tivesse 9 gatos, então ou Danilo ou Cláudia não teriam gatos, o que também não pode ocorrer. Agora, se Bianca possui 7 gatos, então Danilo e Cláudia (na primeira linha) devem possuir 1 e 2 gatos, não nessa ordem possivelmente. Porém, se Cláudia possuísse 1 gato então Carmem deveria possuir 10 gatos (4ª coluna), o que não pode ocorrer. Logo, Cláudia possui 2 gatos, Danilo possui 1 gato e Carmem possui 9 gatos. Segue que, como Carmem possui 9 gatos, Virgínia (3ª coluna) deve possuir 8 gatos e Licio possui 9 gatos. Na segunda coluna, temos que Danilo possui 1 gato, portanto, Michely e Amanda possuem juntas 12 gatos, o que nos dá as possibilidades: 9 e 3, 8 e 4, 7 e 5. Por outro lado, na segunda linha (que tem soma máxima), Carmem possui 9 gatos e Virgínia possui 8 gatos. Restam 13 gatos para Nereu e Michely, com as possibilidades: 7 e 6 (soma máxima). Portanto, Michely só pode possuir 7 gatos, e daí Amanda possui 5 gatos. Segue que Nereu possui 6 gatos e Eliezer possui 7 gatos.

   Resposta:
   Amanda (5 gatos); Bianca (7 gatos); Cláudia (2 gatos); Carmem (9 gatos); Danilo (1 gato); Eliezer (7 gatos); Licio (9 gatos); Michely (7 gatos); Nereu (6 gatos); Virgínia (8 gatos).

2.

a) O menor traço possível de um número de dois algarismos é 1 (já que o menor número de dois algarismos é o 10) e o maior traço possível para um número de dois algarismos é o 18 (já que o maior número de dois algarismos é o 99).

Os quadrados menores que 18 são: 1, 4 , 9 e 16. Basta então verificar quais números de dois algarismos têm traço igual a 1, 4, 9 ou 16.
Para 1 temos: 10.
Para 4 temos: 22, 40, 31 e 13.
Para 9 temos: 54, 45, 63, 36, 72, 27, 81, 18 e 90.
Para 16 temos: 88, 79 e 97.

Resposta:
Ao todo temos 17 números cujo traço é um quadrado perfeito, que são: 10, 22, 40, 31, 13, 54, 45, 63, 36, 72, 27, 81, 18, 90, 88, 79 e 97.

b) Não há números de seis algarismos, todos distintos de zero, que tenham traço 5.
Com cinco algarismos temos: 11111.
Com quatro algarismos temos: 2111, 1211, 1121 e 1112.
Com três algarismos temos: 113, 131, 311, 122, 212 e 221.
Com dois algarismos temos: 14, 41, 32 e 23.
Com um algarismo temos: 5.

Resposta:
Ao todo temos 16 números cujo traço é 5, que são: 5, 14, 23, 32, 41, 113, 122, 131, 212, 221, 311, 1112, 1121, 1211, 2111 e 11111.

3. Para ser divisível por 45, um número deve ser divisível por 5 <u>e</u> por 9.
Todos os números divisíveis por 5 terminam em 5 ou em 0.
Se o quadrado de um primo menos 1 terminar em 5, então esse quadrado termina em 6 e não seria o quadrado de um primo porque seria o quadrado de um número par e o único número primo par é o número 2.
Logo, o quadrado do primo menos 1 termina em 0, e então o quadrado do primo deve terminar em 1.
Os números cujos quadrados terminam em 1 são aqueles que terminam em 1 ou em 9.

Então, consideremos os seguintes números primos de dois algarismos:
$11 \longrightarrow 11^2 = 121 \longrightarrow 121 - 1 = 120$. 120 <u>não</u> é múltiplo de 9.
$*19 \longrightarrow 19^2 = 361 \longrightarrow 361 - 1 = 360$. 360 <u>é múltiplo de 9.</u>
$29 \longrightarrow 29^2 = 841 \longrightarrow 841 - 1 = 840$. 840 <u>não</u> é múltiplo de 9.
$31 \longrightarrow 31^2 = 961 \longrightarrow 961 - 1 = 960$. 960 <u>não</u> é múltiplo de 9.
$41 \longrightarrow 41^2 = 1681 \longrightarrow 1681 - 1 = 1680$. 1680 <u>não</u> é múltiplo de 9.

$59 \longrightarrow 59^2 = 3481 \longrightarrow 3481 - 1 = 3480$. 3480 não é múltiplo de 9.
$61 \longrightarrow 61^2 = 3721 \longrightarrow 3721 - 1 = 3720$. 3720 não é múltiplo de 9.
$*71 \longrightarrow 71^2 = 5041 \longrightarrow 5041 - 1 = 5040$. 5040 é múltiplo de 9.
$79 \longrightarrow 79^2 = 6241 \longrightarrow 6241 - 1 = 6240$. 6240 não é múltiplo de 9.
$*89 \longrightarrow 89^2 = 7921 \longrightarrow 7921 - 1 = 7920$. 7920 é múltiplo de 9.

Resposta:
Os números primos de dois algarismos cujo quadrado menos 1 é divisível por 45 são 19, 71 e 89.

4. Repare que a soma dos segmentos horizontais é igual a duas vezes o comprimento máximo horizontal (base), e que a soma dos segmentos verticais é igual a duas vezes a altura máxima. A altura máxima é igual à base mais 1, sobre 2. Por exemplo, na primeira figura é $\dfrac{3+1}{2} = 2$, na segunda é $\dfrac{5+1}{2} = 3$ e na terceira é $\dfrac{7+1}{2} = 4$. Assim, na figura que tem 2009 quadrados na base, a altura é $\dfrac{2009+1}{2} = 1005$.
   Resposta:
   O perímetro é: $2 \times 2009 + 2 \times 1005 = 4018 + 2010 = 6028$.

5. Como todas as telhas têm $1m$ de largura e como há a sobreposição de $10cm$, serão necessárias 11 telhas em cada fileira ao longo da largura (podemos considerar 1 telha de $1m = 100cm$ e mais 10 telhas de $90cm$, devido à sobreposição, totalizando uma largura de $100cm + 10 \times 90cm = 1000cm = 10m$). Para o comprimento, consideramos a primeira telha como sendo a maior e as seguintes, do mesmo comprimento ou menor, diminuídas de $10cm$ cada.

a) Assim, um exemplo possível ao longo do comprimento, será:

   2 telhas de $1m = 100cm \rightarrow 100cm + 90cm$ restando $110cm$ para serem cobertos. Ora, $110cm$ não é múltiplo de $50cm$ (correspondente a uma telha T_2, de $60cm$, menos $10cm$) nem é múltiplo de $30cm$ (correspondente a uma telha T_3, de $40cm$, menos $10cm$). Portanto, para cobrir os $110cm$ faltantes podemos ter: $50cm + 60cm = 50cm + 2 \times 30cm$, ou seja, 1 telha T_2, 2 telhas T_3

   Resposta:
   Ao longo do comprimento, teríamos, $2T_1$,$1T_2$ e $2T_3$. No total seriam:

$2 \times 11 = 22$ telhas T_1, $1 \times 11 = 11$ telhas T_2 e $2 \times 11 = 22$ telhas T_3, para cobrir o telhado.

b) Além da possibilidade em (a), temos para o comprimento:
b_1) $1T_1 \rightarrow 100cm$ (restam $200cm$)
$4T_2 \rightarrow 4 \times 50 = 200cm$
b_2) $1T_1 \rightarrow 100cm$ (restam $200cm$)
$1T_2 \rightarrow 50cm$ (restam $150cm$)
$5T_3 \rightarrow 5 \times 30 = 150cm$
b_3) $1T_2 \rightarrow 60cm$ (restam $240cm$)
$3T_2 \rightarrow 3 \times 50cm$ (restam $90cm$)
$3T_3 \rightarrow 3 \times 30 = 90cm$
b_4) $1T_2 \rightarrow 60cm$ (restam $240cm$)
$8T_3 \rightarrow 8 \times 30cm = 240cm$
Não é possível cobrir o telhado só com telhas T_1 ou T_2 ou T_3.

Resposta:
No total, são 5 combinações de telhas, a menos da ordem em que são usadas ao longo do comprimento.
b_0) Nos dá: 22 telhas T_1, mais 11 telhas T_2, mais 22 telhas T_3
b_1) Nos dá: 11 telhas T_1, mais 44 telhas T_2.
b_2) Nos dá: 11 telhas T_1, mais 11 telhas T_2, mais 55 telhas T_3.
b_3) Nos dá: 44 telhas T_2, mais 33 telhas T_3.
b_4) Nos dá: 11 telhas T_2, mais 88 telhas T_3.

Gabarito Nível 2

1. Sejam:
   A - número de gatos de Amanda
   B - número de gatos de Bianca
   C - número de gatos de Cláudia
   K - número de gatos de Carmem
   D - número de gatos de Danilo
   E - número de gatos de Eliezer
   L - número de gatos de Lício
   M - número de gatos de Michely
   N - número de gatos de Nereu
   V - número de gatos de Virgínia

   Então as três linhas e as quatro colunas fornecem as sete equações:

   $D + B + C = 10$
   $N + M + V + K = 30$
   $E + A + L = 21$
   $N + E = 13$
   $D + M + A = 13$
   $B + V + L = 24$
   $C + K = 11$

   Sabemos que $B = M = E$, e que $K = L$. Substituindo M e E por B, e L por K, nas equações acima, obtemos:

   $D + B + C = 10$ **(1)**
   $N + B + V + K = 30$ **(2)**
   $B + A + K = 21$ **(3)**
   $N + B = 13$ **(4)**
   $D + B + A = 13$ **(5)**
   $B + V + K = 24$ **(6)**
   $C + K = 11$ **(7)**

   De **(2)** e **(6)**, obtemos $N + 24 = 30$ ou $N = 6$.

Levando esse valor para **(4)**, obtemos: $6 + B = 13$ ou $B = 7$.

Levando esses valores em **(1)**, **(3)**, **(5)**, **(7)**, obtemos:

$D + C = 3$ **(8)**
$A + K = 14$ **(9)**
$D + A = 6$ **(10)**
$C + K = 11$ **(11)**

A equação **(8)** é fundamental e fornece-nos duas respostas possíveis:
a) $D = 1; C = 2$
b) $D = 2; C = 1$
Então, levando em cada caso, esses valores às outras equações, obtemos:

a) $D = 1$;
$C = 2$;
$1 + A = 6 \Longrightarrow A = 5$;
$5 + K = 14 \Longrightarrow K = 9$;
$7 + V + 9 = 24 \Longrightarrow V = 8$

b) $D = 2$;
$C = 1$;
$2 + A = 6 \Longrightarrow A = 4$;
$4 + K = 14 \Longrightarrow K = 10$;
$7 + V + 10 = 24 \Longrightarrow V = 7$

O caso b é descartado, pois $V = B = 7$.

Resposta:
$N = 6$
$B = M = E = 7$
$D = 1$
$C = 2$
$A = 5$
$K = L = 9$
$V = 8$

2. Precisamos encontrar uma nova forma de representar o número 2009. Através da fatoração, temos que:

$$2009 = 7^2 \cdot 41$$

Contudo, ainda não possuimos uma soma, nem dois números quadrados. Note que $41 = 16 + 25$, que são dois números quadrados (4^2 e 5^2 respectivamente). Então:

$$2009 = 7^2 \cdot (16 + 25) = 7^2 \cdot (4^2 + 5^2)$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, obtemos:

$$2009 = 7^2 \cdot 4^2 + 7^2 \cdot 5^2 = 28^2 + 35^2$$

Resposta:
O número 2009 pode ser escrito como a soma dos quadrados de 28 e 35.

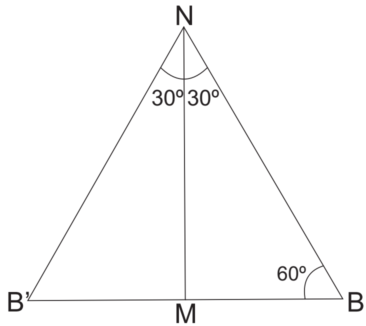
3. Observe que os triângulos $\triangle AMP$, $\triangle BNM$ e $\triangle CPN$ são retângulos com ângulos de 30º e 60º graus. Segue que os ângulos do $\triangle MNP$ são:

$$\angle PMN = \angle MNP = \angle NPM = 60^{\text{o}}.$$

Portanto o $\triangle MNP$ é equilátero e $MP = MN = NP$. Segue, pelo caso ângulo-lado-ângulo, que os triângulos $\triangle AMP$, $\triangle BNM$ e $\triangle CPN$ são congruentes. Por outro lado, em qualquer desses triângulos retângulos tem-se que o cateto menor é igual à metade da hipotenusa, ou seja, $BM = \dfrac{BM}{2}$, $CN = \dfrac{CP}{2}$ e $AP = \dfrac{AM}{2}$, ou ainda, cada lado do triângulo $\triangle ABC$ está dividido na razão $2:1$ pelos pontos M, N e P respectivamente. Portanto,

$$CN = BM = AP = \frac{l}{3} \text{ e } BN = AM = CP = \frac{2l}{3}.$$

Isto ocorre porque, se tomarmos B' em $A\bar{M}$ tal que $\angle B'NM = 30°$,



então $\widehat{B'} = 60^{o}$ e $\triangle B'BN$ será equilátero. Logo, como $B'M = BM$ (pois os triângulos $\triangle B'MN$ e $\triangle BMN$ são congruentes), teremos $BM = \dfrac{BN}{2}$.

Então, no $\triangle BMN$, obteremos (usando o Teorema de Pitágoras) que:

$MN^2 = BN^2 - BM^2 = \left(\dfrac{2l}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{l}{3}\right)^2 = \dfrac{3l^2}{3^2}$, ou $MN = \dfrac{l\sqrt{3}}{3}$.

Então Área $\triangle BMN = \dfrac{BM \times MN}{2} = \dfrac{\dfrac{l}{3} \times \dfrac{l\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{18}$.

Assim:

Área $\triangle MNP =$ Área $\triangle ABC - 3 \times$ Área $\triangle BMN = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{l^2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{12}$

Resposta:

$$\frac{\text{Área } \triangle ABC}{\text{Área } \triangle MNP} = \frac{\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{l^2\sqrt{3}}{12}} = 3$$

4. Em qualquer retângulo de base n, a área hachurada será igual a $\dfrac{2 \cdot n}{2} = n$, pois os dois triângulos sombreados têm lados iguais (altura do retângulo ou base do retângulo) e alturas, que somadas são iguais à base (ou a altura) do retângulo. Assim, a soma A das áreas sombreadas será:

$$A = 2 + 3 + 4 + ... + 2008 + 2009$$

Vamos calcular esta soma.

Seja

$$S = 1 + 2 + ... + 2008 + 2009$$

$$S = 2009 + 2008 + ... + 2 + 1$$

$$2S = (1 + 2009) + (2 + 2008) + (3 + 2007) + (2009 + 1) = 2009 \cdot 2010$$

$$S = 2009 \cdot 1005 = 2019045$$

Resposta:
$A = S - 1 = 2019044$.

5. **Solução:**
Como todas as telhas têm $1m$ de largura e como há a sobreposição de $10cm$ serão necessárias 11 telhas em cada fileira ao longo da largura (podemos considerar 1 telha de $1m = 100cm$ e mais 10 telhas de $90cm$ - devido à sobreposição - totalizando uma largura de $100cm + 10 \times 90cm = 1000cm = 10m$). Para o comprimento consideramos a primeira telha como sendo a maior e as seguintes do mesmo comprimento ou menor, diminuídas de $10cm$ cada.

a) Assim, um exemplo possível, ao longo do comprimento será:

2 telhas de $1m = 100cm \rightarrow 100cm + 90cm$ restando $110cm$ para serem cobertos. Ora, $110cm$ não é múltiplo de $50cm$ (correspondente a uma telha T_2, de $60cm$, menos $10cm$) nem é múltiplo de $30cm$ (correspondente a uma telha T_3, de $40cm$, menos $10cm$). Portanto, para cobrir os $110cm$ faltantes podemos ter: $50cm + 60cm = 50cm + 2 \times 30cm$, ou seja, 1 telha T_2 e 2 telhas T_3

Resposta:
Ao longo do comprimento, teríamos $2T_1$,$1T_2$ e $2T_3$. No total seriam:

$2 \times 11 = 22$ telhas T_1, $1 \times 11 = 11$ telhas T_2 e $2 \times 11 = 22$ telhas T_3, para cobrir o telhado.

b) Além da possibilidade em (a), temos para o comprimento:

$b_1)$ $1T_1 \to 100cm$ (restam $200cm$)

$4T_2 \to 4 \times 50 = 200cm$

$b_2)$ $1T_1 \to 100cm$ (restam $200cm$)

$1T_2 \to 50cm$ (restam $150cm$)

$5T_3 \to 5 \times 30 = 150cm$

$b_3)$ $1T_2 \to 60cm$ (restam $240cm$)

$3T_2 \to 3 \times 50cm$ (restam $90cm$)

$3T_3 \to 3 \times 30 = 90cm$

$b_4)$ $1T_2 \to 60cm$ (restam $240cm$)

$8T_3 \to 8 \times 30cm = 240cm$

Não é possível cobrir o telhado só com telhas T_1 ou T_2 ou T_3.

Resposta:
No total, são 5 combinações de telhas, a menos da ordem em que são usadas ao longo do comprimento.
$b_0)$ Nos dá: 22 telhas T_1 mais 11 telhas T_2 mais 22 telhas T_3.

$b_1)$ Nos dá: 11 telhas T_1 mais 44 telhas T_2.

$b_2)$ Nos dá: 11 telhas T_1, mais 11 telhas T_2 mais 55 telhas T_3.

$b_3)$ Nos dá: 44 telhas T_2 mais 33 telhas T_3.

$b_4)$ Nos dá: 11 telhas T_2 mais 88 telhas T_3.

c) Temos que analisar as 5 combinações encontradas nos itens (a) e (b). Para saber a quantidade mínima de metros de ripas, basta analisar cada combinção de telhas ao longo do comprimento, considerando os tipos de cada telha a serem usadas. Para a primeira telha, consideramos o número dado, segundo o tipo, de ripas que é necessário e, para as seguintes, consideramos o número dado, menos 1 (já que uma ripa pode suportar mais de uma telha). Isso pode ser feito independentemente da ordem das telhas.

Resposta:

b_0) $2T_1 + 1T_2 + 2T_3 \rightarrow 5$ ripas $+4$ ripas $+2$ ripas $+2 \times 1$ ripas$=$ 13 ripas. $(1^{\text{a}}T_1$, $2^{\text{a}}T_1$, uma T_2, $2{\times}T_3)$

b_1) $1T_1 + 4T_2 \rightarrow 5$ ripas $+4 \times 2$ ripas $= 13$ ripas.

b_2) $1T_1 + 1T_2 + 5T_3 \rightarrow 5$ ripas $+2$ ripas $+5 \times 1$ ripas $= 12$ ripas.

b_3) $1T_2 + 3T_2 + 3T_3 \rightarrow 3$ ripas $+3 \times 2$ ripas $+3 \times 1$ ripas $= 12$ ripas.

b_4) $1T_2 + 8T_3 \rightarrow 3$ ripas $+8 \times 1$ ripas = 11 ripas.

Portanto, a combinação (b_4) dá o número mínimo de ripas, e serão $11 \times 11 = 121$ metros de ripas.

Gabarito Nível 3

1. De $\dfrac{y}{y-1} = \dfrac{x}{10^n - x}$, obtemos $x = \dfrac{10^n y}{2y-1}$.

   Os números y e $2y-1$ não possuem fatores em comum pois, caso contrário, se $y = mk$ e $2y-1 = lk$, com $k > 1$, teríamos $2y = 2mk$ e $2mk - 1 = lk$, ou $(2m-l)k = 1$, o que nos dá $k = 1$. Portanto, $2y-1$ divide 10^n e, como $2y-1$ é ímpar, então $2y-1$ deve ser potência de 5:

$$2y - 1 = 5^p \text{ ou } y = \frac{5^p + 1}{2}.$$

a) Se $p = 0$, então $y = 1$ e não nos interessa.

   Se $p = 1$, então $y = 3$, que é o menor número harmônico.

   Nesse caso, $x = \dfrac{10.3}{6-1} = 6$.

   Resposta:
   O menor número harmônico é $y = 3$.

b) Para $p = 2$, temos $y = \dfrac{25+1}{2} = 13$ e $x = \dfrac{10^2.13}{25} = 52$ (para x com 1 algarismo não teríamos x inteiro).

   Para $p = 3$, temos $y = \dfrac{126}{2} = 63$ e $x = \dfrac{10^3.63}{125} = 498$ (para x com 2 algarismos não teríamos x inteiro).

   Agora note que, se y termina em 13, então $y = 10^2.a + 13$, para algum inteiro a. Então $10^2.a + 13 = \dfrac{5^n+1}{2}$, ou $5^n = 2.10^2 a + 25$ ou $5^n = 2 \cdot 10^2 b + 125$, o que nos leva ao número harmônico seguinte:
   $\dfrac{5^{n+1}+1}{2} = \dfrac{10.10^2 a + 125 + 1}{2} = 5a.10^2 + 63$, ou seja, o próximo número harmônico termina em 63.

   Se y termina em 63, então $y = 10^2.b + 63 = \dfrac{5^n+1}{2}$, o que nos leva ao número harmônico seguinte:

$\dfrac{5^{n+1}+1}{2} = \dfrac{10.10^2 b + 5.125 + 1}{2} = 5b.10^2 + 313$, ou seja, o próximo número harmônico termina em 13.

c) De $\dfrac{y}{y-1} = \dfrac{x}{10^n - x}$, obtemos $10^n y = (2y-1)x$ e, como $10^n y$ é par e $2y-1$ é ímpar, então x deve ser par (qualquer conjugado harmônico é par). Como todos os números harmônicos são ímpares (terminam em 3), então não é possível encontrar um número harmônico cujo conjugado harmônico seja harmônico.

2. Note que 7 divide 2009. Daí temos:

$$\begin{aligned} 2009 &= 7^2 \cdot 41 \\ &= 7^2(16+25) \\ &= 7^2(16+16+9) \\ &= 7^2(4^2+4^2+3^2) \\ &= 28^2+28^2+21^2 \end{aligned}$$

<u>OBS:</u> Há outras respostas possíveis. Por exemplo:

$$2009 = 1600 + 400 + 9 = 40^2 + 20^2 + 3^2.$$

3.

a) Note que, no passo n, a altura e o comprimento da pilha são iguais a

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2^{n-1}}$$

Assim, o perímetro da figura nesse passo n é igual a

$$2p_n = 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 4 \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}}$$

No "passo ∞" teremos

$$2p_\infty = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 8$$

Resposta:
O perímetro da figura final será 8.

b) No passo n a área total da figura será:

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + 8 \cdot \left(\tfrac{1}{8}\right)^2 + \ldots + 2^{n-1} \cdot \left(\tfrac{1}{2^{n-1}}\right)^2 \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Assim, no "passo ∞" teremos:

$$A_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

<u>OBS:</u> Embora as figuras se "aproximem", em termos de área, do triângulo retângulo de catetos iguais a 2, em termos de perímetro isso não acontece, pois para n "bem grande" o perímetro está "próximo" de 8, e o perímetro daquele triângulo é igual a $2 + 2 + 2\sqrt{2} \cong 6,8$.

Resposta:
A área da figura final será 2.

4. Vamos analisar os valores da expressão para x e y na circunferência de raio k e centro $(0,0)$:

$$x^2 + y^2 = k^2$$

Então,

$$(x^2 + 3y^2) \cdot 2^{1-x^2-y^2} = (x^2 + y^2 + 2y^2) \cdot 2^{1-(x^2+y^2)} = (k^2 + 2y^2) \cdot 2^{1-k^2}$$

Como 2^{1-k^2} é constante (na circunferência), teremos que o valor máximo da expressão, para x e y na circunferência de raio k, será atingido quando $y = \pm k$ (e neste caso $x = 0$). Tal valor será

$$3k^2 \cdot 2^{1-k^2} = \frac{6k^2}{2^{k^2}} = \frac{6n}{2^n}, \quad n = k^2.$$

Basta então analisar os valores de $\dfrac{6n}{2^n}$, $n = k^2$.
Se $n = 1$ ou $n = 2$ teremos o valor 3. Para $n = 1$ teremos $k = 1$ e, portanto, $y = \pm 1$. Para $n = 2$ teremos $k = \sqrt{2}$, o que não nos dá valor inteiro para y.
Vamos mostrar agora que $\dfrac{6n}{2^n} < 3$, se $n \geq 3$. Para $n = 3$ teremos:

$$\frac{6n}{2^n} = \frac{18}{8} < 3.$$

Suponhamos que essa desigualdade é verdadeira para $n \geq 3$. Então, para $n+1$:

$$6(n+1) = 6n + 6 < 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 2 = 3(2^n + 2).$$

Mas $2^n + 2 = 2(2^{n-1} + 1) < 2 \cdot 2^n < 2^{n+1}$, já que $2^{n-1} + 1 < 2^n$, se $n \geq 3$.
Logo, o valor máximo é 3 e é atingido em $(0, 1)$ ou em $(0, -1)$.

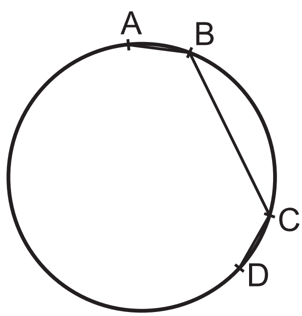
Resposta:
O valor máximo é 3 e é atingido para $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

5. Antes de mais nada notamos que, se duas circunferências são tangentes, então os seus centros e o ponto de tangência são colineares.

a) Seja B o vértice tal que $AB = BC$, e tal que esses sejam os menores lados do polígono $ABCDEFG$. Então, considerando que $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FG$ e $GH = HA$, e que T_1 é o ponto de tangência entre A e B (das circunferências de centros A e B), T_2 entre B e C, T_3 entre C e D, T_4 entre D e E, T_5 entre E e F, T_6 entre F e G, T_7 entre G e H, e T_8 entre H e A, teremos, chamando de r_A o raio da circunferência de centro A, de r_B o raio da circunferência de centro B, e assim por diante, as seguintes igualdades:
$BT_1 = BT_2 = r_B$
$CT_2 = CT_3 = r_C$
$DT_3 = DT_4 = r_D$
$ET_4 = ET_5 = r_E$
$FT_5 = FT_6 = r_F$
$GT_6 = GT_7 = r_G$
$HT_7 = HT_8 = r_H$
$AT_8 = AT_1 = r_A$
Das igualdades acima e de

$AB = BC$ obtemos que $r_A = AT_8 = AT_1 = CT_2 = CT_3 = r_C$;
de $CD = DE$, que $r_C = CT_3 = ET_4 = r_E$;
de $EF = FG$, que $r_E = ET_5 = GT_6 = r_G$;
de $GH = HA$, que $r_G = GT_7 = AT_8 = r_A$.
Portanto, $r_A = r_C = r_E = r_G$, e haverá quatro circunferências de mesmo raio. Note que começando pelo vértice que possui os dois lados iguais consecutivos menores, sempre podemos obter as oito circunferências de modo que a distribuição apresente solução para o problema de tangência das circunferências. Além disso, qualquer pequena variação em $r_B = BT_1 = BT_2$ continuará a dar soluções para o problema. Portanto, há uma infinidade de soluções.

b) Basta tomar uma distribuição tal que $AB = CD$ e tal que $AB < \frac{BC}{2}$. Nesse caso, teremos $BT_1 < AB < \frac{BC}{2}$, o que nos dá $BT_1 = BT_2 < \frac{BC}{2}$. Daí $CT_2 > \frac{BC}{2} = CD$, ou seja, qualquer que seja r_A temos que $r_C > CD$, e não haverá solução para o problema de tangência.

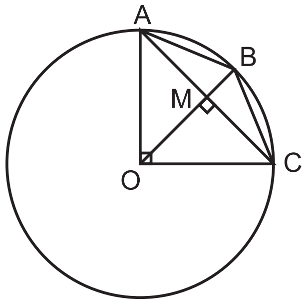


c) A soma S será dada por:

$$S = 2\pi(r_A + r_B + r_C + r_D + r_E + r_F + r_G + r_H),$$

E $2(r_A + r_B + r_C + r_D + r_E + r_F + r_G + r_H)$ é o perímetro do polígono $ABCDEFGH$, que é constante, fixados os oito pontos.

d) Se $ABCDEFG$ for um octógono regular, então



$S = \pi 2p = 8\pi l$, com $l = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH$
Vamos calcular l em função de R. Temos que AC é o lado do quadrado inscrito na circunferência. Portanto, $AC = R\sqrt{2}$. Assim, $AM = CM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.
Agora, como $O\widehat{A}C = O\widehat{C}A = 45^o$, e $A\widehat{O}B = C\widehat{O}B = 45^o$, então
$OM = AM = CM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.
Logo, $BM = OB - OM = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{2})$.
No $\triangle BMC$:
$BC^2 = CM^2 + BM^2$ ou $l^2 = [\frac{R\sqrt{2}}{2}]^2 + [\frac{R}{2}(2 - \sqrt{2})] = \frac{2R^2}{4} + \frac{R^2(6-4\sqrt{2})}{4} =$
$= \frac{R^2(8-4\sqrt{2})}{4} = R^2(2 - \sqrt{2})$.
Portanto, $l = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ e daí $S = 8\pi R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Resposta:
$S = 8\pi R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Premiados

Foram premiados 97 estudantes (o que corresponde a 17,1% dos alunos que participaram da segunda fase), 7 com medalhas de ouro, 20 com medalhas de prata, 27 com medalhas de bronze e 43 com menções honrosas.

Prêmio William Glenn Whitley[1]

- Bruno da Silveira Dias (Florianópolis)

Nível 1

Ouro

- Bruno da Silveira Dias (Florianópolis)
- Diego Wyzykowski (Joinville)
- Romeu Retzlaff Júnior (Joinville)

Prata

- Davi Gustavo Lisboa Girardi (Florianópolis)
- Júlia Bertelli (Joinville)
- Ruan Olsen (Rio Negrinho)
- Shadi Bavar (Blumenau)

Bronze

- Carlos Bruno Medeiros da Costa Pereira Neto (Joinville)
- Caroline da Silveira (Joinville)
- Guilherme Sohnlein Exel (Florianópolis)

[1] O prêmio é destinado ao aluno com a maior pontuação na Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina. Este, é uma homenagem ao professor William Glenn Whitley (ver revista da ORM nº 4) e começou a ser entregue no ano de 2006. O primeiro a receber o prêmio foi Renan Henrique Finder, seguido por Gustavo Lisbôa Empinotti, o qual foi premiado em 2007 e 2008.

- Lucas da Silveira Guadagnin (Criciúma)
- Marcos Böechat Goede (Pomerode)
- Mariana Bareta Gonçalves (São José)

Menção Honrosa

- Antônio Jerônimo Botelho (Tubarão)
- Bruno Nunes (Joinville)
- Bruno Siqueira Ferreira (Florianópolis)
- Douglas Ohf (Joinville)
- Fernanda Momm Antunes (Joinville)
- Gabriela Azevedo Lansoni (Florianópolis)
- Guilherme Santos Machado (Blumenau)
- Jordão Luiz Moratelli Júnior (Rio do Sul)
- Lucca Lima de Souza (Blumenau)
- Mikael Bárbaro de Brito (Itajaí)
- Viktória Wiehermann (São Bento do Sul)

Nível 2

Ouro

- Arthur Oenning Fagundes (Rio do Sul)
- Isabella Giusti Hernandes (Florianópolis)
- João Marcos Nicolodi (Florianópolis)

Prata

- Ana Paula Alves da Silva (Criciúma)

- Anna Carolina S. G. Vallim (Florianópolis)
- Bruno Toshio Ogava (Joinville)
- Francisco Henrique Pinheiro Marquês (Criciúma)
- Hugo Diehl de Souza (Criciúma)
- Isabella Carolina Borba (Joinville)
- Karina Livramento dos Santos (Navegantes)
- Luiz Gustavo de Oliveira (Joinville)
- Miryan Yumi Sakamoto (Florianópolis)
- Murilo Martini (Blumenau)
- Vinícius Martins Freire (Florianópolis)

Bronze

- Débora Ganasini (Videira)
- Felipe Paolo Buzzarello (Timbó)
- Gabriel Augusto Moreira (Joinville)
- Gabriel Simas Oliveira (Itajaí)
- Gustavo Reitz Sperotto (Florianópolis)
- Jorge Alexander Sievert (Blumenau)
- Josiane Bueno Gress (Florianópolis)
- Laiane Freitas Suzart (Joinville)
- Letícia Motta (Joinville)
- Lucas Colzani (Gaspar)
- Nicole Braga de Medeiros Nicolak (Joinville)

- Ranieri Francisco Serafin (Criciúma)

Menção Honrosa

- Aluizio Cidral Junior (Joinville)
- Anderson Negreli (São Bento do Sul)
- Carlos Eduardo Boso (Nova Trento)
- Eduardo Adelano Agostini Pasold (Timbó)
- Eduardo Matheus Pimentel de Souza (Florianópolis)
- Janine Garcia (São Francisco do Sul)
- João Paulo Brum dos Santos (Joinville)
- Leandro Jun Kimura (Joinville)
- Leonard Henrrik Wodtke (Joinville)
- Leonardo Tadeu Diniz Leal (Joinville)
- Lucas André Bibow (Joinville)
- Maria Eugênia Coutto Hernandez (Florianópolis)
- Pedro Lucas Gomes (Florianópolis)
- Rafael M. Kolesnikovas (Florianópolis)
- Rodrigo Malheiros Remor (Florianópolis)
- Thiago Vargas Medeiros (Lages)
- Tiago Piontkewicz (São Bento do Sul)
- Vanessa Carvalho Lucas (Joinville)
- Vitor Seiji Andrade Tatemoto (Florianópolis)

Nível 3

Ouro

- Luiz Gustavo Cordeiro (Florianópolis)

Prata

- André Mateus Netto Spillere (Colégio São Bento)
- Francine Rosa Vargas (Imbituba)
- Luis Gustavo Longuen (Rio do Sul)
- Matheus Silva Gonçalvez (Florianópolis)
- Natan Cardozo Leal (São Bento do Sul)

Bronze

- Alexandre Elvis de Souza (Timbó)
- Ana Clara Marcondes de Mattos Arêas (Rio do Sul)
- Bárbara Louize da Silva (Gaspar)
- Ivani Ivanova Ivanova (Blumenau)
- Lourival Tenfen Júnior (Joinville)
- Luiz Fernando Bossa (Brusque)
- Matheus Schramm Dall'Asta (Gaspar)
- Nathana Luana Hoffmann (Blumenau)
- Sérgio Feldmann de Quadros (Itajaí)

Menção Honrosa

- Carlos Filipe Klahoid (Joinville)
- Clovis Sérgio Bona Júnior (Joinville)

- Eduardo Biscoli Brandão (Videira)
- Gustavo Dela Bruna Noronha (Florianópolis)
- Gustavo Zanini (Gaspar)
- João Marcelo Bitencourt Lima (Tubarão)
- Leandro Roza Livramento (Florianópolis)
- Letícia Perini (Timbó)
- Luis Antônio Vinholi (Joinville)
- Matheus Pera (Blumenau)
- Miguel Busarello Lauterjung (Blumenau)
- Vinícius Abouhaten (Florianópolis)
- Vinícius Kramer Scariot (Florianópolis)

Escolas Participantes

ACBNL Colégio São José (Itajaí); **C**entro de Educação Camboriú Ltda. (Camboriú); **C**entro de Educação Cantinho Feliz Ltda. (Timbó); **C**entro de Educação do Município de Mafra (Mafra); **C**entro de Educação Elcana (Palhoça); **C**entro de Educação Recanto dos Anjos (Ouro); **C**entro de Educação Tangaraense (Tangará); **C**entro Educacional Anita (São José); **C**entro Educacional Caminho do Saber (Rio Negrinho); **C**entro Educacional Canguru (Jaraguá do Sul); **C**entro Educacional Criativo (Florianópolis); **C**entro Educacional Dom Bosco (Chapecó); **C**entro Educacional Energia SC Ltda. (Criciúma); **C**entro Educacional Esportivo Valdemiro M. Chiquio (Lageado); **C**entro Educacional Fraiburgo Cefrai (Fraiburgo); **C**entro Educacional Menino Jesus (Florianópolis); **C**entro Educacional Paraíso Infantil (Florianópolis); **C**entro Educacional São Joaquim Ltda. (São Joaquim); **C**entro Educacional SATC (Criciúma); **C**entro Educacional Sigma (Chapecó); **C**entro Educacional Universo do Saber (Maravilha); **C**entro Federal de Educação e Tecnologia de SC (Florianópolis); **C**etisa (Timbó); **C**olégio Alto Vale Ltda. (Rio do Sul); **C**olégio Antônio Peixoto (Florianópolis); **C**olégio Bom Jesus Divina Providência (Jaraguá do Sul); **C**olégio Bom Jesus Sto. Antônio (Blumenau); **C**olégio Carlos Drummond de Andrade (Capinzal); **C**olégio Catarinense (Florianópolis); **C**olégio Cenecista Dr. Júlio Cesar R. Neves (Concórdia); **C**olégio Cenecista José Elias Moreira (Joinville); **C**olégio Cenecista Pedro Antonio Fayal (Itajaí); **C**olégio Cenecista São José (Rio Negrinho); **C**olégio Coração de Jesus (Florianópolis); **C**olégio da Lagoa (Lagoa); **C**olégio da Univille (Joinville); **C**olégio de Aplicação UFSC (Florianópolis); **C**olégio Dehon (Tubarão); **C**olégio Dom Bosco (Barreiros); **C**olégio Dom Bosco (Rio do Sul); **C**olégio Dom Jaime Camara (São José); **C**olégio dos Santos Anjos (Joinville); **C**olégio Elisa Andreoli (Barreiros); **C**olégio Energia (Florianópolis); **C**olégio Energia (Palhoça); **C**olégio Energia (Blumenau); **C**olégio Energia (Santo Amaro da Imperatriz); **C**olégio Espaço (Braço do Norte); **C**olégio Evangélico Jaraguá (Jaraguá do Sul); **C**olégio Evolução (São Ludgero); **C**olégio Exponencial (Chapecó); **C**olégio Geração (Florianópolis); **C**olégio Global (São Bento do Sul); **C**olégio Intelectus Ltda. (Xanxerê); **C**olégio Jardim Anchieta (Florianópolis); **C**olégio La Salle (Xanxerê); **C**olégio Madre Francisca Lampel (Gaspar); **C**olégio Mafrense (Mafra); **C**olégio Marista (Criciúma); **C**olégio Marista São Francisco (Chapecó); **C**olégio Marista São Luis (Jaraguá do Sul); **C**olégio Master Sigma Ltda. (Lages); **C**olégio Nossa Senhora De Fátima (Florianópolis); **C**olégio Sagrada Família (Blumenau); **C**olégio Salesiano Itajaí (Itajaí); **C**olégio Santa Rosa de Lima (Lages); **C**olégio Santo Antônio (Joinville); **C**olégio Santo Estevão (Ituporanga); **C**olé-gio São Bento (Criciúma); **C**olégio São José (Porto União); **C**olégio Sinodal Ruy Barbosa (Rio do Sul); **C**olégio Stella Maris (Laguna); **C**olégio Superação (Videira); **C**olégio Tendência (Florianópolis); **C**olégio Tradição (Florianópolis); **C**olégio Tupy (Joinville); **C**olégio Universitário (Gaspar); **C**olégio Visão (São José); **C**onjunto Educacional Dr. Blumenau (Pomerode); **C**ooperativa Educacional de Imbituba (Imbituba); **E**. E. B. M. Caic Irma Joaquina (São Francisco Do Sul); **E**. E. F. Profº Emir Ropelato (Timbó); **E**. E. B. Ruy Barbosa (Timbó); **E**. B. Antônio Diomario da Rosa (Armazém); **E**. B. Aririba (Itajaí); **E**. B. Bento Eloi Garcia (Itapema); **E**. B. Dr. Amadeu Da Luz (Pomerode); **E**. B. José Medeiros Vieira (Itajaí); **E**. B. Profª Adriana Weingartner (Palhoça); **E**. B. Profª Antonieta S. de Souza (Palhoça); **E**. B. Santo Antônio (Fraiburgo); **E**. B. M. Alberto Bordin (Jaborá); **E**. B. M. Álvaro Tancredo Dippold (São Francisco do Sul); **E**. B. M. Bairro Bortolotto (Nova Veneza); **E**. B. M. de Primeiro Grau Elizabeth Ulssea (Laguna); **E**. B. M. Dr. Hercilio Malinowsky (São Bento do Sul); **E**. B. M. Juvenil da Cunha Colares (Sombrio); **E**. B. M. Luís Pacheco dos Reis (Laguna); **E**. B. M. Oswaldo dos Reis (Itapema); **E**. B. M. Pref. Augusto Althoff (Santo Amaro da Imperatriz); **E**. B. M. Profª Dalcy Avila de Souza (Jaguaruna); **E**. B. M. Profª Lucia Tschoeke (São Bento do Sul); **E**. B. M. Profº Ilka Muller de Mello (Navegantes); **E**. B. M. Profº Laury Luiz Deon (Abelardo Luz); **E**. B. M. Rubens João de Souza (Penha); **E**. B. M. São Francisco (Guarujá do Sul); **E**. E. B. Aleixo Della Giustina (Ituporanga); **E**. E. B. Antônio Gonzaga (Porto União); **E**. E. B. Belermino Victor Dalla Vecchia (Ponte Serrada); **E**. E. B. Benjamim Carvalho de

Oliveira (Ipumirim); **E**. E. B. Cel. José Maurício dos Santos (Laguna); **E**. E. B. Cel. Lara Ribas (Chapecó); **E**. E. B. Conselheiro Mafra (Joinville); **E**. E. B. Dom Helder Câmara (Modelo); **E**. E. B. Dom Joaquim (Braço do Norte); **E**. E. B. Dr. Frederico Rolla (Atalanta); **E**. E. B. Erwin Radtke (Blumenau); **E**. E. B. Frei Bruno (Joaçaba); **E**. E. B. Gregório Manoel de Bem (Laguna); **E**. E. B. Hercílio Deeke (Blumenau); **E**. E. B. Irma Maria Teresa (Palhoça); **E**. E. B. Isabel da Silva Telles (Irani); **E**. E. B. João Colin (Joinville); **E**. E. B. José Maria Cardoso da Veiga (Palhoça); **E**. E. B. Leopoldo Jacobsen (Taió); **E**. E. B. Leopoldo Koprowski (Benedito Novo); **E**. E. B. Luiz Coradi (Xanxerê); **E**. E. B. Maestro Heitor Villa Lobos (Rio do Campo); **E**. E. B. Maria Correa Saad (Garopaba); **E**. E. B. Pe. Antônio Vieira (Anita Garibaldi); **E**. E. B. Pe. Antônio Vieira (Ipuaçu); **E**. E. B. Pedro II (Blumenau); **E**. E. B. Pedro Simon (Ermo); **E**. E. B. Princesa Isabel (Palmitos); **E**. E. B. Princesa Isabel (Irati); **E**. E. B. Profª Coralia Gevaerd Olinnger (Passos Maia); **E**. E. B. Profª Lilia Ayroso Oechsler (Jaraguá do Sul); **E**. E. B. Profª Valesca Carmen R. Parizotto (Chapecó); **E**. E. B. Profº Custodio F. de Córdova (Laguna); **E**. E. B. Profº Flordoardo Cabral (Lages); **E**. E. B. Profº Manuel de F. Trancoso (Iraceminha); **E**. E. B. Profº Mario de O. Goeldner (Mafra); **E**. E. B. Profº Mario Garcia (Camboriú); **E**. E. B. Protasio Joaquim da Cunha (Sombrio); **E**. E. B. Roberto Moritz (Ituporanga); **E**. E. B. Romildo Czepanhik (Xanxerê); **E**. E. B. Rosina Nardi (Seara); **E**. E. B. Santa Terezinha (Brusque); **E**. E. B. Santa Terezinha (Maravilha); **E**. E. B. Santo Antônio (Mafra); **E**. E. B. Santo Antônio (Itapiranga); **E**. E. B. São José (Navegantes); **E**. E. B. São Judas Tadeu (Lages); **E**. E. B. Tiradentes (Porto Belo); **E**. E. B. Victor Felipe Rauen (Jaborá); **E**. E. B. M. Comandante Moreira (Laguna); **E**. E. B. M. Profª Tomasia M. Fernandes (São João do Sul); **E**. E. B. M. Vila Velha II (São João do Sul); **E**. E. F. Batista Paludo (Seara); **E**. E. F. Carlos Armando Paludo (Seara); **E**. E. F. Elizabethe Matilde Simon (Seara); **E**. E. F. Engelberto Grossl (São Bento do Sul); **E**. E. F. Felipe Manke (Massaranduba); **E**. E. F. Juscelino Kubitschek de Oliveira (Maravilha); **E**. E. F. Linha Bigua (Iraceminha); **E**. E. F. Marcolino Pedroso (Arabutã); **E**. E. F. Maria Konder Bornhausen (Massaranduba); **E**.

E. F. Martinho Ghizzo (Tubarão); **E**. E. F. Nossa Senhora da Salete (Quilombo); **E**. E. F. Pe. Hermenegildo Bortolato (Rio das Antas); **E**. E. F. Toldo Velho (Ipuaçu); **E**. E. F. M. Bernardo Rohden (Salete); **E**. E. F. M. Cedro Alto (Brusque); **E**. E. M. Dep. Nagib Zattar (Joinville); **E**. E. M. Manuel Da Nobrega (Rio Negrinho); **E**. E. M. Prof^{o} Roberto Grant (São Bento do Sul); **E**. M. Bela Vista (Itapiranga); **E**. M. de Taquaras (Balneário Camboriú); **E**. M. Dr. Sadalla Amin Ghanem (Joinville); **E**. M. Ervin Prade (Timbó); **E**. M. E. B. Alcides Tombini (Caçador); **E**. M. E. B. Alto Bonito (Caçador); **E**. M. E. B. Jardim Atlântico (Balneário Arroio do Silva); **E**. M. E. B. João Paulo I (Tubarão); **E**. M. E. B. José T. Utzig (Pinhalzinho); **E**. M. E. B. Paulo Fuckner (Campo Alegre); **E**. M. E. B. Prof^{a} Lucinda M. Pscheidt (Rio Negrinho); **E**. M. E. B. Prof^{a} Selma T. Graboski (Rio Negrinho); **E**. M. E. B. Valentin Bernardi (Itá); **E**. M. E. F. Hercílio Amante (Criciúma); **E**. M. E. F. Waldemar Schmitz (Jaraguá do Sul); **E**. M. E. F. Anna Towe Nagel (Jaraguá do Sul); **E**. M. E. F. Atayde Machado Dadi (Jaraguá do Sul); **E**. M. E. F. Educar (Itapema); **E**. M. E. F. Guilherme Hanemann (Jaraguá do Sul); **E**. M. E. F. João Monteiro Cabral (Itapoá); **E**. M. E. F. Ribeirão Cavalo (Jaraguá do Sul); **E**. M. E. F. São Lourenço (Mafra); **E**. M. Funei (Itapiranga); **E**. M. Gov. Pedro Ivo Campos (Joinville); **E**. M. Joaquim Vicente de Oliveira (Itapema); **E**. M. Núcleo Deolindo Zílio (Seara); **E**. M. Pe. Martinho Stein (Timbó); **E**. M. Presidente Médici (Balneário Camboriú); **E**. M. Prof^{a} Anna Maria Harger (Joinville); **E**. M. Prof^{a} Eladir Skibinski (Joinville); **E**. M. Prof^{a} Karin Barkemeyer (Joinville); **E**. M. Prof^{a} Zulma do Rosário Miranda (Joinville); **E**. M. Prof^{o} Edgar M. Castanheira (Joinville); **E**. M. Vicente Vieira (Garuva); **E**. M. Viver e Conhecer (Capinzal); **E**ducandário Imaculada Conceição (Florianópolis); **E**scola Agrotécnica Federal de Sombrio (Santa Rosa do Sul); **E**scola Barão do Rio Branco (Blumenau); **E**scola Comecinho de Vida Educação Infantil e Ensino (Videira); **E**scola Dinâmica (Florianópolis); **E**scola Isolada São Jerônimo (Bom Jardim da Serra); **E**scola Isolado Altos da Boa Vista (Bom Jardim da Serra); **E**scola Núcleo Municipal São Rafael (Seara); **E**scola Núcleo Número Um (Cunha Porã); **E**scola Sarapiquá (Florianópolis); **E**scola Técnica de Comércio de Tubarão

(Tubarão); **E**scola Técnica do Vale do Itajaí (Blumenau); **E**scola Técnica Tupy (São Bento do Sul); **E**xathum Curso e Colégio (Joinville); **F**aculdade de Tecnologia Senai (Concórdia); **G**. E. M. Horizonte (Zortéa); **I**nstituto Educacional Madre Elisa Savoldi (Sombrio); **K**umon (Joaçaba); **K**umon (São Bento do Sul); **N**úcleo Municipal Profª Teresa L. Preto (Curitibanos); **S**enai (Videira); **S**enai Centro de Educação e Tecnologia (Tubarão); **S**enai Centro de Educação Tecnologica (Jaraguá do Sul); **S**enai Centro de Tecnologia em Alimentos (Chapecó); **S**ociedade Educacional Posiville Ltda. (Joinville); **V**ivência P. E. e Primeiro Grau (Florianópolis);

Artigos

A Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (UFSC), desde a Origem

Ruana Maíra Schneider e Thuysa Schlichting de Souza [1]

Florianópolis - Santa Catarina

Quem nunca ouviu falar de uma olimpíada de matemática? O espírito olímpico paira sobre os estudantes há mais de um século, desde que se iniciaram as competições pela Europa. Esse entusiasmo foi se espalhando por diversos países, o que impulsionou a criação da Olimpíada Internacional de Matemática em 1959.

No Brasil não foi diferente. Em 1979, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) observou que, além de descobrir jovens talentos, as olimpíadas poderiam motivar a inspiração para o estudo da Matemática. Assim, organizou a I Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), que ocorre até os dias atuais.

A SBM, no ano de 1998, incentivou a criação de novas olimpíadas regionais pelo Brasil. Uma vez que o PET Matemática da UFSC desde 1994 trabalhava na divulgação, organização e proporcionava aulas com os treinamentos da OBM para as escolas de Florianópolis e, portanto, fazia parte da realidade olímpica, a ideia de organizar uma olimpíada regional foi bem recebida. A partir desse momento decidiu-se organizar a I Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM).

Essa primeira edição da ORM teve a participação de sete escolas da região de Florianópolis. Seguindo a sugestão da SBM, a primeira fase da OBM foi utilizada na seleção dos alunos que seriam aprovados para participar da segunda fase da ORM. O grupo PET ficou responsável por contatar as escolas, ministrar os treinamentos e preparar a cerimônia de premiação. As provas dessa segunda etapa, por sua vez, foram

[1] Alunas do curso de Licenciatura em Matemática e integrantes do grupo PET-Matemática da UFSC

elaboradas por seis professores do Departamento de Matemática que, juntamente com os integrantes do grupo PET, atuaram na correção. Em seguida, fez-se uma classificação dos alunos com melhor pontuação para a premiação, que se realizou no auditório da reitoria da UFSC.

Com o sucesso da primeira edição, a ORM pode ser ampliada e passou a contar com alunos bolsistas exclusivos para o projeto. No ano de 2002, para facilitar a participação de escolas de algumas regiões do estado, foram implantados polos para aplicação das provas da segunda fase.Foram criados cinco polos em 2002, número que variou em cada ano. Observe a tabela abaixo:

2002	2003	2004	2005
Araranguá Florianópolis Fraiburgo Itajaí Joinville Rio do Sul	Blumenau Chapecó Criciúma Florianópolis Itajaí Joinville	Blumenau Criciúma Florianópolis Itajaí Joinville Rio do Sul Videira	Blumenau Capinzal Criciúma Florianópolis Itajaí Joinville

2006	2007	2008	2009
Blumenau Concórdia Criciúma Florianópolis Itajaí Joinville	Balneário Camboriú Blumenau Criciúma Fraiburgo Florianópolis Joinville	Blumenau Criciúma Florianópolis Joinville Zortéa	Blumenau Criciúma Florianópolis Joinville Lages Rio Negrinho Videira Xanxerê

A presença dos estudantes realmente foi crescente nos anos subsequentes à criação dos polos, como é possível observar no gráfico abaixo:

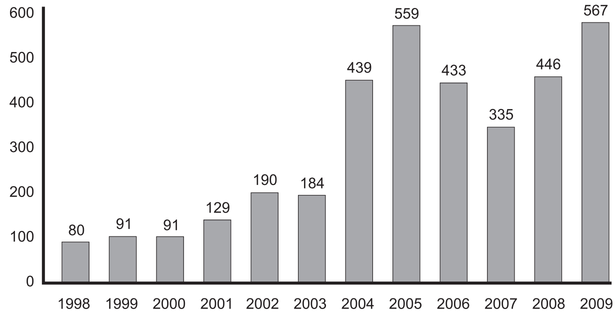


Figura 1: Número de participantes da segunda fase da Olimpíada Regional de Matemática nos anos de 1998 a 2009.

É importante ressaltar que no ano de 2005 foi criada a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Devido ao incentivo do governo na divulgação desse novo projeto, houve uma movimentação nacional que teve como consequência a inspiração de alunos e professores para participarem de outras olimpíadas. Esse aumento foi do número de participantes do estado de Santa Catarina na primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática no ano de 2006 foi impressionante, como é possivel notar na figura 2.

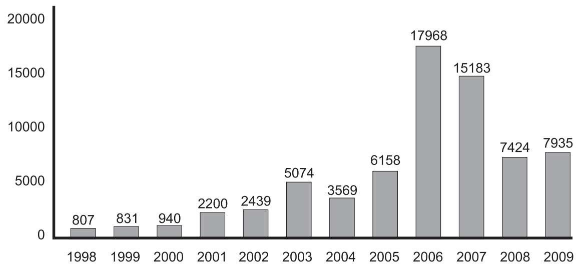


Figura 2: Número de participantes da primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática nos anos de 1998 a 2009.

Como qualquer outra olimpíada, a ORM também tem seus medalhistas. A classificação é feita através da soma dos pontos obtidos na 1ª fase da OBM e na prova da ORM. Os alunos que atingem as maiores pontuações são premiados com medalhas e certificados. Muitas vezes, os participantes obtêm pontuações semelhantes e, nesses casos, a organização opta por premiar mais de um aluno com cada tipo de medalha. Observe na figura 3 que a quantidade de premiados é relativa ao crescimento do número de participantes.

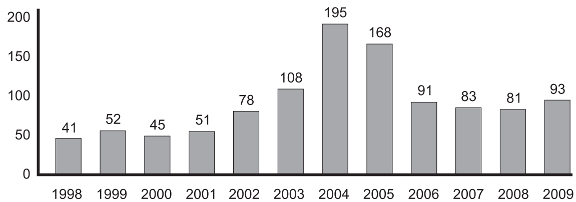


Figura 3: Número de premiados da Olimpíada Regional de Matemática nos anos de 1998 a 2009

O grupo tem como concepção não apenas premiar os estudantes, mas reconhecer e valorizar o trabalho dos professores, os maiores responsáveis pelo interesse dos seus alunos. Por isso, eles também são contemplados com certificados e brindes. Com a popularização da Olimpíada, no ano de 2003 notou-se que a ORM necessitava de um símbolo próprio. Dessa maneira, os então bolsistas do PET Renata Becker e Jucavo Savie Rocha o criaram.

Figura 4: Logotipo da Olimpíada Regional de Matemática.

A ideia principal era utilizar, de forma original, as cinco cores e circunferências do emblema da OBM, pois esta impulsionou a criação da ORM. Pensou-se também que o desenho deveria ter cinco pontas, para relacioná-lo com a estrela áurea. As áreas das intersecções das circunferências, que foram coloridas, representam cada uma das cinco regiões dos polos de aplicação das provas (Grande Florianópolis, Norte, Sul, Extremo Oeste e Central) e a estrela principal representa a organização da Olimpíada.

Com os dados apresentados, é possível notar que a ORM evoluiu ao longo dos anos, houve um aumento gradual ao número de polos e, consequentemente, do número de alunos participantes. Visando ao aprimoramento do projeto ORM, o grupo desenvolveu novas atividades. Em 2004, foi lançada a primeira edição da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina com o objetivo de divulgar a ORM e, paralelamente, a OBM em todo o estado. Nela estão inseridas as provas aplicadas na segunda fase, juntamente com seus gabaritos, listagem de premiados e artigos relacionados à matemática elaborados por acadêmicos e professores. Em 2006, foi criado o primeiro encontro de professores da ORM, um evento cujo objetivo é preparar os professores de forma que possam promover a Olimpíada em suas escolas, bem como esclarecer dúvidas e aproximá-los da organização. Em 2008 o projeto da ORM passou a ser considerado um projeto institucional permanente para a UFSC. Para que as pessoas de todo estado tivessem a oportunidade de assistir aos treinamentos, em 2010, eles passaram e ser gravados como vídeo aulas, no laboratório de Ensino à Distância do Departamento de Matemática, e disponibilizados na Home Page da ORM. Como se pode notar, a ORM é um projeto em constante aperfeiçoamento. O grupo procura sempre buscar alternativas que possibilitem o aprimoramento das atividades relacionadas à Olimpíada, bem como solucionar os empecilhos que possam surgir no decorrer do processo. É evidente que tudo que foi conquistado até o momento não se deve apenas ao trabalho da organização, mas também ao empenho dos professores de cada escola e à determinação dos alunos participantes.

Referências

[1] **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina**. Florianópolis. 2004-2010. Anual.

Critérios de Divisibilidade

Edson Luiz Valmorbida [1] e Fernando Correia [2]

Introdução

Se em um ano temos 365 dias e em uma semana, 7 dias, pergunta-se: em um ano há uma quantidade inteira de semanas, ou seja, sem sobra de dias? E em 2009 anos (desconsiderando anos bissextos)?

Você sabe se 678223073101 é divisível por 7? E por 6?

Um método para descobrir as respostas para estas perguntas é realizar o algoritmo da divisão e verificar o resto deixado pela operação. Mais adiante definiremos melhor este algoritmo. Porém, pode se tornar muito trabalhoso quando tomamos números muito grandes, como é o caso do número 678223073101. Para isto, utilizamos os critérios de divisibilidade, pelos quais identificamos mais facilmente se um número é divisível por outro, realizando operações menores com os dígitos do número.

Além disso, critérios de divisibilidade podem ser utilizados para verificar se um determinado número é primo ou não, informação esta que é muito útil tanto na resolução de exercícios (como por exemplo questões de olimpíada) como em problemas práticos como é o caso da criptografia.

No entanto, os critérios variam para cada número e, por isso, quando são lecionados na educação básica, os critérios de divisibilidade dos números mais utilizados são memorizados. O curioso é que estes critérios são fácilmente demonstráveis e é justamente isso que faremos neste artigo. Mas antes vamos deixar bem claro alguns conceitos e notações.

Observe o número 5632. Este número pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 5632 &= 5 \times 1000 + 6 \times 100 + 3 \times 10 + 2 = \\ &= 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2. \end{aligned}$$

[1]Graduando em Matemática e Computação Científica e bolsista PIBIC/CNPq da UFSC.
[2]Graduando em Matemática e bolsista do PET Matemática UFSC.

De modo geral, qualquer número inteiro $n = n_k n_{k-1} \dots n_0$ com dígitos n_k, n_{k-1},..., n_0 na base decimal pode ser escrito

$$n = n_k n_{k-1} \dots n_0 = n_k \times 10^k + n_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + n_1 \times 10 + n_0. \quad (1)$$

Ou ainda, fatorando um 10, temos

$$n = (n_k \times 10^{k-1} + n_{k-1} \times 10^{k-2} + \cdots + n_1) \times 10 + n_0. \quad (2)$$

Esse representação será muito útil nas demonstrações que iremos fazer.

Algoritmo da Divisão de Euclides

No colégio, o professor nos ensinou a fazer a divisão de um número por outro. Esta divisão resulta em um quociente e um resto. Por exemplo, se dividimos 14 por 3 temos o quociente é 4 e o resto é 2. De modo geral, podemos respresentar uma divisão através do Algoritmo da Divisão de Euclides:

"Dados dois números inteiros positivos n e m, existem inteiros não negativos q e r tais que

$$n = m \times q + r, \qquad 0 \leq r < m.\text{"} \quad (3)$$

No nosso exemplo,

$$14 = 3 \times 4 + 2. \quad (4)$$

Note que a condição $r < m$ $(2 < 3)$ é satisfeita.

Com isso, podemos definir formalmente o que significa um número ser divisível por outro.

Definição 1 *Dados dois números inteiros positivos n e m, dizemos que n é <u>divisível</u> por m se o resto da divisão de n por m for igual a* 0.

Vamos analisar a seguir alguns critérios que nos permitem dizer se um número é divisível por outro sem a necessidade de efetuar a divisão.

Critério de Divisibilidade por 2

Teorema 1 *Um número inteiro n é divisível por 2 se, e somente se, o algarismo da unidade for par, isto é, for igual a* 0, 2, 4, 6 *ou* 8.

O teorema acima é um critério de divisibilidade que você possivelmente já deve conhecer. Mas, como você sabe que ele sempre funciona? Será que não existe um número (muito grande) para o qual esse critério falha? Demonstrando o teorema acima teremos a confirmação de que este critério nunca falha.

Demonstração: Da representação (2) temos que n é dado por

$$\begin{aligned} n &= (n_k \times 10^{k-1} + n_{k-1} \times 10^{k-2} + \cdots + n_1) \times 10 + n_0 = \\ &= 2 \times 5 \times (n_k \times 10^{k-1} + n_{k-1} \times 10^{k-2} + \cdots + n_1) + n_0. \end{aligned}$$

Note que a primeira parte do lado direito da igualdade acima é um múltiplo de 2, pois é igual a 2 vezes um número inteiro (a parte do 5 vezes o que está entre parênteses).

Então, resta analisarmos o n_0 (algarismo da unidade) e ver se ele é divisível por 2 ou não. Dessa forma, se n_0 for divisível por 2 então n é divisível por 2.

De fato, como n_0 é um algarismo, temos que n_0 pode ser $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9, e daí fica fácil ver que para n_0 ser divisível por 2 temos que ter n_0 igual a $0, 2, 4, 6$ ou 8.

Portanto, para n ser divisível por 2 é necessário que n_0 (que é o algarismo da unidade) seja igual a $0, 2, 4, 6$ ou 8.

Por outro lado, se n_0 for igual a $0, 2, 4, 6$ ou 8 (o algarismo da unidade é par) então podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \times 0 \quad (k = 0); \\ 2 &= 2 \times 1 \quad (k = 1); \\ 4 &= 2 \times 2 \quad (k = 2); \\ 6 &= 2 \times 3 \quad (k = 3); \\ 8 &= 2 \times 4 \quad (k = 4); \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} n &= 2 \times 5 \times (n_k \times 10^{k-1} + n_{k-1} \times 10^{k-2} + \cdots + n_1) + 2 \times k = \\ &= 2 \times (5 \times (n_k \times 10^{k-1} + n_{k-1} \times 10^{k-2} + \cdots + n_1) + k), \end{aligned}$$

que é um múltiplo de 2. Portanto, n é divisível por 2 se n_0 for igual a $0, 2, 4, 6$ ou 8.

■

Critério de Divisibilidade por 3

Teorema 2 *Um número inteiro n é divisível por 3 se, e somente, a soma dos seus algarismos for divisível por 3.*

Demonstração: Inicialmente perceba que para todo número inteiro positivo k, o número $10^k - 1$ é sempre divisível por 3. O leitor que esteja familiarizado com o conceito de indução matemática pode usá-la para demonstrar essa afirmação, porém, aqui apenas daremos um mero esboço.

$$\begin{aligned}
10^0 - 1 = &\quad 1 - 1 = 0 = 3 \times 0 \\
10^1 - 1 = &\quad 10 - 1 = 9 = 3 \times 3 \\
10^2 - 1 = &\quad 100 - 1 = 99 = 3 \times 33 \\
10^3 - 1 = &\quad 1000 - 1 = 999 = 3 \times 333 \\
\vdots \qquad &\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Agora, diminuindo $n_k + n_{k-1} + \cdots + n_1 + n_0$ (soma dos algarismos de n) da representação (1) temos

$$\begin{aligned}
& n - [n_k + n_{k-1} + \cdots + n_1 + n_0] = \\
& = \big[n_k \times 10^k + n_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + n_1 \times 10 + n_0\big] \\
& - [n_k + n_{k-1} + \cdots + n_1 + n_0] = \\
& = n_k \times (10^k - 1) + n_{k-1} \times (10^{k-1} - 1) + \cdots + n_1 \times (10^1 - 1) \\
& + n_0 \times (1 - 1) = \\
& = n_k \times (10^k - 1) + n_{k-1} \times (10^{k-1} - 1) + \cdots + n_1 \times (10^1 - 1)
\end{aligned}$$

Pela observação feita acima, esta última igualdade é divisível por 3 e, portanto, existe um número inteiro M tal que

$$\begin{aligned}
n - [n_k + n_{k-1} + \cdots + n_1 + n_0] &= 3M \\
\Rightarrow n = [n_k + n_{k-1} + \cdots + n_1 + n_0] &+ 3M
\end{aligned}$$

Logo, n é divisível por 3 se, e somente se $n_k + n_{k-1} + \cdots + n_1 + n_0$ (soma dos algarismo de n) for divisível por 3.

■

Critério de Divisibilidade por 4

Teorema 3 *Um número inteiro n é divisível por 4 se, e somente, o número formado pelos dois últimos algarismos for divisível por 4.*

Demonstração: De forma análoga à demonstração do critério de divisibilidade por 2, temos que n é dado por

$$\begin{aligned} n &= (n_k \times 10^{k-2} + n_{k-1} \times 10^{k-3} + \cdots + n_2) \times 100 + n_1 n_0 = \\ &= 4 \times 25 \times (n_k \times 10^{k-2} + n_{k-1} \times 10^{k-3} + \cdots + n_2) + n_1 n_0. \end{aligned}$$

Logo, se n é divisível por 4, então, necessariamente, $n_1 n_0$ também é divisível por 4. Se afirmamos inicialmente que $n_1 n_0$ é divisível por 4, então podemos escrever $n_1 n_0$ como $4 \times t$ em que t varia entre 0 a 24. Assim, verificamos que

$$\begin{aligned} n &= 4 \times 25 \times (n_k \times 10^{k-2} + n_{k-1} \times 10^{k-3} + \cdots + n_2) + 4 \times t = \\ &= 4 \times (25 \times (n_k \times 10^{k-2} + n_{k-1} \times 10^{k-3} + \cdots + n_2) + t). \end{aligned}$$

Portanto, se o número formado pelos dois últimos algarismos for divisível por 4, então n também o é. Assim fica demonstrado este critério de divisibilidade.

■

Critério de Divisibilidade por 5

Teorema 4 *Um número inteiro n é divisível por 5 se, e somente, o algarismo da unidade é igual a 0 ou 5.*

Demonstração: Esse demonstração é muito parecida com a do critério de divisibilidade por 2 e deixaremos para você tentar fazê-la.

■

Critério de Divisibilidade por 6

Teorema 5 *Um número inteiro n é divisível por 6 se, e somente se, for divisível por 2 e por 3.*

Demonstração: Esta demonstração é um tanto mais simples a partir do momento que já temos os critérios de divisibilidade por 2 e por 3 demonstrados.

Por hipótese, n é divisível por 2, logo temos $n = 2q$ em que q é um número inteiro qualquer. Também n é divisível por 3, ou seja, $n = 3r$ em que r é um número inteiro qualquer. Assim, 2 e 3 são fatores de n. Portanto, $n = 2 \times 3 \times t$ em que t é um número inteiro, ou seja, $n = 6t$. Logo, é divisível por 6. Repare que, se afirmamos que n é divisível por 6, então podemos escrever $n = 6k$ em que k é um número inteiro, ou seja, $n = 2 \times 3 \times k$. Assim temos que n é divisível por 2 e por 3.

Então fica demonstrado que um número inteiro n é divisível por 6 se, e somente, for divisível por 2 e por 3.

■

Critério de Divisibilidade por 7

Teorema 6 *Um número inteiro n é divisível por 7 se, e somente, a diferença entre o dobro do último algarismo e o número formado pelos demais algarismos resulta um número divisível por 7.*

A demonstração deste critério não será abordada aqui por ser um tanto quanto mais rebuscada e assim, tomaria uma grande parte deste artigo. Sugerimos que o leitor busque-a em nossas referências.

Critério de Divisibilidade por 8

Teorema 7 *Um número inteiro n é divisível por 8 se, e somente se, os número formado pelos seus três últimos algarismos for divisível por 8.*

Demonstração: Esta demonstração também será deixada para que você faça. Basta você lembrar que 1000, assim como qualquer múltiplo dele, é divisível por 8. Veja a demonstração dos critérios de divisibilidade por 2 e por 4.

■

Critério de Divisibilidade por 9

Teorema 8 *Um número inteiro n é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos for divisível por 9.*

Demonstração: Novamente deixaremos a cargo do leitor a demonstração deste critério por ser idêntica ao critério de divisibilidade por 3. A dica que forncecemos é reparar que o número $10^k - 1$ também é divisível por 9.

■

Exercícios

Abaixo estão alguns exercícios para você treinar os critérios que mostramos neste artigo.

Exercício 1 *Mostre que o algarismo das unidades de um quadrado perfeito, isto é, um número da forma a^2, em que a é um número natural, só pode ser 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.*

Exercício 2 *Determine se cada número a seguir é divisível por 2, 5 ou por 7.*

$$17,\ 22,\ 28,\ 35,\ 140,\ 245,\ 8750,\ 823543$$

Exercício 3 *Usando os critérios de divisiblidade vistos, determine se cada número a seguir é divisível por 3, 4 ou por 9.*

$$12,\ 19,\ 54,\ 144,\ 3125,\ 3840,\ 37500,\ 1162261467$$

Exercício 4 *Mostre que para um número ser divisível por 15 é necessário e suficiente que seja divisível por 3 e por 5. Dica: olhe o critério de divisibilidade por 6.*

Exercício 5 *Verifique (não é necessário demonstrar) o seguinte critério de divisibilidade por 11: "Um número inteiro positivo n é divisível por 11 se a soma alternada dos seus algarismos, isto é, $n_k - n_{k-1} + n_{k-2} - \cdots - n_2 + n_1 - n_0$, também o for."*

Referências

[1]HEFEZ, Abramo. **Iniciação a Aritmética**. Rio de Janeiro: Impa, 2009. 126 p. (PIC OBMEP).

[2]**Revista do Professor de Matemática**, n. 58, p. 13-17, Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[3]JUNQUEIRA, Luís Carlos de Souza. **Critérios de Divisibilidade**. Trabalho de Conclusão de Curso de licenciatura em Matemática da UFSC, Florianópolis, 2001.

Uma Mistura Hiperbólica de Água e Sabão

Asteroide Santana [1]

Florianópolis - Santa Catarina

De maneira que fique acessível a estudantes do ensino básico, pretendemos apresentar as *funções hiperbólicas* e algumas de suas propriedades. O motivo pelo qual estamos fazendo isto é que tais funções raramente são estudadas nas escolas, mas têm uma elegância peculiar, conforme veremos a seguir. Para motivar ainda mais este estudo, buscamos uma aplicação bastante ingênua, porém muito interessante, que deu origem ao título deste artigo.

Imagine o seguinte experimento: construímos duas argolas circulares de arame, que podem ser de diâmetros diferentes, como na Figura 1;

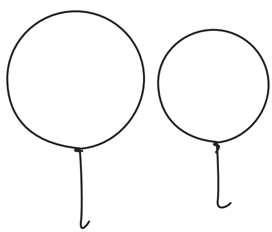


Figura 1: Argolas de arame.

[1] Professor Substituto do Departamento de Matemática da UFSC.

Em seguida, mergulhamos as duas argolas numa solução suficientemente concentrada de água e sabão sem encostar uma na outra. O leitor consegue imaginar a superfície que se forma entre as argolas quando as retiramos simultaneamente da solução e as deixamos posicionadas como na Figura 2? Se não, sugerimos que tente por em prática o experimento (**Atenção**: se o leitor tem menos de 10 anos de idade e decidir fazer o experimento, solicite a companhia de um adulto).

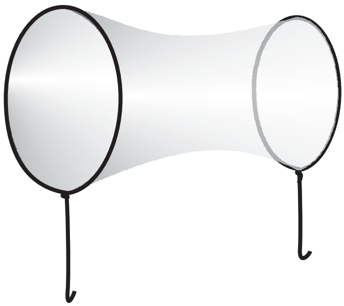


Figura 2: Bolha de sabão obtida com o experimento.

Pois bem, nosso objetivo agora é descrever matematicamente a tal superfície que observamos na Figura 2. Para isso, vamos precisar de uma função, que possivelmente o leitor nunca ouviu falar, chamada *Cosseno Hiperbólico*. Mas não se assuste, apesar do nome, não se trata de algo complicado nem de outro mundo.

Comecemos observando um fato muito interessante, que é o seguinte: qualquer função $f(x)$ pode ser escrita como a soma de duas funções, sendo uma *par* e a outra *ímpar*! Veja:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{função par}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{função ímpar}}.$$

Tente verificar isto, lembrando que uma função $g(x)$ é dita par quando $g(-x) = g(x)$ e é dita ímpar quando $g(-x) = -g(x)$. Por exemplo, $g(x) = x^2$ é uma função par, ao passo que $g(x) = x^3$ é uma função ímpar.

Vejamos o que acontece quando fazemos essa decomposição com a função $f(x) = e^x$:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Neste caso a função par é

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

e a função ímpar é

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Guarde estas funções, pois veremos mais adiante que elas são de especial interesse para nós.

Sabemos que as funções *seno*, que é ímpar, e *cosseno*, que é par, satisfazem a equação

$$x^2 + y^2 = 1,$$

que é a equação da circunferência representada na Figura 3. Ou seja, substituindo x por $sen(t)$ e y por $cos(t)$ na equação a igualdade é verificada[2]. Observe:

$$sen^2(t) + cos^2(t) = 1.$$

Trata-se da identidade fundamental da trigonometria. Daí o motivo pelo qual as funções trigonométricas também são chamadas de *funções circulares*. Você sabia disso?

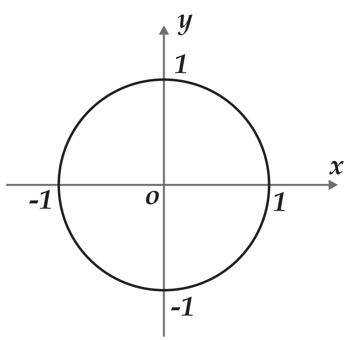


Figura 3: Circunferência de raio 1 centrada na origem.

[2]Estamos trocando a variável x por t apenas para evitar ambiguidades.

Agora lembre-se que a hipérbole da Figura 4 tem equação[3]

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Curiosamente, as funções $h(t)$ e $g(t)$, aquelas que destacamos anteriormente, satisfazem esta equação!! Veja: substituindo x por $h(t)$ e y por $g(t)$ resulta

$$\begin{aligned}
[h(t)]^2 - [g(t)]^2 &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(e^t)^2 + 2e^t e^{-t} + (e^{-t})^2}{2^2} - \frac{(e^t)^2 - 2e^t e^{-t} + (e^{-t})^2}{2^2} \\
&= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}}{4} = \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[h(t)]^2 - [g(t)]^2 = 1. \tag{1}$$

Aqui está um bom motivo para chamar h e g de *funções hiperbólicas*, em analogia às funções circulares.

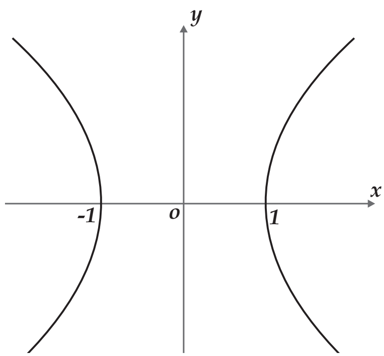


Figura 4: Ramos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

[3]Caso você não saiba disso, pode consultar o artigo do Prof. Gustavo, que é citado nas referências.

Mas a brincadeira não acaba por aqui! Certamente o leitor lembra que

$$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a).$$

Note o que acontece quando substituímos, no lado direito da equação, as funções *seno* e *cosseno* pelas funções g e h, respectivamente:

$$\begin{aligned} g(a)h(b) + g(b)h(a) =& \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^b - e^{-b}}{2} \cdot \frac{e^a + e^{-a}}{2} \\ =& \frac{2e^{a+b} - 2e^{-(a+b)}}{4} \\ =& \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} \\ =& g(a+b). \end{aligned}$$

Logo,

$$g(a+b) = g(a)h(b) + g(b)h(a). \qquad (2)$$

Sendo assim, nada mais sugestivo do que chamar a função g de *seno hiperbólico* e a função h de *cosseno hiperbólico*. Aliás, é exatamente assim que elas são conhecidas e costuma-se escrever

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ e } cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Além dessas, são definidas também as funções

$$\begin{aligned} tgh(x) &= \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} && (\textit{tangente hiperbólica}); \\ sech(x) &= \frac{1}{cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} && (\textit{secante hiperbólica}); \\ cossech(x) &= \frac{1}{senh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} && (\textit{cossecante hiperbólica}); \\ cotgh(x) &= \frac{cosh(x)}{senh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} && (\textit{cotangente hiperbólica}). \end{aligned}$$

Na tabela a seguir estão algumas das identidades satisfeitas pelas funções hiperbólicas. Na coluna da esquerda estão as identidades análogas correspondentes satisfeitas pelas funções circulares. Note que a diferença entre as identidades, quando existe, é apenas de um sinal!

Identidades Trigonométricas	Identidades Hiperbólicas
$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$	$senh^2(x) - cosh^2(x) = 1$
$sec^2(x) = 1 + tg^2(x)$	$sech^2(x) = 1 - tgh^2(x)$
$sen(a \pm b) = sen(a)cos(b) \pm sen(b)cos(a)$	$senh(a \pm b) = senh(a)cosh(b) \pm senh(b)cosh(a)$
$cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sen(a)sen(b)$	$cosh(a \pm b) = cosh(a)cosh(b) \pm senh(a)senh(b)$
$tg(a \pm b) = \dfrac{tg(x) \pm tg(b)}{1 \mp tg(a)tg(b)}$	$tgh(a \pm b) = \dfrac{tgh(x) \pm tgh(b)}{1 \pm tgh(a)tgh(b)}$

Neste ponto o leitor deve estar se perguntando: o que tudo isso tem que ver com a bolha de sabão?

Na verdade, vamos precisar apenas do cosseno hiperbólico para estudar a bolha. E para isso é necessário reconhecer o gráfico desta função que está esboçado na Figura 5. Para facilitar a compreensão, escrevemos

$$cosh(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

e esboçamos separadamente as curvas

$$y = \frac{e^x}{2} \text{ e } y = \frac{e^{-x}}{2},$$

representadas pelas linhas pontilhadas e também indicadas na Figura 5. Em seguida, somando ponto a ponto, temos o gráfico de $y = cosh(x)$, representado pela linha cheia.

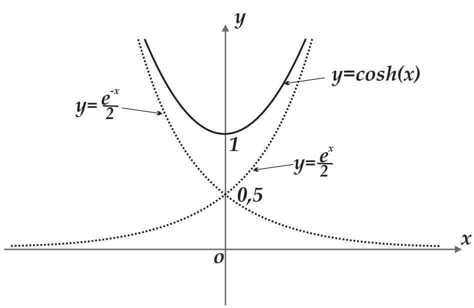


Figura 5: Esboçando o gráfico do cosseno hiperbólico.

Agora, exigindo um pouco mais da capacidade de abstração do leitor, sugerimos que imagine a figura que se forma ao rotacionarmos o gráfico do cosseno hiperbólico em torno do eixo das abscissas (eixo do x). Na Figura 6 tentamos representar a superfície obtida considerando apenas a parte do gráfico compreendida entre x_1 e x_2.

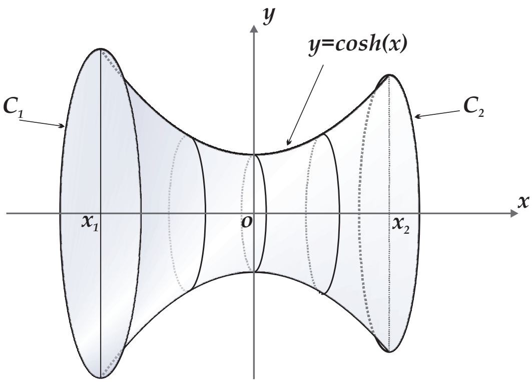


Figura 6: Superfície obtida pela rotação da curva $y = cosh(x)$ em torno do eixo das abscissas.

Pois bem, a figura assim obtida representa perfeitamente[4] a bolha de sabão do nosso experimento! Aqui pode-se imaginar que as circunferências C_1 e C_2 são as argolas ao passo que a bolha é a parte da figura que está entre C_1 e C_2. Infelizmente, a demonstração deste fato requer conhecimentos físicos e matemáticos mais avançados que não convém tratar neste contexto.

Além disso, é possível mostrar que o gráfico do cosseno hiperbólico também serve para representar a curva descrita por um cabo, de massa uniforme, suspenso por dois pontos: uma corda de varal ou um fio da rede elétrica suspenso por dois postes, por exemplo. Durante alguns anos acreditou-se que este tipo de curva seria perfeitamente representado pelo gráfico de uma função quadrática (uma parábola). No lugar de um fio da rede elétrica, também podemos imaginar uma corrente, e daí o motivo pelo qual o gráfico do cosseno hiperbólico é chamado de *catenária*, derivada da palavra grega *catena* que significa corrente.

[4]Claro que a bolha pode ter seu formato alterado dependendo do tamanho das argolas e da distância entre elas. Mas isso pode ser ajustado colocando-se constantes apropriadas na função.

Isto é tudo.

Agora sabemos o que são funções hiperbólicas e também como descrever matematicamente uma bolha de sabão, hiperbólica eu diria. Tente fazer o mesmo com a bolha de sabão tradicional, aquela que se obtém soprando uma argola.

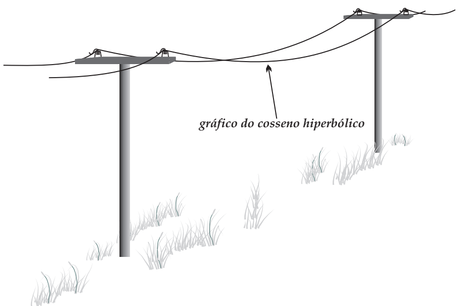


Figura 7: A curva $y = cosh(x)$ nos fios da rede elétrica.

Conversa com o Professor: chamamos a atenção dos professores para o fato de que as funções hiperbólicas podem perfeitamente ser apresentadas no Ensino Básico: seria um simples exemplo após a apresentação das funções exponenciais. Inclusive, seria interessante pôr em prática com os alunos o experimento aqui apresentado. Neste caso, seria mais conveniente fazer a exposição após o estudo das funções trigonométricas e das cônicas. Talvez o professor de Física também pudesse contribuir. Esta atitude seria útil para mostrar como os conceitos estão interligados (inclusive as disciplinas) e não separados em “caixinhas", conforme a impressão muitas vezes causada pela estrutura do currículo escolar e de boa parte dos livros didáticos. Claro que um trabalho desses depende de outros fatores relevantes que devem ser levados em conta, a disponibilidades de tempo, por exemplo. De qualquer forma, fica como uma sugestão.

Meus sinceros agradecimentos ao PET-Matemática da UFSC, que me deu a oportunidade de expor este trabalho.

Referências

[1]Howard, Anton - **Cálculo, um novo horizonte**. Editora Bookman, Porto Alegre, 2000.

[2]COSTA, Gustavo A. T. F. - **O cone e as Cônicas**. IN: Revista da Olímpiada Regional de Matemática Santa Catarina, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, V. 4, 2007, P. 79-89.

Como contar as frações?

Gustavo Felisberto Valente [1]

Florianópolis - Santa Catarina

Introdução

Este artigo foi escrito motivado por um problema que tive de (tentar) explicar para vestibulandos em um curso pré-vestibular promovido pelo PET Matemática da UFSC (Projeto Gauss). O problema é do concurso Vestibular da UFSC do ano de 2004, que era do tipo proposições múltiplas (somatório) e, entre outras alternativas, havia estas:

- É possível obter uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.
- É possível obter uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto $\mathbb{Q}^+$ dos números racionais positivos.

A resposta, em ambos os casos, é sim. Mas eu só fui descobrir isso na faculdade. Aliás, só conheci a demonstração formal no último ano de curso. Quando li, pensei em como poderia explicar essas alternativas aos alunos. O primeiro item foi fácil de elaborar, mas o segundo levou um pouco mais de trabalho (um tanto filosófico até). Vou tentar explicar uma ideia mais intuitiva por trás da demonstração mais clássica deste fato.

Antes de tudo, quero explicar o porquê do título do artigo. Para resolver o primeiro problema, irei definir diretamente uma função que associa cada número natural a um número inteiro e depois verificaremos que ela é bijetiva. Mas para o segundo problema a resposta não é assim fácil. Eu irei definir intuitivamente o que significa, neste texto, a expressão "ter bijeção com os naturais". Vou fazê-la com o sentido de "contar elementos". Como os números racionais podem ser expressos por frações, o problema de

[1]Graduando do curso de Matemática - Licenciatura da UFSC

criar uma bijeção entre os racionais e os naturais passará a ser um problema de como contar frações.

Mas, antes de ficar divagando sobre isso, vamos ver a solução do primeiro problema para compreendermos melhor a profundidade do segundo.

Contando os inteiros

Nosso objetivo aqui é criar uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais e o contradomínio é o conjunto dos números inteiros. Esta função tem que ser bijetiva, ou seja, cada inteiro deve estar associado a um (e somente um) número natural. Em outras palavras, queremos contar os números inteiros da mesma forma que contamos objetos em uma coleção, sem repetir nenhum elemento e não deixando nenhum de fora.

Uma maneira de contar os números inteiros seria contar primeiro os números positivos e, **em seguida**, contar os números negativos. Mas isto não é uma boa ideia, pois os números positivos por si só já são em quantidade infinita. Então não haveria **em seguida** depois do processo. Para contornar este problema, vamos contar os positivos e negativos conjuntamente da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{Z}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & \dots \end{array}$$

Supondo que tivéssemos muito, mas muito tempo, seríamos capazes de contar uma quantidade arbitrariamente grande de números inteiros, e não deixaríamos ninguém de fora!

Para se convencer mesmo de que essa contagem é bijetiva, devemos brincar de bandido e mocinho. Como é? Essa brincadeira de bandido e mocinho se faz durante todo um curso de matemática na faculdade. Funciona assim:

- O bandido diz um número do contradomínio (neste caso um número inteiro).
- O mocinho deve falar um número natural de forma que, com as espeficações de contagem que fizemos, esse número natural nos diz exatamente a posição do inteiro dado pelo bandido.

Por exemplo, se o bandido disser -3, o mocinho pode falar 6. Como o -3 está na sexta posição da nossa contagem, então o mocinho vence!

Se o bandido nunca conseguir vencer esse jogo, então a nossa contagem é chamada sobrejetiva. Um exemplo de contagem em que o bandido pode vencer é a contagem que nós pensamos anteriormente: "Positivos primeiro e depois os negativos". Com essa contagem o bandido pode dizer qualquer número negativo, digamos, -3 e o mocinho não conseguirá dizer um número natural que vença o jogo. Qualquer número natural que o mocinho disser, por exemplo o número 6, naquela contagem ele representa o próprio número.

Para verificar a injetividade, basta notar que a nossa contagem nunca retorna a um número anterior em valor absoluto já contado. Por exemplo, após passarmos pelo 8 e -8, jamais retornaremos a eles. Note também que os números que têm os mesmos valores absolutos não são contados repetidamente. Por exemplo, o 8 só é contado uma vez, em seguida é o -8, e depois nunca mais a contagem retorna a estes números.

Vamos agora definir algebricamente esta contagem. Vamos chamar de f a função procurada. Note que estamos avançando nos números em valor absoluto de dois em dois. Então desconfiamos que a nossa função deve separar os casos em pares e ímpares. Observe que os números ímpares contam sempre os números positivos, enquanto que os números pares contam sempre os números negativos, exceto o zero, que conta o zero.

Vamos primeiro tentar encontrar a fórmula para descrever os ímpares. Note que $f(1) = 1$, $f(3) = 2$, $f(5) = 3$, $f(7) = 4$, etc. Com algum esforço você conclui que uma boa fórmula seria $f(n) = \dfrac{n+1}{2}$, se n é ímpar.

Os pares saem mais naturalmente. Note que $f(0) = 0$, $f(2) = -1$, $f(4) = -2$, $f(6) = -3$, etc. Então o mais natural aqui é definir $f(n) = \dfrac{n}{-2}$, se n é par.

Então o nosso candidato a bijeção é: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \\ -\dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Vamos agora verificar formalmente que esta função é bijetiva, relembrando aqui, as definições de função injetiva e sobrejetiva.

Dizemos que uma função é injetiva se argumentos diferentes levam em imagens diferentes. Em outras palavras, nunca podemos ter dois elementos distintos do domínio cuja função os leva a números iguais. Por exemplo, a função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por $g(n) = n^2$ não é injetiva pois os números -2 e 2 são levados pela função ao mesmo resultado 4. Em linguagem formal temos a seguinte definição.

Definição 1 *Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é injetiva se para quaisquer $x, y \in A$ com $x \neq y$ temos que $f(x) \neq f(y)$.*

Dizemos que uma função é sobrejetiva se todos os números do contradomínio são atingidos pela função. Em outras palavras, nunca podemos ter um elemento sobrando no contradomínio. Por exemplo, a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(n) = n^2$ não é sobrejetiva pois o número 3 não é atingido pela função, isto é, não existe número natural que elevado ao quadrado dá 3. Em linguagem formal temos a seguinte definição.

Definição 2 *Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é sobrejetiva se para qualquer $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Agora que temos todos os ingredientes formais à mesa, podemos servir nosso banquete e descobrir se a nossa função f definida acima é bijetiva.

Proposição 1 *A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ é injetiva.*

Demonstração: Para demonstrar este fato devemos provar o que está escrito na definição de função injetiva. Lá diz que para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, com $x \neq y$, temos que $f(x) \neq f(y)$. Então vamos tomar $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$, e verificar se é verdade que $f(x) \neq f(y)$. Para verificar isso devemos fazer as contas usando a fórmula da função f apresentada anteriormente. Mas temos um problema! A fórmula da f depende do fato de x e y serem pares ou ímpares. Então vamos ter que dividir em casos:

1. Ambos são pares.

   Neste caso, escreva $x = 2n_1$ e $y = 2n_2$, em que $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.[2] Como $x \neq y$ então necessariamente devemos ter $n_1 \neq n_2$. Vamos aplicar f em x e y e torcer para que $f(x)$ seja diferente de $f(y)$. De fato, temos que

$$f(x) = \frac{x}{-2} = \frac{2n_1}{-2} = -n_1$$
$$f(y) = \frac{y}{-2} = \frac{2n_2}{-2} = -n_2.$$

   Como $n_1 \neq n_2$ então é claro que $-n_1 \neq -n_2$. Logo $f(x) \neq f(y)$.

[2] Este é um velho truque de matemática. Podemos escrever todos os números pares deste jeito. Isto é verdade pelo fato de todos os números pares serem múltiplos de 2. Isto nos permite manipular os números pares a fim de fazermos demonstrações matemáticas.

2. Ambos são ímpares.

   Neste caso, escreva $x = 2n_1 + 1$ e $y = 2n_2 + 1$, em que $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.[3] Como $x \neq y$ então necessariamente devemos ter $n_1 \neq n_2$. Vamos aplicar f em x e y e torcer para que $f(x)$ seja diferente de $f(y)$. De fato, temos que

$$f(x) = \frac{x+1}{2} = \frac{(2n_1+1)+1}{2} = \frac{2n_1+2}{2} = n_1 + 1$$
$$f(y) = \frac{y+1}{2} = \frac{(2n_2+1)+1}{2} = \frac{2n_2+2}{2} = n_2 + 1.$$

   Como $n_1 \neq n_2$, então é claro que $n_1 + 1 \neq n_2 + 1$. Logo $f(x) \neq f(y)$.

3. Um é par e outro é ímpar.

   Neste caso, escreva $x = 2n_1$ e $y = 2n_2 + 1$, em que $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.[4] Vamos aplicar f em x e y e torcer para que $f(x)$ seja diferente de $f(y)$. De fato, usando as contas que já fizemos, temos que

$$f(x) = -n_1$$
$$f(y) = n_2 + 1.$$

   Como n_1 é um número natural então $-n_1$ é um número negativo. Da mesma forma conclui-se que $n_2 + 1$ é um número positivo. Portanto eles não podem ser iguais, ou seja, $f(x) \neq f(y)$.

Em todos os três casos temos que se $x \neq y$ então $f(x) \neq f(y)$. Logo a nossa função f é realmente injetiva!

Proposição 2 *A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ é sobrejetiva.*

Demonstração: Para demonstrar este fato devemos provar o que está escrito na definição de função sobrejetiva. Lá diz que para qualquer $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Então vamos tomar $y \in \mathbb{Z}$ e verificar se é verdade que existe um número natural x tal que $f(x) = y$. Para verificar isso devemos fazer as contas usando a fórmula da função f apresentada anteriormente. Se $y = 0$, basta tomar $x = 0$. Se o nosso y escolhido for positivo, o número x procurado tem que ser ímpar. Por outro lado se y é negativo, x deve ser par. Então vamos ter que dividir em casos:

[3] Isto é verdade pois todo número ímpar deixa resto 1 na divisão por 2.

[4] Aqui estamos supondo x par e y ímpar. Se fosse o contrário não haveria problema, a demonstração far-se-ia de maneira análoga bastando trocar x por y.

1. y é positivo

   Pela fórmula da f, os valores de x possíveis para que o resultado de $f(x)$ seja positivo são os números ímpares. Portanto, já sabemos de antemão que x deve ser ímpar. Então a fórmula da f no valor de x é:

   $$f(x) = \frac{x+1}{2}$$

   Como queremos que o valor de $f(x)$ seja igual a y, então resolvemos a equação abaixo para encontrar o valor de x:

   $$y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow x = 2y - 1.$$

   Logo, para $x = 2y - 1$ temos que $f(x) = y$.[5]

2. y é negativo

   Pela fórmula da f, os valores de x possíveis para que o resultado de $f(x)$ seja negativo são os números pares. Portanto já sabemos de antemão que x deve ser par. Então a fórmula da f no valor de x é:

   $$f(x) = \frac{x}{-2}$$

   Como queremos que o valor de $f(x)$ seja igual a y, então resolvemos a equação abaixo para encontrar o valor de x:

   $$y = \frac{x}{-2} \Rightarrow x = -2y.$$

   Logo, para $x = -2y$ temos que $f(x) = y$.[6]

Portanto, para qualquer y escolhido, seja ele positivo, negativo ou zero, sempre conseguimos encontrar um x tal que $f(x) = y$. Logo, f é sobrejetiva.

Como f é uma função sobrejetiva e injetiva, então f é bijetiva. Logo, podemos sim obter uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

[5] Se você achou esta demonstração duvidosa, substitua y por qualquer número e note que este processo funciona sempre. Este é exatamente o jogo do bandido e mocinho enunciado anteriormente: para cada y que o bandido desafia, o mocinho responde com o valor de $x = 2y - 1$.

[6] Lembra do bandido e do mocinho? Se o bandido disser $y = -3$, o mocinho pode falar $x = (-2) \times (-3) = 6$.

Contando os racionais positivos

Agora o processo se torna mais complicado. Este problema é apresentado em diversos livros de matemática do ensino superior como o problema de enumeração do conjunto dos números racionais. Iremos abordar aqui algumas maneiras de resolver este problema.

O desafio

Sabemos que os números racionais, como o nome sugere, são os números que podem ser escritos em forma de razão entre dois números inteiros. Por exemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$. Portanto, contar números racionais é equivalente a contar frações. No nosso problema se pede para contar os números racionais positivos.

Poderíamos tentar contar os números racionais positivos através da ordem crescente. O problema é: por onde começar? O zero não é um número positivo. Qualquer número que escolhermos como ponto de partida não funcionará, pois dado um número racional positivo sempre existe um outro menor que ele. Essa propriedade é a que chamamos em matemática de densidade: entre quaisquer dois números racionais existe sempre um outro número racional. É fácil verificar essa propriedade. Dados dois números racionais positivos a e b, o número $\frac{a+b}{2}$ (a média aritmética de a e b) também é um número racional positivo e está entre a e b. Então sem chance de contarmos os racionais em ordem crescente.

O segredo é aproveitar a representação dos números em forma de fração. Uma ideia seria fixar um denominador, digamos 2, e contar todas as frações que têm denominador 2. Por exemplo: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$. Mas aí cairíamos naquele problema que vimos anteriormente: há uma infinidade de números com denominador 2, então deixaríamos um monte de frações de fora. Por exemplo, $\frac{1}{3}$ não seria contado, já que $\frac{1}{3}$ não tem denominador 2 e também não pode ser escrito como tal.

O segredo então é contar as frações alternadamente. Como assim? Seguem algumas abordagens sobre este fato segundo alguns autores.

Método da força bruta

Jerrold E. Marsden (Universidade da Califórnia, Berkeley) e Michael J. Hoffman (Universidade do Estado da Califórnia, Los Angeles) escreveram em seu livro *Elementary Classical Analysis* o seguinte texto:

> "(...) Isto significa que $\mathbb{Q}$ pode ser colocado em correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$ (ou um subconjunto dele). Todo o $\mathbb{Q}$ pode ser apresentado como uma lista ou sequência. Uma maneira de fazer isto é:
>
> $$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 4, -4, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 5, \ldots$$
>
> Isto é, comece com $0, 1, -1, 2, -2$, e então liste todas as frações que têm denominador 2 quando expresso na forma irredutível, em seguida liste 3 e -3 e as frações com denominador 3, e então prossiga, evitando repetições."

Como no nosso caso só queremos os números positivos, então podemos reescrever a lista assim:

$$1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 4, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 5, \ldots$$

Esta lista é injetiva pois definimos a contagem de forma que não repetíssemos valores. Note que esta enumeração também é sobrejetiva. De fato, se o bandido disser um número racional com um denominador muito grande, o mocinho precisaria escrever toda a lista manualmente para poder dar a resposta exata. Mesmo assim é perfeitamente possível dar essa resposta. Então essa lista é sim bijetiva (e aqui não será feita a demonstração).

Método da soma

Outra maneira bem comum de abordar a enumeração dos números racionais positivos é a seguinte. Começemos contando todas as frações cuja soma do numerador com o denominador é 2: no caso seria somente $\frac{1}{1} = 1$. Agora todas as frações cuja soma é 3: $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{1}$. E assim por diante. Vamos escrever uma lista com os primeiros números para verificarmos:

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{\text{soma 2}}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}}_{\text{soma 3}}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}}_{\text{soma 4}} \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}}_{\text{soma 5}}, \underbrace{\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}}_{\text{soma 6}}, \ldots$$

Note que $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$. Então o número 1 foi contado mais de uma vez. Isto também aconteceu com $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ e também com $2 = \frac{4}{2}$. Logo essa contagem não é bijetiva. Isto ocorreu porque estávamos contando “as mesmas frações” repetidamente. Estas “mesmas frações” são as formas redutíveis das que já foram contadas. Para corrigir isso, vamos impor uma nova regra: iremos fazer esta mesma contagem mas retirando as frações redutíveis.

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{\text{soma } 2},\ \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}}_{\text{soma } 3},\ \underbrace{\frac{1}{3}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{3}{1}}_{\text{soma } 4},\ \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}}_{\text{soma } 5},\ \underbrace{\frac{1}{5}, \cancel{\frac{2}{4}}, \cancel{\frac{3}{3}}, \cancel{\frac{4}{2}}, \frac{5}{1}}_{\text{soma } 6}, \ldots$$

Deste modo estamos forçando a injetividade desta enumeração. Esta função é sobrejetora pelos mesmos motivos do método da força bruta.

Método das diagonais

Talvez a enumeração mais abordada na literatura seja o método das diagonais de Cantor. Que consiste em escrever uma tabela infinita de números racionais na qual: na primeira linha aparecem todas as frações irredutíveis cujo denominador é 1; na segunda linha, liste todas as frações irredutíveis cujo denominador é 2; e assim por diante. Vamos representar aqui um trecho da tabela, bem como o sentido de contagem (já vamos entender como funciona).

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} \\[1em]
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\[1em]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\[1em]
\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} \\[1em]
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5}
\end{array}$$

A contagem é feita da seguinte forma: iremos acompanhar as setas de cima para baixo, no sentido que elas apontam. E iremos contar as frações que ela intercepta. Por exemplo, a primeira seta intercepta somente a fração $\frac{1}{1}$; a segunda seta intercepta as frações nesta ordem: $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$; e assim por diante. Então a contagem fica assim:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{5}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{7}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Por mais aleatória e aparentemente bagunçada que tenha ficado nossa lista, este método é o que tem a demonstração da sobrejetividade mais fácil de descrever.

Vamos lá, o bandido diz uma fração, digamos que seja $\frac{7}{3}$. Nós, os mocinhos, precisamos achar a posição n da contagem que identifica a fração dada pelo bandido.

Para tal, precisamos localizar essa fração na tabela, isto é, saber em qual linha e coluna ela está. Como o denominador é 3, então a fração dada está na terceira linha. Quanto à coluna, o mocinho precisa escrever manualmente as frações irredutíveis com denominador 3 em ordem crescente até chegar na que o bandido falou. Neste caso, seria a quinta coluna[7]. Então sabemos que a nossa fração está na terceira linha e quinta coluna. Vamos denotar esta posição por $(3, 5)$ em que o primeiro número representa a linha onde a fração está posicionada e o segundo número, a coluna.

Note que a primeira seta intercepta uma fração; a segunda seta, duas; a terceira, três; e assim por diante. Então temos que saber qual seta interceptará $\frac{7}{3}$ para podermos ter uma aproximação para o valor de n. Observe o seguinte padrão:

- A primeira seta intercepta a fração que está na posição $(1, 1)$, e $1 + 1 = 2$;
- A segunda seta intercepta as frações que estão nas posições $(1, 2)$ e $(2, 1)$, e $1 + 2 = 2 + 1 = 3$;
- A terceira seta intercepta as frações que estão nas posições $(1, 3)$, $(2, 2)$ e $(3, 1)$, e $1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4$;

Isto se repetirá sempre. Então, se soubermos a soma das "cordenadas da posição" da fração dada, poderemos aproximar o valor de n procurado.

Vimos que $\frac{7}{3}$ está na posição $(3, 5)$, cuja soma das cordenadas vale 8. Então ele será interceptado pela sétima seta. Portanto, já foram contadas $1+2+3+4+5+6 = 21$ frações pelas 6 setas anteriores. Agora só falta somar as frações que faltam até chegar

[7] Apesar de este ser um passo manual, ainda sim requer menos esforço do que os métodos anteriores, pois neste caso só é necessário escrever os valores com um denominador fixo.

ao $\frac{7}{3}$. Nem precisamos construir a tabela para isso. Note que as setas interceptam as frações de cima para baixo, de acordo com as linhas. Então $\frac{7}{3}$ será a terceira fração interceptada pela sétima seta (pois $\frac{7}{3}$ está na terceira linha). Logo, a fração fornecida pelo bandido é a vigésima quarta fração na nossa contagem, ou seja, $n = 24$. (Ufa, conseguimos!)

Agora vamos generalizar o algoritmo que descrevemos aqui. Seja $\frac{p}{q}$ a fração fornecida pelo bandido. Suponha que esta fração esteja na posição (m, q) da tabela (esta é a parte manual do trabalho). Então ele será interceptada pela $(m + q - 1)$-ésima seta. Como ela está na m-ésima linha, então ela será a m-ésima fração interceptada pela seta. Portanto, defina $n = 1+2+3+\ldots+(m+q-2)+m$ e o resultado segue.

Se quisermos perfumar a obra, podemos calcular a soma $1+2+3+\ldots+(m+q-2)$ através da fórmula da soma dos $m + q - 2$ primeiros números inteiros. Ficaria:

$$n = \frac{(m+q-2)(m+q-1)}{2} + m.$$

Conclusão

Note que a contagem dos números inteiros ocorre de uma maneira mais natural e convincente do que os três métodos apresentados para enumerar os números racionais positivos. No caso dos números inteiros, a demonstração foi feita inclusive através do método formal visto em um curso de matemática do ensino superior. Nos três casos envolvendo números racionais positivos, precisamos "assumir" uma estratégia de verificação manual para se certificar que a função definida é realmente sobrejetiva. Só através do método da diagonal de Cantor é que temos uma "fórmula fechada" para determinar a posição do número na contagem.

Embora seja possível abordar este conteúdo no terceiro ano do ensino médio, acredito que o problema é de altíssima dificuldade para uma questão de vestibular. Ela foi uma questão de cunho estritamente teórico e que exige pouco da criatividade ou capacidade de resolver problemas de maneira esperta e lógica, que eu acredito que deva ser o enfoque de um concurso como o vestibular. Muitas destas provas abordam conteúdos extremamente específicos que necessitam da "decoreba" ou de "sacadinha" para resolver. O ideal seria que não fosse assim.

Referências

[1]SILVA, Ivan Pontual Costa. **Os Números e o Infinito. Florianópolis: Revista da Olímpiada Regional de Matemática do estado de Santa Catarina**, 2006.

[2]MARSDEN, Jerrold E.. **Elementary Classical Analysis**. Berkeley: W. H. Freeman, 1993.

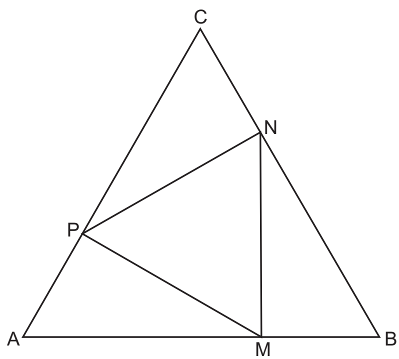
[3]RUDIN, Walter. **Principles of Mathematical Analysis**. Berkeley: Mcgraw-hill, 1976.

Um problema de geometria, pontos fixos, pontos de Brocard e a desigualdade de Erdös-Mordell

Bianca de Souza[1] e José Luiz Rosas Pinho[2]

Na prova da segunda fase da *XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina* (ORM), nível 2, encontra-se o seguinte problema de geometria (problema 3 - veja neste número da Revista a resolução):

Na figura, $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero de lado igual a *l*, e $\triangle MNP$ é um triângulo inscrito em $\triangle ABC$ tal que MN é perpendicular a AB, NP é perpendicular a BC e PM é perpendicular a AC.



Explique por que $\triangle MNP$ também é equilátero e calcule a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle MNP$.

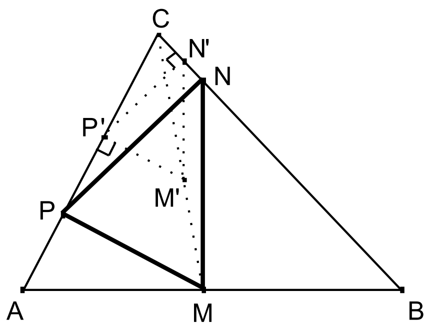
Na resolução deste problema obtém-se $BM = CN = AP = \dfrac{l}{3}$, o que, por sua vez mostra, curiosamente, a <u>existência</u> do triângulo $\triangle MNP$ com a propriedade de ter

[1] Aluna do curso de Matemática da UFSC, habilitação licenciatura.
[2] Professor do Departamento de Matemática da UFSC.

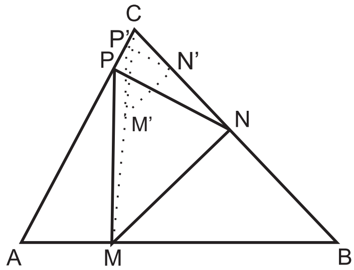
os lados respectivamente perpendiculares aos lados do triângulo $\triangle ABC.$ A resposta para o problema acima é que a razão entre as áreas dos dois triângulos é

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle MNP}} = 3$$

Na verdade, dado qualquer triângulo acutângulo $\triangle ABC$, existe um triângulo $\triangle MNP$ inscrito no $\triangle ABC$ (ou seja, com os vértices **M**, **N** e **P** respectivamente nos lados de $\triangle ABC$) com a propriedade citada acima. Tal existência agora não é tão simples de provar, mas uma olhada no processo de construção (com régua e compasso), através de homotetia, do triângulo $\triangle MNP$ é suficiente para nos "convencer"(a rigor, essa mesma construção nos permite provar a existência do triângulo $\triangle MNP$) de que tal triângulo existe (e é único):



Na verdade há um outro triângulo $\triangle MNP$ com lados respectivamente perpendiculares aos lados do triângulo $\triangle ABC$, mas tal que **MN** é perpendicular a **BC**, **NP** é perpendicular a **AC** e **PM** é perpendicular a **AB**. Os triângulos obtidos nos dois casos são congruentes e estão inscritos em uma mesma circunferência.



Em [1] a existência de $\triangle MNP$ é discutida de forma analítica usando-se uma sequência convergente de pontos sobre o lado **AB** do triângulo $\triangle ABC$.

Uma pequena experiência com um software de geometria dinâmica, como o *Cabri Géomètre*, nos permitiu conjeturar que a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle MNP$ não é menor do que 3.

Neste artigo apresentamos a solução para esse problema[3], que pode ser enunciado assim:

Seja $\triangle ABC$ uma triângulo acutângulo qualquer e seja $\triangle MNP$ o triângulo inscrito no $\triangle ABC$ tal que os lados MN, NP e PM sejam, respectivamente perpendiculares aos lados AB, BC e AC do triângulo $\triangle ABC$. Provar que a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle MNP$ satisfaz

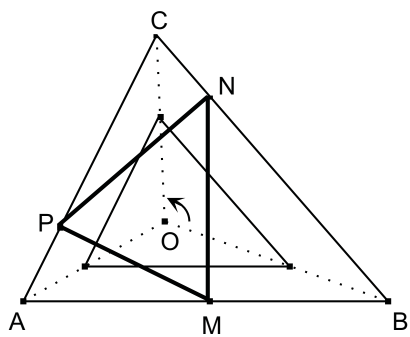
$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle MNP}} \geqslant 3$$

e que a igualdade ocorre se, e somente se o triângulo $\triangle ABC$ for equilátero.

Em primeiro lugar devemos observar que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle MNP$ são semelhantes (pois seus lados são respectivamente perpendiculares, o que implica que seus ângulos são respectivamente congruentes), com os pontos **M**,**N** e **P** respectivamente homólogos aos pontos **A**, **B** e **C** e com a mesma orientação (os pontos **A**, **B** e **C** do triângulo $\triangle ABC$ são lidos no sentido anti-horário e o mesmo ocorre com os pontos **M**, **N** e **P** do triângulo $\triangle MNP$). Isso significa que a semelhança entre os

[3]O conteúdo deste artigo foi retirado do Trabalho de Conclusão de Curso da autora, *Centros de um triângulo*, em fase de elaboração, para o grau de Licenciada em Matemática a ser obtido em 2011.

dois triângulos, como uma transformação geométrica, é uma composta de isometrias (sem reflexão axial, devido ao fato de que a orientação é mantida) e de uma homotetia. A semelhança do $\triangle ABC$ para o $\triangle MNP$ pode ser obtida através de uma homotetia de razão menor do que 1 com centro apropriado e de uma rotação de $90°$ (no sentido anti-horário) em torno do mesmo centro, como nos mostra a figura abaixo:



Que centro deve ser esse? Observamos que essa semelhança, de razão menor do que 1, leva o triângulo $\triangle ABC$ no triângulo $\triangle MNP$ que está inteiramente contido no $\triangle ABC$. Isso nos remete ao chamado **Teorema do ponto fixo de Banach**, também conhecido como **Princípio das contrações de Banach** ou ainda **Lema das contrações**. Tal resultado, no contexto das transformações geométricas, nos diz que uma transformação (com determinada propriedade, como é o caso de uma semelhança) entre duas figuras, que tem como imagem uma figura inteiramente contida na figura original, possui um único ponto fixo, isto é, um ponto da figura domínio que é levado nele mesmo na figura imagem. Em outras palavras, se as duas figuras em questão são mapas (de um país, um estado ou uma cidade), e se o mapa reduzido (em escala menor) for colocado sobre o mapa maior, de modo que ele fique totalmente contido no mapa maior, então haverá um único ponto geográfico (p.ex., uma cidade) que coincidirá nesses dois mapas. Em um número anterior desta Revista [2] propusemos o problema de como determinar, com régua e compasso, tal ponto fixo.

Na figura acima observe que os lados **AB**, **BC** e **CA** do triângulo $\triangle ABC$ são levados, pela semelhança, respectivamente nos lados **MN**, **NP** e **PM** do triângulo

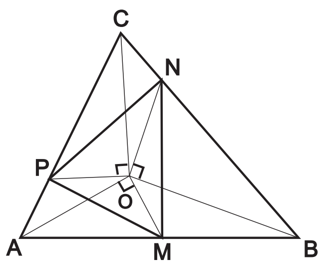
$\triangle MNP$. O centro **O**, da composta pela homotetia e rotação de $90°$, que procuramos deve ser o ponto fixo dessa composta. Raciocinando inversamente, se aplicarmos uma rotação de 90º, no sentido horário, ao triângulo $\triangle MNP$, em torno do ponto fixo **O**, obteremos um triângulo semelhante com os lados respectivamente paralelos aos lados do triângulo $\triangle ABC$. Esses dois triângulos são homotéticos, com centro de homotetia **O**. Isso significa que a razão de semelhança k de $\triangle ABC$ para $\triangle MNP$, dada por

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = k \tag{1}$$

também é dada por

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{OP}{OC} = k, \tag{2}$$

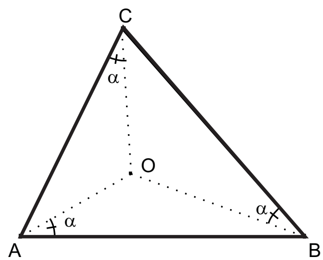
já que o ponto **O** é o ponto fixo dessa semelhança. Além disso, como a rotação realizada é uma rotação de $90°$, então os ângulos $\angle AOM$, $\angle BON$ e $\angle COP$ devem ser retos:



Segue-se então desse fato e de (2) que os triângulos $\triangle AOM$, $\triangle BON$ e $\triangle COP$ são semelhantes (caso lado-ângulo-lado de semelhança de triângulos), e isso implica que os ângulos $\angle OAM$, $\angle OBN$ e $\angle OCP$ são congruentes. Segue-se que o ponto **O** é **o primeiro ponto de Brocard do triângulo** $\triangle ABC$.

Um ponto **O** é dito **primeiro ponto de Brocard de um triângulo** $\triangle ABC$ se os vértices **A**, **B** e **C** estão orientados no sentido anti-horário, e se os ângulos $\angle OAB$,

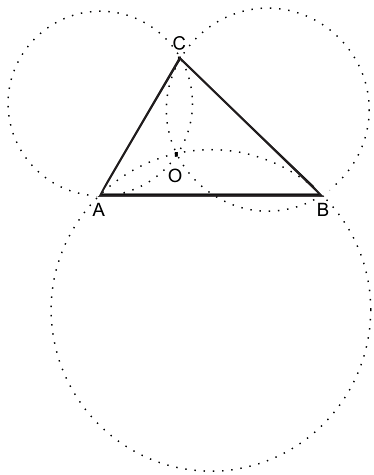
$\angle OBC$ e $\angle OCA$ forem congruentes de medida α. Tal ângulo é chamado de (primeiro) **ângulo de Brocard**:



Se um ponto **O** é tal que os ângulos $\angle OAC$, $\angle OCB$ e $\angle OBA$ são congruentes, então **O** é dito **segundo ponto de Brocard do triângulo** $\triangle ABC$.

A intersecção de três circunferências, uma que passa por **A** e **B** e é tangente a **BC** no ponto **B**, outra que passa pelos pontos **B** e **C** e é tangente a **AC** no ponto **C**, e a terceira que passa pelos pontos **A** e **C** e é tangente a **AB** no ponto **A**, nos fornece um primeiro ponto de Brocard do triângulo $\triangle ABC$.

Reciprocamente, se um ponto **O** é um primeiro ponto de **Brocard** de um triângulo $\triangle ABC$, então ele é o ponto de intersecção das circunferências citadas acima. Isso significa que o primeiro ponto de Brocard de um triângulo é único.



Para provar nossa afirmação inicial de que $\dfrac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle MNP}} \geqslant 3$ ou, equivalentemente, $\dfrac{A_{\triangle MNP}}{A_{\triangle ABC}} \leqslant \dfrac{1}{3}$, precisamos provar que a razão de semelhança k do triângulo $\triangle ABC$ para o triângulo $\triangle MNP$ deve ser tal que

$$k \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{3}$$

Como os triângulos $\triangle AOM$, $\triangle BON$ e $\triangle COP$ são retângulos, segue-se de (2) e de (3) que devemos ter

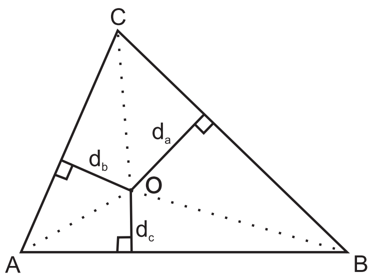
$$k = \tan\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ou seja, } \alpha \leqslant 30°.$$

Um resultado conhecido sobre o ponto de Brocard é que o ângulo de Brocard α é menor ou igual a $30°$. Isto permitirá concluir a parte inicial da nossa afirmação. Esse resultado pode ser provado através da **Desigualdade de Erdös-Mordell**, cujas (várias) demonstrações podem ser vistas em [3], e que diz:

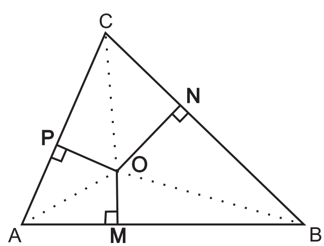
*Se **O** é um ponto do plano de um triângulo $\triangle ABC$ e se d_a , d_b e d_c são, respectivamente, as distâncias do ponto **O** aos lados **BC**, **AC** e **AB** do triângulo $\triangle ABC$, então*

$$OA + OB + OC \geqslant 2 \cdot (d_a + d_b + d_c).$$

*Além disso, a igualdade vale se, e somente se o triângulo $\triangle ABC$ for equilátero e o ponto **O** for seu circuncentro.*



A desigualdade de Erdös-Mordell permite provar o seguinte resultado $[4]$:
(IMO 1991, problema 4) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e **O** um ponto em seu interior. Prove que pelo menos um dos ângulos $\angle OAB$, $\angle OBC$ ou $\angle OCA$ é menor ou igual a $30°$.
Resolução:
Sejam **M**, **N** e **P** os pontos de intersecção das perpendiculares por **O** aos lados **AB**, **BC** e **AC** respectivamente.



A desigualdade de Erdös-Mordell nos diz que

$$OA + OB + OC \geqslant 2 \cdot (OM + ON + OP)$$

Por outro lado, se as razões $\dfrac{OM}{OA}$, $\dfrac{ON}{OB}$ e $\dfrac{OP}{OC}$ forem todas maiores do que $sen 30^{\text{o}} = \dfrac{1}{2}$, então teremos

$$OA < 2 \cdot OM, OB < 2 \cdot ON \text{ e } OC < 2 \cdot OP,$$

o que implica em

$$OA + OB + OC < 2 \cdot (OM + ON + OP),$$

o que é uma contradição com o resultado da desigualdade de Erdös-Mordell. Portanto, uma das razões $\dfrac{OM}{OA}$, $\dfrac{ON}{OB}$ ou $\dfrac{OP}{OC}$ é menor ou igual a $\dfrac{1}{2}$, ou seja, o seno de um dos ângulos $\angle OAB$, $\angle OBC$ ou $\angle OCA$ é menor ou igual a $\dfrac{1}{2}$. Isso significa que um dos ângulos é menor ou igual a $30°$.

Aplicando esse resultado quando o ponto **O** é o primeiro ponto de Brocard do triângulo $\triangle ABC$, concluímos, como todos os ângulos $\angle OAB$, $\angle OBC$ e $\angle OCA$ são congruentes, que esse ângulo α é menor ou igual a $30°$.

Finalmente, é fácil ver que se o triângulo $\triangle ABC$ for equilátero, então o ângulo de Brocard é igual a $30°$. Reciprocamente, se o ângulo de Brocard for igual a $30°$ então valerá a igualdade na desigualdade de Erdös-Mordell, o que significa que o triângulo $\triangle ABC$ é eqüilátero.

Referências

[1]**Olimpíadas Brasileiras de Matemática**, 1^{a} a 8^{a}: Problemas e Resoluções, compilado por Élio Mega e Renate Watanabe (Comissão de Olimpíadas da SBM) p. 100-103, São Paulo: Editora Núcleo, 1988.

[2]**Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina**, n. 4, p.123, Florianópolis: CFM, 2007.

[3]TORRES, A., A Desigualdade de Erdös-Mordell. **Eureka!**, n.18, p.42-52, Rio de Janeiro: OBM, 2003.

[4]SHINE, C.Y., Geometria do Triângulo: Fatos e Problemas. **Eureka!**, n. 31, p.28-44, Rio de Janeiro: OBM, 2010.

Álgebra Linear

Giuliano Boava [1]

Florianópolis - Santa Catarina

Introdução

Nos problemas olímpicos, principalmente nos de nível universitário, é comum encontrarmos espaços e subespaços vetoriais, transformações lineares, matrizes, autovalores, autovetores, entre outros conceitos de álgebra linear. O objetivo deste texto é mostrar que, usando apenas ferramentas básicas, é possível resolver diversos problemas envolvendo este tema. Como a álgebra linear é um assunto amplo, concentraremos nossas atenções nos problemas que abordam matrizes e suas propriedades.

O texto está dividido em duas seções: uma seção com definições e teoremas,1' e outra com resolução de problemas. Na primeira seção, faremos uma breve introdução à teoria de matrizes, tratando desde as operações básicas até a fatoração de uma matriz na sua forma canônica de Jordan[2]. Na segunda seção, veremos como aplicar a teoria em problemas olímpicos.

Apesar de o texto não requerer conhecimento prévio, é aconselhável que o leitor tenha alguma familiaridade com a álgebra linear. Além disso, o conteúdo aqui exposto é extremamente resumido, não sendo recomendado àqueles que pretendem iniciar um curso de álgebra linear. Por fim, visto que o nosso foco são as aplicações da teoria, não demonstraremos os teoremas aqui apresentados. O leitor interessado nas demonstrações pode consultar as referências dispostas no final do texto.

[1]Professor Substituto do Departamento de Matemática da UFSC

[2]Camille Marie Ennemond Jordan (1838-1922) foi um matemático francês, fazendo com que a pronúncia de seu sobrenome seja "Jordân".

Definições e Propriedades

Uma **matriz** real (ou complexa) A com m linhas e n colunas é uma função

$$\begin{array}{rcl} A:\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\text{ (ou }\mathbb{C}) \\ (i,j) & \longmapsto & A(i,j). \end{array}$$

Esta é uma maneira formal de dizer que uma matriz é uma "tabela" de números. Apesar de a definição tratar uma matriz como função, veremos uma matriz A com m linhas e n colunas sob a forma usual

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que a entrada a_{ij} da tabela corresponde a $A(i,j)$ (isto é, o valor da função A em (i,j)). Uma maneira compacta de denotar a matriz acima é $A = (a_{ij})$. O valor a_{ij} da matriz A é denominado **entrada** (i,j) ou (i,j)**-ésima entrada** de A. No contexto matricial, um número, real ou complexo, é normalmente chamado de **escalar**.

Uma matriz com m linhas e n colunas é dita uma matriz $m \times n$ (lê-se m por n). Uma matriz em que $n = 1$ (respectivamente, $m = 1$) é denominada um **vetor coluna** (respectivamente, **vetor linha**). Quando $m = n$, a matriz é dita **quadrada de ordem** n. Em uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, denominamos por **diagonal principal** a parcela da matriz formada pelos elementos a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}. Uma matriz quadrada que possui todos os elementos abaixo (respectivamente, acima) da diagonal principal iguais a 0 é denominada matriz **triangular superior** (respectivamente, **triangular inferior**). Uma matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a 0 é denominada matriz **diagonal**. A matriz diagonal de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 é denominada matriz **identidade** e é denotada por I_n (ou simplesmente I, quando a ordem estiver subentendida).

Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ matrizes reais (ou complexas) de dimensões $m \times n$, $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente, e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) um escalar. A **soma** das matrizes A e B, denotada por $A + B$, é definida como a matriz $m \times n$ dada por $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$. O **produto** das matrizes A e C, denotado por AC, é definido como a matriz $m\times p$ dada por $AC = (d_{ij})$, em que $d_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$. A **multiplicação** do escalar λ pela matriz A, denotada por λA, é definida como a matriz $m \times n$ dada por $\lambda A = (\lambda a_{ij})$. A **transposta**[3] da matriz A, denotada por A^t, é definida como a matriz $n \times m$ dada por $A^t = (a_{ji})$.

É claro a partir da definição que a operação de soma de matrizes é comutativa, associativa e distributiva com relação à multiplicação por escalar. Também é fácil verificar que a soma também é distributiva com relação ao produto matricial (por ambos os lados). Convém observar que o produto matricial não é comutativo! Uma conta um pouco mais trabalhosa é necessária para verificar que o produto matricial é associativo. Estas propriedades podem ser expressas por: $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$; $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$; $(A + B)C = AC + BC$; $C(A + B) = CA + CB$; $AB \neq BA$ (em geral) e $(AB)C = A(BC)$. Há algumas propriedades interessantes da transposta: $(A^t)^t = A$; $(A + B)^t = A^t + B^t$; $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ e $(AB)^t = B^t A^t$. A matriz identidade definida acima possui papel importante no produto de matrizes: se A é uma matriz $m \times n$, então $I_m A = A = AI_n$. É um bom exercício (porém, entediante) verificar todas essas propriedades.

Definição 1 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Definimos o* **traço** *da matriz A, denotado por $\mathrm{tr}(A)$, como a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A. Em outras palavras, se $A = (a_{ij})$, então $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.*

Exemplo 1 *Se*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

então $\mathrm{tr}(A) = 1 + (-3) + 0 = -2$.

Nosso próximo objetivo é definir o determinante de uma matriz quadrada. É comum, no ensino médio, dar uma definição explícita para o determinante de matrizes de ordem 1, 2 e 3 e definir o determinante de matrizes de ordem maior que 3 recursivamente, usando determinantes de matrizes de ordem inferior. Aqui, adotaremos uma outra definição, que é válida para matrizes de ordens arbitrárias. Antes disso, necessitamos da definição de permutação.

Definição 2 *Uma* **permutação** *do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma bijeção $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$. A* **paridade** *de uma permutação σ, denotada*

[3] A transposta de uma matriz é, normalmente, utilizada para matrizes reais. A definição também é válida para matrizes complexas mas, neste caso, tal definição não é tão útil. No caso complexo, a operação frequententemente utilizada no lugar da transposta é a operação que associa a uma matriz A, uma outra matriz A^*, denominada adjunta de A. A adjunta da A é a transposta de A com seus elementos conjugados.

por $p(\sigma)$, é definida como o número de pares ordenados

$$(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,n\} \text{ com } i < j,$$

para os quais $\sigma(i) > \sigma(j)$.
O **sinal** *de uma permutação σ é definido por* $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{p(\sigma)}$.

É comum (e mais prático) representar uma permutação σ por:

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$$

Assim, uma permutação pode ser vista como uma n-upla de números naturais distintos (com valores em $\{1,2,\ldots,n\}$).

Exemplo 2 *$\sigma_1 = (3,4,1,5,2)$ e $\sigma_2 = (2,3,4,5,1)$ são exemplos de permutações de $\{1,2,3,4,5\}$. Para σ_1, há 5 pares ordenados (i,j), com $i < j$, para os quais $\sigma_1(i) > \sigma_1(j)$; são eles: $(1,3)$, $(1,5)$, $(2,3)$, $(2,5)$ e $(4,5)$. Assim, $p(\sigma_1) = 5$. Já para σ_2, a paridade é 4. Com isso,* $\mathrm{sign}(\sigma_1) = (-1)^5 = -1$ *e* $\mathrm{sign}(\sigma_2) = (-1)^4 = 1$.

Definição 3 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n. O* **determinante** *da matriz A, denotado por* **Det**(A) *ou $|A|$, é definido por*

$$\mathbf{Det}(A) = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

em que a soma é tomada sobre todas as permutações[4] *σ de $\{1,2,\ldots,n\}$.*

Exemplo 3 *Se $A = [a_{11}]$ é uma matriz 1×1, então só há uma permutação de $\{1\}$ (a saber, a permutação $\sigma = (1)$). Como não há pares (i,j) com $i < j$ neste caso, então a paridade de σ é 0 e, consequentemente,* $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$. *Logo,* **Det**$(A) = a_{11}$. *Notemos há duas permutações para $\{1,2\}$: $\sigma_1 = (1,2)$ (com paridade 0) e $\sigma_2 = (2,1)$ (com paridade 1). Assim, no determinante de uma matriz 2×2, há dois termos na soma. Aplicando a definição a uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem 2, obtemos*

$$\begin{aligned}\mathbf{Det}(A) &= \mathrm{sign}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \mathrm{sign}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} \\ &= (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},\end{aligned}$$

[4]Note que há $n!$ permutações de $\{1,2,\ldots,n\}$. Assim, há $n!$ parcelas na soma.

que é a fórmula ensinada no ensino médio. Fica como exercício ao leitor desenvolver a definição acima para uma matriz de ordem 3 e verificar que ela é equivalente à definição dada no ensino médio, isto é,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$
$$+(-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}).$$

A proposição abaixo lista algumas propriedades do traço e do determinante de uma matriz.

Proposição 1 *Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então:*

(i) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$*;*

(ii) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$*;*

(iii) Se $A = (a_{ij})$ é triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então **Det**$(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$*;*

(iv) **Det**$(AB) =$ **Det**(A)**Det**(B)*;*

(v) **Det**$(A) =$ **Det**(A^t)*;*

(vi) Se uma matriz $\tilde{A}$ é obtida a partir de A pela troca da posição de duas linhas (ou colunas), então **Det**$(\tilde{A}) = -$**Det**(A)*;*

(vii) Se uma matriz $\tilde{A}$ é obtida a partir de A multiplicando-se uma dada linha (ou coluna) por um número $\lambda \in \mathbb{C}$, então **Det**$(\tilde{A}) = \lambda$**Det**(A)*;*

(viii) Se uma matriz $\tilde{A}$ é obtida a partir de A acrescentando-se a uma linha (ou coluna) um múltiplo de uma outra linha (ou coluna), então **Det**$(\tilde{A}) =$ **Det**(A)*.*

Definição 4 *Seja A uma matriz $m \times n$. Uma matriz B é dita uma* **inversa à direita** *de A se $AB = I_m$. Uma matriz C é dita uma* **inversa à esquerda** *de A se $CA = I_n$. Se A possui inversa à direita (respectivamente, à esquerda), então a dita* **invertível à direita** *(respectivamente,* **à esquerda***).*

Exemplo 4 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $AB = I_2$, então A é uma inversa à esquerda para B e B é uma inversa à direita para A.

Muitos problemas com matrizes são resolvidos analisando o *posto* das matrizes envolvidas. Porém, para se falar de posto, normalmente é necessário falar de espaços vetoriais, combinações lineares e dependência linear. Nos próximos parágrafos, definiremos o posto de uma matriz evitando desenvolver a teoria de espaços vetoriais. Para isso, teremos que "mascarar" propriedades gerais dos espaços vetoriais em casos específicos.

O produto cartesiano[5] $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n vezes) é denotado por $\mathbb{R}^n$. Os elementos $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ são denominados **vetores** e são da forma $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, em que $v_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Sejam $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

A **soma** dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, denotada por $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, é definida como o vetor $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$. A **multiplicação** do escalar λ pelo vetor $\mathbf{v}$, denotada por $\lambda\mathbf{v}$, é definida como o vetor $\lambda\mathbf{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n)$. O vetor $(0, 0, \ldots, 0)$ é usualmente denotado por $\mathbf{0}$.

É fácil ver que uma matriz $1 \times n$ ou $n \times 1$ (vetor linha ou vetor coluna) pode ser vista como um vetor de $\mathbb{R}^n$. Além disso, as linhas de uma matriz $m \times n$ também podem ser vistas como um vetor de $\mathbb{R}^n$, assim como as colunas determinam vetores de $\mathbb{R}^m$. Precisaremos destas identificações na definição de posto.

Definição 5 *Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito* **linearmente dependente (LD)** *se existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que*

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é dito **linearmente independente (LI)** *se não é linearmente dependente.*

Exemplo 5 *Em $\mathbb{R}^2$, os vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ são linearmente independentes. De fato, $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 = (\lambda_1, \lambda_2)$ e, para que $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$, devemos ter $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, 4)$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes pois $2\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Note que qualquer conjunto de vetores que contém o vetor $\mathbf{0}$ é linearmente dependente.*

[5] A partir daqui até a definição de posto, tudo o que for feito para $\mathbb{R}$ também será válido para $\mathbb{C}$.

Definição 6 *Seja A uma matriz $m \times n$. O* **posto** *de A, denotado por* $\text{posto}(A)$ *ou* $\text{rank}(A)$*, é definido como o maior número r para o qual existem r linhas de A linearmente independentes (identificando as linhas de A como vetores de $\mathbb{R}^n$).*

Exemplo 6 *Conforme exemplo anterior, a matriz*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

possui posto 2.

Proposição 2 *Se A é uma matriz $m \times n$, então:*

(i) $\text{posto}(A) = \text{posto}(A^t)$*, isto é, o número máximo de linhas linearmente independentes coincide com o número máximo de colunas linearmente independentes;*

(ii) $\text{posto}(A) \leq \text{mín}\{m, n\}$*;*

(iii) Se $\tilde{A}$ é uma matriz obtida a partir de A como nos itens (vi) ou (viii) da proposição 1, então $\text{posto}(\tilde{A}) = \text{posto}(A)$.

O próximo resultado é essencial na resolução de problemas.

Teorema 1 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. São equivalentes:*

(i) $\text{posto}(A) = n$*;*

(ii) A é invertível à esquerda;

(iii) A é invertível à direita;

(iv) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *é o único vetor coluna tal que* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *(aqui,* $\mathbf{0}$ *representa a matriz $n \times 1$ formada somente por zeros);*

(v) Para todo vetor coluna $\mathbf{b}$ *de tamanho $n \times 1$, existe um único vetor coluna* $\mathbf{x}$ *tal que* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*;*

(vi) $\textbf{Det}(A) \neq 0$.

Uma matriz A que não satistaz uma (portanto, todas) das condições acima é dita **singular**. *Se uma (consequentemente, todas) das condições acima é satisfeita, então A é denominada* **não singular**. *Neste caso, A possui única inversa à esquerda, única inversa à direita e tais inversas coincidem. A (única) inversa é denotada por A^{-1} e A é dita* **invertível**. *Além disso,* $\text{posto}(A^{-1}) = n$*,* $\textbf{Det}(A^{-1}) = \textbf{Det}(A)^{-1}$*,* $(A^{-1})^{-1} = A$ *e* $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ *é o único vetor coluna* $\mathbf{x}$ *do item (v).*

Proposição 3 *Se A e B são matrizes quadradas do mesmo tamanho, então AB é não singular se, e somente se, A e B são não singulares. Neste caso $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Definição 7 *Seja A uma matriz quadrada. Um escalar*[6] *$\lambda \in \mathbb{C}$ é dito um* **autovalor** *de A se existe um vetor coluna $\mathbf{x}$ (com entradas em $\mathbb{C}$) não nulo tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Neste caso, $\mathbf{x}$ é denominado um* **autovetor** *de A associado a λ.*

Exemplo 7 *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como $A\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}$ é não nulo, então $\lambda = -1$ é autovalor de A e $\mathbf{x}$ é autovetor associado a λ.

Sejam A uma matriz quadrada e λ um autovalor de A. Por definição, existe $\mathbf{x}$ não nulo tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Tal equação pode ser reescrita na forma $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sendo I a matriz identidade. Como $\mathbf{x}$ é não nulo, segue do item *(iv)* do teorema 1 que a matriz $\lambda I - A$ é singular. Assim, pelo item *(vi)* do mesmo teorema, devemos ter **Det**$(\lambda I - A) = 0$. Por outro lado, se A é uma matriz quadrada e $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfaz **Det**$(\lambda I - A) = 0$, então segue dos itens *(iv)* e *(vi)* do teorema 1 que existe vetor coluna $\mathbf{x}$ não nulo tal que $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e, portanto, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Em outras palavras, um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de uma matriz A se, e somente se, **Det**$(\lambda I - A) = 0$.

Conforme definição de determinante, se A possui ordem n, então **Det**$(xI - A)$ tem como resultado um polinômio mônico (isto é, um polinômio com coeficiente líder igual a 1) de grau n na variável x. Tal polinômio é denominado **polinômio característico** de A e é denotado por $p_A^c(x)$. Como visto anteriormente, as raízes complexas de $p_A^c(x)$ são, exatamente, os autovalores de A. Pelo teorema fundamental da álgebra, $p_A^c(x)$ possui n raízes complexas (contando multiplicidades). A partir daqui, consideraremos que toda matriz A de ordem n possui n autovalores: as n raízes de $p_A^c(x)$. Se λ é uma raiz de multiplicidade r do polinômio característico, então dizemos que λ é um autovalor de multiplicidade r.

Proposição 4 *Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ seus autovalores. Então:*

(i) $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$;

[6] Até agora, em todas as definições, poderíamos trabalhar em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. No caso de autovalores e autovetores, a teoria produz melhores resultados em $\mathbb{C}$.

(ii) $\mathbf{Det}(A) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n$;

(iii) *Para qualquer* $\lambda \in \mathbb{C}$, *os autovalores de* $A + \lambda I$ *são* $\lambda + \lambda_1, \lambda + \lambda_2, \dots, \lambda + \lambda_n$;

(iv) *Se* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ *são distintos e* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ *são autovetores associados, então o conjunto* $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$ *é linearmente independente;*

(v) A *é não singular se, e somente se,* $\lambda_i \neq 0$, *para todo* i;

(vi) *Se* A *é não singular, então os autovalores de* A^{-1} *são* $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$;

(vii) *Se* A *é uma matriz real e simétrica (isto é,* $A = A^t$*), então* $\lambda_i \in \mathbb{R}$, *para todo* i.

Seja A uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal. Aplicando o item *(iii)* da proposição 1 à matriz $xI - A$, concluímos que os elementos da diagonal principal de A são seus autovalores.

Se A é uma matriz quadrada real, então $p_A^c(x)$ é um polinômio com coeficientes reais. Logo, os autovalores não reais de A aparecem em pares conjugados.

Para qualquer matriz quadrada A de ordem n, defina $A^0 = I_n$ e, para qualquer número inteiro positivo k, defina $A^k = \underbrace{AA\dots A}_{k \text{ vezes}}$. Dessa forma, se

$$q(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é um polinômio com coeficientes complexos, podemos definir

$$q(A) = a_r A^r + a_{r-1}A^{r-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Observe que $q(A)$ é uma matriz e não um escalar.

Definição 8 *Seja* A *uma matriz quadrada. O* **polinômio minimal** *de* A, *denotado por* $p_A^m(x)$, *é o polinômio mônico* $q(x)$ *(com coeficientes em* $\mathbb{C}$*) de menor grau tal que*[7] $q(A) = \mathbf{0}$.

Note que não há ambiguidade na definição acima. De fato, suponha que existam dois polinômios $q_1(x)$ e $q_2(x)$ que se encaixam na definição acima. Assim, ambos são mônicos e têm o mesmo grau k, logo $q(x) = q_1(x) - q_2(x)$ é um polinômio de grau menor que k tal que $q(A) = \mathbf{0}$. Se $q(x)$ não é o polinômio nulo, então podemos

[7] Aqui, $\mathbf{0}$ representa a matriz quadrada do mesmo tamanho de A formada por zeros em todas as entradas.

dividir $q(x)$ pelo seu coeficiente líder e obter um polinômio mônico de grau menor que k que se anula em A, contrariando a minimalidade de k. Portanto, devemos ter $q(x) = 0$ (isto é, $q(x)$ é o polinómio nulo) e, consequentemente, $q_1(x) = q_2(x)$.

Teorema 2 *Sejam A uma matriz quadrada, $p_A^c(x)$ seu polinômio característico e $p_A^m(x)$ seu polinômio minimal. Então:*

(i) Para qualquer polinômio $q(x)$, $q(A) = \mathbf{0}$ se, e somente se, $p_A^m(x)$ divide $q(x)$;

(ii) $p_A^m(x)$ divide $p_A^c(x)$, isto é, $p_A^c(A) = \mathbf{0}$.

O item *(ii)* do teorema acima é conhecido como teorema de Cayley-Hamilton.

Teorema 3 (Teorema do Mapeamento Espectral) *Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ seus autovalores. Para qualquer polinômio $q(x)$ (com coeficientes em $\mathbb{C}$), os autovalores da matriz $q(A)$ são $q(\lambda_1), q(\lambda_2), \ldots, q(\lambda_n)$.*

Exemplo 8 *Tomando $q(x) = x^k$ no teorema acima, concluímos que se λ é um autovalor de A, então λ^k é um autovalor de A^k.*

Definição 9 *Duas matrizes quadradas de mesmo tamanho A e B são ditas* **semelhantes** *ou* **similares** *se existe uma matriz não singular M tal que $A = MBM^{-1}$. Neste caso, a notação $A \sim B$ é empregada. Uma matriz que é semelhante a alguma matriz diagonal é dita* **diagonalizável**.

Notemos que $A \sim A$ (pois $A = IAI^{-1}$), que $A \sim B$ implica $B \sim A$ (pois $A = MBM^{-1}$ implica $B = M^{-1}A(M^{-1})^{-1}$) e que $A \sim B$ e $B \sim C$ implicam $A \sim C$ (pois $A = MBM^{-1}$ e $B = NCN^{-1}$ implicam $A = (MN)C(MN)^{-1}$). Em outras palavras, a relação de semelhança entre matrizes é uma relação de equivalência.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e suponha que A possua n autovetores linearmente independentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Denote por λ_i o autovalor de A associado ao autovetor $\mathbf{x}_i$. Defina $X = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{x}_n]$, isto é, X é uma matriz $n \times n$ cujas colunas são os autovetores de A. Denote por Λ a matriz diagonal $n \times n$ cujas entradas na diagonal principal são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (nesta ordem). Observe que

$$\begin{aligned} AX &= A[\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{x}_n] = [A\mathbf{x}_1 \,|\, A\mathbf{x}_2 \,|\, \cdots \,|\, A\mathbf{x}_n] \\ &= [\lambda_1\mathbf{x}_1 \,|\, \lambda_2\mathbf{x}_2 \,|\, \cdots \,|\, \lambda_n\mathbf{x}_n] = X\Lambda \end{aligned}$$

Pela proposição 2 e pelo teorema 1, a matriz A é invertível. Logo, $AX = X\Lambda \implies AXX^{-1} = X\Lambda X^{-1} \implies A = X\Lambda X^{-1}$, isto é, A é semelhante a uma matriz diagonal Λ formada pelos autovetores de A. Além disso, a matriz de semelhança X é dada pelos autovetores de A. Por outro lado, se $A = MDM^{-1}$ e D é uma matriz diagonal, então é possível provar que os autovalores de A estão na diagonal principal de D e que as colunas de M são os autovetores de A. Logo, o processo de encontrar uma matriz diagonal que seja semelhante a uma matriz A dada está intimamente relacionado com os autovalores e autovetores de A. Sempre que uma matriz A é escrita sob a forma $A = MDM^{-1}$ com D, uma matriz diagonal, os problemas que envolvem A são consideravelmente simplificados. Porém, nem sempre uma matriz é diagonalizável.

Exemplo 9 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que A não é diagonalizável. Calculando o polinômio característico de A, obtemos $p_A^c(x) = \mathbf{Det}(xI - A) = x^2$. Assim, os dois autovalores de A são iguais a 0. Se A fosse diagonalizável, então $A = MDM^{-1}$, com D uma matriz diagonal com os autovalores de A. Como os autovalores são iguais a 0, D é a matriz nula. Assim, teríamos $MDM^{-1} = \mathbf{0}$ independente da matriz M. Logo, A não é diagonalizável.

A próxima proposição fornece algumas condições suficientes para que uma matriz seja diagonalizável.

Proposição 5 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:*

(i) *A é diagonalizável se, e somente se, A possui n autovetores linearmente independentes;*

(ii) *A é diagonalizável se, e somente se, toda raiz do polinômio minimal de A é simples;*

(iii) *A é diagonalizável se possui n autovalores distintos;*

(iv) *A é diagonalizável se A é uma matriz real e normal (isto é, $AA^t = A^tA$). Em particular, toda matriz real simétrica é diagonalizável.*

Nosso último objetivo é definir matrizes na forma de Jordan. Uma matriz na forma de Jordan é uma matriz que é "quase" diagonal. A utilidade deste conceito é que *toda* matriz é semelhante a uma matriz na forma de Jordan.

Definição 10 *Uma matriz quadrada de ordem r da forma*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \cdots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

é denominada um **bloco de Jordan de ordem** r *associado a λ. Uma matriz quadrada A é dita estar na* **forma canônica de Jordan** *se*

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_m \end{bmatrix},$$

em que cada M_i representa um bloco de Jordan.

Exemplo 10 *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está na forma canônica de Jordan.

Teorema 4 *Toda matriz quadrada A é semelhante a alguma matriz J na forma canônica de Jordan. Além disso, se $\tilde{J}$ é uma outra matriz na forma canônica de Jordan semelhante a A, então J e $\tilde{J}$ possuem os mesmos blocos de Jordan, com uma possível diferença na ordem dos blocos.*

O teorema acima, além de garantir uma decomposição de qualquer matriz quadrada A na forma $A = XJX^{-1}$, também afirma que J é única, a menos da ordem dos blocos. A partir daqui, duas formas de Jordan que diferem apenas pela ordem dos blocos serão consideradas "iguais". Dessa maneira, toda matriz possui única forma de Jordan associada.

Teorema 5 *Duas matrizes quadradas de mesmo tamanho A e B são semelhantes se, e somente se, possuem a mesma forma canônica de Jordan.*

Se J é a forma de Jordan de A então os elementos da diagonal principal de J são os autovalores de A. Assim, cada autovalor de A está associado a um certo número de blocos em J. Por outro lado, todo bloco de J está associado a algum autovalor de A.

Proposição 6 *Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ os autovalores de A com multiplicidades $r_1, r_2, \ldots, r_k$, respectivamente (portanto $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$). Seja J a forma de Jordan de A. Denote por $M_i^1, M_i^2, \ldots, M_i^{l_i}$ os blocos em J associados ao autovalor λ_i e seja d_i^j a ordem do bloco M_i^j. Denote por d_i o maior valor do conjunto $\{d_i^1, d_i^2, \ldots, d_i^{l_i}\}$. Então:*

(i) $d_i^1 + d_i^2 + \cdots + d_i^{l_i} = r_i$, *para todo i, isto é, a soma das ordens de todos os blocos associados ao autovalor λ_i coincide com a multiplicadade de λ_i;*

(ii) O número máximo de autovetores associados a λ_i linearmente independentes é l_i, ou seja, o número de blocos associados a λ_i;

(iii) O número máximo de autovetores de A linearmente independentes é $l_1 + l_2 + \cdots + l_k$, ou seja, o número de blocos em J;

(iv) $\operatorname{posto}(A) = n - b_0$, *em que b_0 representa o número de blocos de J associados ao autovalor 0 (se 0 não é autovalor, então $b_0 = 0$);*

(v) $p_A^c(x) = (x - \lambda_1)^{r_1}(x - \lambda_2)^{r_2} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k}$;

(vi) $p_A^m(x) = (x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \cdots (x - \lambda_k)^{d_k}$.

O próximo resultado mostra que matrizes semelhantes possuem muita semelhança!

Proposição 7 *Se A e B são duas matrizes semelhantes, então:*

1. $\operatorname{posto}(A) = \operatorname{posto}(B)$;

2. $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$;

3. $\mathbf{Det}(A) = \mathbf{Det}(B)$*;*

4. A *e* B *possuem os mesmos autovalores;*

5. $p_A^c(x) = p_B^c(x)$*;*

6. $p_A^m(x) = p_B^m(x)$*.*

Problemas Envolvendo Matrizes

Esta seção contém uma seleção de problemas olímpicos envolvendo matrizes. Resolveremos alguns deles e o restante ficará como desafio ao leitor. As siglas IMC, OBM e OIMU que aparecem nos problemas se referem à Olimpíada Internacional de Matemática para Estudantes Universitários, à Olimpíada Brasileira de Matemática e à Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária, respectivamente. As soluções dos problemas deixados como exercício podem ser encontradas nos *sites* das competições.

Problema 1 (IMC 1995) *Seja* X *uma matriz quadrada não singular com colunas* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$*. Seja* Y *uma matriz com colunas* $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{0}$*. Mostre que as matrizes* $A = YX^{-1}$ *e* $B = X^{-1}Y$ *têm posto* $n-1$ *e que seus autovalores são todos iguais a 0.*

Solução: Notemos que as colunas de Y são combinações lineares das colunas de X (neste caso, as combinações lineares são triviais). Sempre que isso ocorre, é possível encontrar uma matriz T tal que $Y = XT$. É fácil ver que, nesse caso,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como T é uma matriz triangular, então seus autovalores estão na diagonal principal. Logo, todos os autovalores de T são iguais a 0. Além disso, as $n-1$ primeiras colunas de T são LI e, portanto, $\text{posto}(T) = n-1$ (note que a última coluna é nula). Por fim, observemos que $A = YX^{-1} = XTX^{-1}$ e que $B = X^{-1}Y = X^{-1}XT = T$. Assim, $B = T$ tem as propriedades requeridas. Usando a proposição 7 e o fato de

A e T serem semelhantes, concluímos que os autovalores de A são todos nulos e que $\operatorname{posto}(A) = n - 1$.

Problema 2 (IMC 2003) *Seja A uma matriz real $n \times n$ tal que $3A^3 = A^2 + A+$ $+I$. Mostre que a sequência $(A^k)_{k\geq 1}$ converge para uma matriz idempotente. (Uma matriz B é dita idempotente se $B^2 = B$.)*

Solução: Pelo teorema 2, o polinômio minimal de A divide $q(x) = 3x^3 - x^2 - x - 1$. Uma das raízes de $q(x)$ é 1 e as outras duas são raízes complexas (conjugadas) de módulo menor que 1. Como todas as raízes de $q(x)$ possuem multiplicidade 1, então o mesmo vale para o polinômio minimal de A. Logo, pela proposição 5, A é diagonalizável e, portanto, $A = X\Lambda X^{-1}$. Note que os possíveis valores na diagonal de Λ são as raízes de $q(x)$. Se $x_1 = 1$, x_2 e x_3 são as raízes de $q(x)$, então $\lim_{k\to\infty} x_1^k = 1$, $\lim_{k\to\infty} x_2^k = 0$ e $\lim_{k\to\infty} x_3^k = 0$ (pois x_2 e x_3 têm módulo menor que 1). Assim, $P = \lim_{k\to\infty} \Lambda^k$ é uma matriz diagonal com 0's e 1's na diagonal principal e, com isso, idempotente. Visto que $A^k = X\Lambda^k X^{-1}$, então $\lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} X\Lambda^k X^{-1} = XPX^{-1}$. Por fim, basta observar que $(XPX^{-1})^2 = XPX^{-1}XPX^{-1} = XP^2X^{-1} = XPX^{-1}$.

Problema 3 (IMC 2003) *Sejam A e B matrizes reais $n\times n$ tais que $AB+A+B = \mathbf{0}$. Mostre que $AB = BA$.*

Solução: Observe que $(A+I)(B+I) = AB+A+B+I = I$. Assim $A+I$ e $B+I$ são inversas uma da outra. Logo, $(B+I)(A+I) = I$ e, com isso, $BA+B+A = \mathbf{0}$. Juntando tal igualdade com a igualdade do enunciado, obtemos o resultado requerido.

Problema 4 (OBM 2002, nível universitário, 1ª fase) *Seja A a matriz real $n \times n$*

$$A = \begin{bmatrix} x+y & x & \cdots & x \\ x & x+y & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & x+y \end{bmatrix}.$$

Diga para que valores de x e y a matriz A é invertível e calcule A^{-1}.

Solução: Claramente, se $y = 0$, A não é invertível (pois terá posto, no máximo, 1). A soma das n linhas de A é o vetor $(nx + y, nx + y, \ldots, nx + y)$. Assim, se $nx + y = 0$, as n linhas de A serão LD e, por consequência, $\operatorname{posto}(A) \leq n - 1$.

Portanto, A não é invertível se $nx + y = 0$. Exibiremos a inversa de A se $y \neq 0$ e $nx + y \neq 0$. Observemos que $A = xU + yI$, em que U é a matriz com todas as entradas iguais a 1. Sempre que uma matriz B invertível pode ser escrita como um polinômio de uma matriz C, então a inversa de B também é um polinômio em C. Em nosso caso, A é um polinômio na matriz U e, portanto, A^{-1} também é um polinômio em U. Visto que $U^k = n^{k-1}U$, então todo polinômio em U pode ser escrito como um polinômio de grau 1. Com isso, A^{-1} é da forma $aU + bI$. Impondo que $I = AA^{-1} = (xU + yI)(aU + bI)$, obtemos $b = \frac{1}{y}$ e $a = -\frac{x}{y(nx+y)}$. Isto mostra que $A^{-1} = \frac{1}{y}I - \frac{x}{y(nx+y)}U$.

Problema 5 (OBM 2008, nível universitário, 2ª fase) *Prove que não existe uma matriz real* 7×7 *com entradas não negativas cujos autovalores (contando com multiplicidade) são: 6,* -5*,* -5*, 1, 1, 1 e 1.*

Solução: Suponha, por contradição, que exista uma matriz A, 7×7 com entradas não negativas. Assim A^k é uma matriz com entradas não negativas para qualquer $k \geq 1$. Em particular, $\operatorname{tr}(A^k) \geq 0$. Pelo teorema 3, os autovalores de A^k são 6^k, $(-5)^k$, $(-5)^k$, 1, 1, 1 e 1. Logo, $\operatorname{tr}(A^k) = 6^k + (-5)^k + (-5)^k + 1 + 1 + 1 + 1 \geq 0$, para todo $k \geq 1$. Tomando $k = 3$, obtemos uma contradição.

Problema 6 (OIMU 2005) *Considere matrizes reais quadradas A, B e C de ordem* n *tais que* $A^3 = -I$*,* $BA^2 + BA = C^6 + C + I$ *e* C *é simétrica. É possível ter* $n = 2005$*?*

Solução: Como $A^3 = -I$, então o polinômio minimal de A divide $q(x) = x^3 + 1$. Em particular, todo autovalor de A deve ser uma raiz de $q(x)$, as quais são $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ e $x_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$. Afirmamos que -1 não é autovalor de A. De fato, suponha por contadição que exista $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$A\mathbf{x} = -\mathbf{x}. \text{ Assim, } (C^6 + C + I)\mathbf{x} = (BA^2 + BA)\mathbf{x} = B\mathbf{x} - B\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

isto é, 0 é autovalor de $C^6 + C + I$. Sabemos do teorema 3 que os autovalores de $C^6 + C + I$ são da forma $\lambda^6 + \lambda + 1$, em que λ é um autovalor de C. Visto que C é simétrica, então seus autovalores são reais (proposição 4). Portanto, os autovalores de $C^6 + C + I$ são da forma $\lambda^6 + \lambda + 1$, com λ real. Com ferramentas básicas de cálculo, é possível mostrar que $q(x) = x^6 + x + 1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, 0 não pode ser um autovalor de $C^6 + C + I$, contradição! Assim, os possíveis autovalores de A

são $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ e $x_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$. Como A é real, tais autovalores aparecem aos pares, mostrando que a dimensão de A é par. Isto mostra que não podemos ter $n = 2005$.

Os próximos problemas ficam como exercício!

Problema 7 (IMC 1996) *Sejam a_0 e d números reais fixados. Para $j = 0, 1, \ldots, n$, defina $a_j = a_0 + jd$. Calcule* **Det**(A)*, sendo*

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Problema 8 (IMC 1994) *(a) Seja A uma matriz $n \times n$, $n \geq 2$, real, simétrica, invertível e com entradas positivas. Mostre que $z_n \leq n^2 - 2n$, sendo z_n o número de entradas nulas em A^{-1}.*

(b) Quantas entradas nulas há na inversa da matriz $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & \ddots \end{bmatrix}?$$

Problema 9 (IMC 1997) *Seja M uma matriz invertível de ordem $2n$, representada na forma de blocos como*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ e } M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix},$$

em que cada bloco possui ordem n. Mostre que **Det**(M)**Det**$(H) =$ **Det**(A).

Problema 10 (IMC 1999) *(a) Mostre que, para qualquer $m \in \mathbb{N}^*$, existe uma matriz real A, $m \times m$, tal que $A^3 = A + I$.*

(b) Mostre que **Det**$(A) > 0$ *para toda matriz real* A, $m \times m$ *que satisfaz* $A^3 = A + I$.

Problema 11 (IMC 2002) *Calcule o determinante da matriz* $A = (a_{ij})$, $n \times n$, *em que*

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{se} \quad i \neq j, \\ 2, & \text{se} \quad i = j. \end{cases}$$

Problema 12 (IMC 2004) *Sejam* A *uma matriz real* 4×2 *e* B *uma matriz real* 2×4 *tais que*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre BA.

Problema 13 (IMC 2005) *Seja* $A = (a_{ij})$ *uma matriz* $n \times n$ *tal que* $a_{ij} = i + j$. *Encontre o posto de* A.

Problema 14 (IMC 2009) *Sejam* A, B *e* C *matrizes reais quadradas de mesmo tamanho e suponha que* A *seja invertível. Mostre que se* $(A - B)C = BA^{-1}$, *então* $C(A - B) = A^{-1}B$.

Problema 15 (OBM 2001, nível universitário, 1ª fase) *Seja* A *uma matriz* $n \times n$ *com* $a_{1j} = a_{i1} = 1$ *(para quaisquer* i *e* j, $1 \leq i, j \leq n$*) e* $a_{i+1,j+1} = a_{ij} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1}$ *(para quaisquer* i *e* j, $1 \leq i, j < n$*). Assim,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots \\ 1 & 5 & 13 & 25 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Calcule **Det**(A).

Problema 16 (OBM 2003, nível universitário, 1ª fase) *Sejam* A *e* B *matrizes reais,* $n \times n$, *invertíveis. Mostre que se vale a condição* $(AB)^k = A^k B^k$ *para três valores inteiros consecutivos de* k, *então* $AB = BA$.

Problema 17 (OIMU 2004) *Considere a matriz real quadrada* $S = (s_{ij})$ *de ordem* n *e entradas*

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} k^{i+j}.$$

Calcule **Det**(S).

Referências

[1] Axler, Sheldon. **Linear Algebra Done Right**. Second Edition. Springer-Verlag, 1997.

[2]Meyer, Carl D.. **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra**. Siam, 2000.

Curiosidades

Quadrado de números inteiros

O quadrado de um número é um dos inteiros da sequência 1, 4, 9, 16, 25, etc. Não é difícil verificar a relação entre os membros consecutivos desta sequência. Verificamos que se somarmos o quadrado de n , mais duas vezes n mais 1 , o próximo quadrado sucessivo é obtido.
Por exemplo , $5^2 + 2 \times 5 + 1 = 25 + 10 + 1 = 36 = 6^2$.
Sendo assim, se soubermos o valor de um determinado número ao quadrado, o quadrado do próximo numero é facilmente obtido.
A razão para tal fato se justifica da seguinte maneira: Note que o número seguinte ao número n é o número $(n + 1)$. Pela relação algébrica $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, concluimos que $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

73939133, um número primo curioso

O número primo 73939133 tem uma propriedade muito curiosa. Se você remover os algarismos do final, um a um, observe o que acontece:

73939133 é um número primo
7393913 é um número primo
739391 é um número primo
73939 é um número primo
7393 é um número primo
739 é um número primo
73 é um número primo
7 é um número primo

Números simpáticos

Um número n é dito simpático se existem números inteiros a, b e c, tais que $a < b < c$ e $n = a^2 + b^2 - c^2$. Por exemplo: **3** é um número simpático, pois $3 = 4^2 + 6^2 - 7^2$

Invertendo e subtraindo

Se você subtrair de um número o número que se escreve como o primeiro, mas de trás para frente, o resultado obtido será sempre um múltiplo de nove.

Soluções dos Problemas Propostos

1. Represente de três formas diferentes o número 100 utilizando **apenas uma vez cada um dos algarismos** de 1 a 9, na sua ordem natural (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

   SOLUÇÃO : (apresentada pela Revista da ORM)
   Respeitando as exigências do enunciado, o número 100 pode ser representado ds seguintes maneiras:
   1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 x 9 = 100

   123 - 45 - 67 + 89 = 100

   123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100

2. Um casal de namorados combina de se encontrar no parque ao meio-dia. O rapaz chega na hora marcada mas ela não aparece. Ele pensa: "Vou esperar até meio-dia e meia. Se ela não aparecer, eu aguardo mais metade do tempo que esperei anteriormente. Farei isso sucessivamente". Supondo que sua namorada nunca compareça, que horas o rapaz irá embora?

   SOLUÇÃO : (Apresentada pelo proponente)
   Seja t o tempo esperado pelo rapaz, em horas, e considere $t_0 = 0$ o tempo inicial de espera (meio-dia em ponto).

   Como ele espera até meio-dia e meia, então escrevemos $t_1 = \frac{1}{2}$ para indicar que a primeira espera do rapaz foi de meia-hora. Em seguida ele espera metade do tempo que esperou anteriormente, ou seja, $t_2 = \frac{t_1}{2} = \frac{1}{4}$.

   Neste instante, o tempo total esperado pelo rapaz foi de

   $$t = t_0 + t_1 + t_2 = 0 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

   Em geral, temos que

   $$t_{k+1} = \frac{t_k}{2} = \frac{t_{k-1}}{2^2} = \ldots = \frac{1}{2^k}$$

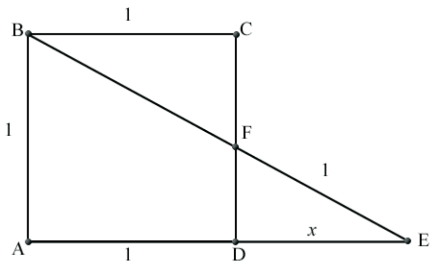
   Então o tempo esperado pelo rapaz foi de

   $$t = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_{k+1} + \ldots = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots$$

   Esta é a soma de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e termo inicial igual a zero, cujo resultado vale $t = 1$.

Logo, o rapaz espera uma hora pela sua namorada. Como ele chegou ao meio-dia e ela não compareceu, o rapaz foi embora à uma hora da tarde.

3. Seja $ABCD$ um quadrado de aresta igual a 1. O lado AD do quadrado é prolongado formando o segmento AE de modo que B, F e E sejam colineares. Se FE mede 1, quanto vale x?



SOLUÇÃO : (Apresentada pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática a UFSC)

Temos que $BE^2 = 1^2 + (1+x)^2$.
Dois ângulos do $\triangle ABC$ são iguais a dois ângulos do $\triangle DFE$. Portanto estes triângulos são semelhantes. Daí,

$$\frac{1}{\sqrt{1+(1+x)^2}} = \frac{x}{1+x}$$

Elevando ao quadrado obtém-se $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$. Uma maneira de resolver esta equacão é fatorá-la na forma $(x^2 + ax + a)(x^2 + bx + b) = 0$, onde a e b são números reais a serem determinados.

Assim temos $x^4+(a+b)x^3+(a+ab+b)x^2+2abx+ab$. Igualando os coeficientes, $a+b = 2$, $a+ab+b = 1$ e $ab = -1$. Daí concluimos que a e b são raízes da equação $x^2 2x-1 = 0$. Tais raízes são dadas por $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$.

Sejam $a = 1+\sqrt{2}$ e $b = 1-\sqrt{2}$. A solucão $x > 0$, do problema, deve satisfazer $x^2 + (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2}) = 0$ ou $x^2 + (1 - \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2}) = 0$.

As raízes destas equações são

$$x = \frac{-(1+\sqrt{2}) \pm \sqrt{-1-2\sqrt{2}}}{2} \text{ e}$$
$$x = \frac{\sqrt{2}-1 \pm \sqrt{-1+2\sqrt{2}}}{2}$$

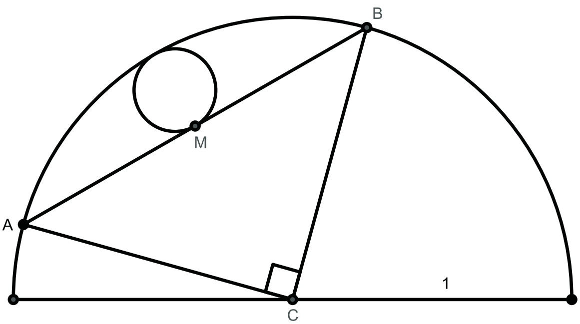
A única raíz real positiva é a segunda, aproximdamente, igual a $0,8832$, que é a resposta do problema.

Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão um exemplar da mesma (Veja "Informações Gerais").

1. *(Proposto po Allysson Gomes Dutra, aluno do curso de Pós-Graduação em Matemática da UFSC)*

   Com base na figura abaixo, encontre o comprimeto da circunferência que tangencia o segmento $\overline{AB}$ em seu ponto médio M e tangencia a semicircunferência da raio 1.

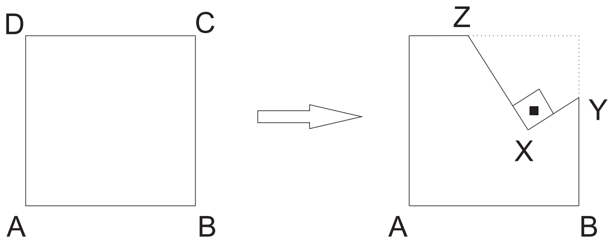


2. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)*
   Três números naturais quadrados podem estar em Progressão Aritmética (ex: 1^2, 5^2 e 7^2).
   Prove que é impossível achar quatro inteiros quadrados distintos em Progressão Aritmética.

3. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC. Este problema é de autoria do Professor Waldir Quandt, homenageado na Revista 7 da ORM)*
   Se $a \notin Q$, então $sen(ax) + sen(x)$ não é periódica.

4. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC. Este problema é de autoria do Professor Waldir Quandt,*

homenageado na Revista 7 da ORM)
Achar um processo prático de dobrar uma folha quadrada $ABCD$ de lado 1, a partir do canto C, de modo a obter pontos X, Y e Z sobre a folha tais que A, X e Y sejam colineares e o mesmo acontecendo para B, X e Z.



Veja também os artigos "Álgebra Linear", na página 72, e "Critérios de Divisibilidade", na página 102.

Premiados da ORM em Outras Olimpíadas

Premiados da ORM em outras olimpíadas

Anderson Nigreli - Sõa Bento do Sul
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasielira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Bruno da Silveira Dias - Florianópolis
Medalha de Ouro na XII Olimpíada Regional de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Bruno Leonardo Schneider - São José
Medalha de Bronze na I Olimpíada Regional de Matemática em 1998 (Nível 1)
Medalha de Prata na II Olimpíada Regional de Matemática em 1999 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática em 2000 (Nível 2)
Menção Honrosa na IV Olimpíada Regional de Matemática em 2001 (Nível 2)
Menção Honrosa na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 3)
Medalha de Prata na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 3)
Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 3)

Bruno Nunes - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasielira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Caroline da Silveira - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Douglas Ohf - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2009 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Eduardo Adelano Agostini Pasold - Timbó
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Eduardo José Mendes - Biguaçu
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públias em 2008 (Nível 2)

Felipe Paupitz Schilichting - Florianópolis
Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)
Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática em 2000 (Nível 2)
Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática em 2001 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 3)
Medalha de ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 3)

Fernanda Momm Antunes - Joinville
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Gabriel Augusto Moreira - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Giuliano Boava - Criciúma
Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática em 1999 (Nível 3)
Menção Honrosa na III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2000
Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2001
Menção Honrosa na IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2001
Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2002
Menção Honrosa na V Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2002
Medalha de Bronze na XXV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2003
Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2004

Guilherme Rohden Echelmeier - Itajaí
Medalha de Prata na III Olimpíada Regional de Matemática em 2000 (Nível 1)
Medalha de Ouro na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)
Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 2)
Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 2)
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática em 2005 (Nível 3)

Gustavo Lisbôa Empinotti - Florianópolis
Medalha de Prata na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)
Medalha de Ouro na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Prata na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na X Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na 13ª Olimpíada de Maio em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XIX Olmpíada de Matemática do Cone Sul em 2008 - Temuco, Chile
Medalha de Prata na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na LI Olimpíada Internacional de Matemática em 2010
Medalha de Bronze na III Romanian Master in Mathematics em 2010
Medalha de Bronze na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2010
Medalha de Prata na 25ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2010 - Assunção, Paraguai

Hanna Kurihara e Silva - Florianópolis
Medalha de Bronze na II Olimpíada Regional de Matemática em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática em 2000 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)
Medalha de Bronze na IV Olimpíada Regional de Matemática em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 2)
Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 3)

Helena Carolina Rengel Koch - Jaraguá do Sul
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públias em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públias em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públias em 2008 (Nível 2)

Ivani Ivanova Ivanova - Blumenau
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Janine Garcia - São Francisco do Sul
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

João Marcos Carnieletto Nicolodi - Florianópolis
Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 1)
Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 1)

Karina Livramento dos Santos - Navegantes
Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públias em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públias em 2009 (Nível 2)

Laiane Freitas Suzart - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Leandro Augusto Lichtenfelz - Blumenau
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2008
Medalha de Prata (Second Prize) na XVI Internacional Mathematical Competition for University Students em 2009 - Budapeste, Hungria

Leandro Jun Kimura - Joinville
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Leandro Roza Livramento - Florianópolis
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Leonardo Gonçalves Fischer - Fraiburgo
Medalha de Bronze na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)
Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 2)

Leonard Henrrik Wodtke - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Lucas Bruno Barbosa Sandoval - Florianópolis
Medalha de Ouro na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 2)
Medalha de Bronze na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 3)

Lucas Lolli Savi - Florianópolis
Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática em 2000 (Nível 2)
Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 2)
Medalha de Bronze na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 3)

Natan Cardozo Leal - São Bento do Sul
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públias em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na X Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 3)
Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públias em 2007 (Nível 3)
Medalha de Prata na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (Nível 3)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públias em 2008 (Nível 3)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públias em 2009 (Nível 3)

Nicole Braga de Medeiros Nicolak - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasielira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Renan Henrique Finder - Joinville
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 1)
Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 1)
Medalha de Prata na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 2)
Medalha de Ouro na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XVIII Olimpíada de Matemática do Cone sul em 2007 - Uruguai
Medalha de Prata na 23ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2008 - Brasil
Medalha de Prata na 49ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2008 - Madri, Espanha
Medalha de Prata na 50ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2009 - Bremen, Alemanha
Medalha de Prata na 24ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2009 - Santiago de Querétaro, México
Medalha de Ouro na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)

Shadi Bavar - Blumenau
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Tiago Madeira - Itajaí
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 1)
Medalha de Bronze na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada de Maio em 2003 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 2)
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática em 2005 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada de Maio em 2005 (Nível 2)

Vitor Costa Fabris - Criciúma
Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática em 2005 (Nível 2)
Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)

Informações Gerais

Envio de Problemas e Soluções

A seção de problemas propostos e soluções é uma seção dinâmica. Contribua propondo problemas ou enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém, podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o LaTeX, então o artigo poderá ser submetido neste formato.

Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) devem cadastrar suas escolas. O cadastramento para a OBM e ORM é feito somente no site da OBM (www.obm.org.br). Escolas já cadastradas em anos anteriores deverão confirmar a cada novo ano a sua inscrição. Para o cadastramento será necessário o código do Inep da escola. Existe um período para cadastramento ou confirmação. Consulte o site da OBM. No site não aparece a opção para cadastramento na ORM. As escolas cadastradas para a OBM estarão automaticamente cadastradas para a ORM. No cadastramento deve ser indicado o nome do coordenador regional (José Luiz Rosas Pinho ou Licio Hernanes Bezerra).

Alunos interessados em participar das olimpíadas devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberem a revista podem solicitar o envio da mesma.

Além disso, a revista é enviada às universidades federais brasileiras (um exemplar por IES), por intermédio da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

– Nosso site: www.orm.mtm.ufsc.br
– Telefone/Fax: (48) 37216809 (PET - Matemática)
– e-mail: orm@pet.mtm.ufsc.br
– Endereço: PET - Matemática
Departamento de Matemática - CFM
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Universitário - Trindade
88040-900 – Florianópolis/SC