

# Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina

Nº7, 2010



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**Reitor:** Álvaro Toubes Prata

**Vice-Reitor:** Carlos Alberto Justo da Silva

**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E EXTENSÃO - PRPE**

**Pró-Reitora:** Débora Peres Menezes

**DEPARTAMENTO DE PROJETOS DE EXTENSÃO - DPE**

**Diretora:** Mônica Aparecida Aguiar dos Santos

**PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO - PREG**

**Pró-Reitora:** Yara Maria Rauh Müller

**CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM**

**Diretor:** Tarciso Antônio Grandi

**Vice-Diretor:** Valdir Rosa Correia

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**Chefe:** Ruy Coimbra Charão

**Sub-Chefe:** Milton dos Santos Brait

**Apoio:**

**CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico**

**SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM**

**CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina/  
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências  
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],  
2004 -

v.: 7 (2010) 23 cm

Anual  
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas,  
exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de  
Ciências Físicas e Matemáticas.

## **Comissão da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:**

**Coordenador:** José Luiz Rosas Pinho.

**Professores:** Carmem Suzane Comitre Gimenez, Danilo Royer, Eliezer Batista, Licio Hernanes Bezerra e Nereu Estanislau Burin.

**Bolsistas da Olimpíada:** Amanda Magalhães, Bianca de Souza, Cláudia Dal Pont Rocha, Maria Cláudia Schmitt Araujo, Michely de Melo Pellizzaro e Virgínia Angélica Reck.

**Bolsistas do PET - Matemática:** Camila Fabre Sehnem, Fernanda Cristina da Silva, Fernando Correia, Gabriela Silmaia da Silva Yoneda, Gustavo Felisberto Valente, Helena Martins, Jeremias Stein Rodrigues, Luis Augusto Uliana, Maíra Fernandes Gauer, Rafaela Goulart de Andrade, Renan Diogo Manfron, Ruana Maíra Schneider, Sara Regina da Rosa Pinter, Soyara Carolina Biazotto, Thiane Pereira Poncetta Coliboro, Tiara Martini e Welton Ademar Costa.

## **Comitê Editorial da Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina:**

Danilo Royer  
Fernanda Cristina da Silva  
José Luiz Rosas Pinho  
Licio Hernanes Bezerra  
Rafaela Goulart de Andrade  
Tiara Martini

### **Editoração Eletrônica:**

Alda Dayana Mattos  
Fernanda Cristina da Silva  
Rafaela Goulart de Andrade  
Rodrigo Maciel Rosa  
Tiara Martini

### **Tiragem:**

1500 exemplares

### **Arte da Capa:**

Renata Leandro Becker  
Asteroide Santana

### **Postagem:**

Segundo semestre de 2009.

**Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina Nº7, 2010**

**ISSN 1679-7612**



# Sumário

<b>Apresentação</b>	<b>7</b>
<b>Waldir Quandt (In Memoriam)</b>	<b>9</b>
<b>XI ORM (2008)</b>	<b>11</b>
Prova Nível 1 . . . . .	13
Prova Nível 2 . . . . .	14
Prova Nível 3 . . . . .	15
Gabarito Nível 1 . . . . .	17
Gabarito Nível 2 . . . . .	20
Gabarito Nível 3 . . . . .	25
Premiados . . . . .	33
Nível 1 . . . . .	33
Nível 2 . . . . .	35
Nível 3 . . . . .	36
Escolas Participantes . . . . .	38
<b>Artigos</b>	<b>43</b>
<b>Dois Problemas do Professor Waldir</b> Carmem Suzane Comitre Gimenez	45
<b>O Princípio da Casa dos Pombos e suas Aplicações</b> Deividi Ricardo Pansera e Edson Valmórbida	46
<b>Algumas propriedades notáveis das cônicas II</b> Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa	51
<b>Quadrados mágicos simples</b> Licio Hernanes Bezerra	58
<b>A Solução de Gergonne para o Problema de Apolônio</b> José Luiz Rosas Pinho e Tiara Martini	64

<b>Curiosidades</b>	<b>75</b>
<b>Soluções dos problemas propostos</b>	<b>79</b>
<b>Problemas propostos</b>	<b>87</b>
<b>Premiados da ORM em outras olimpíadas</b>	<b>91</b>
<b>Informações gerais</b>	<b>99</b>
Envio de Problemas e Soluções . . . . .	101
Envio de Artigos . . . . .	101
Cadastramento . . . . .	101
Como adquirir a revista . . . . .	102
Erramos . . . . .	102
Fale Conosco . . . . .	102

## Apresentação

Este número da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina foi financiado em parte pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e em parte pela Universidade Federal de Santa Catarina, através do programa PROEXTENSÃO, do Departamento de Projetos de Extensão (DPE) da Pró-Reitoria de Pesquisa e Extensão (PRPE).

Os projetos Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM) e Revista da ORM são totalmente idealizados, organizados e executados pelos bolsistas do Programa de Educação Tutorial (PET/SESu/MEC) Matemática da UFSC, com o apoio da Pró-Reitoria de Ensino e Graduação (PREG), por bolsistas de extensão, com bolsas do DPE, por alunos voluntários do Curso de Matemática, e com a participação de seis professores do Departamento de Matemática da UFSC. Cabe ressaltar que esses projetos recebem ainda um importante apoio da Pró-Reitoria para Assuntos Estudantis (PRAE) e do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas (CFM) desta Universidade.

Neste número, que está lançado em novembro de 2009 na cerimônia de premiação da XII ORM, discutimos as questões e as soluções das provas da XI Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina, realizada em 2008. Cinco artigos são aqui apresentados, de autoria de professores do Departamento de Matemática da UFSC e de alunos do Curso de Matemática.

A Revista da ORM tem sido distribuída gratuitamente para cerca de 900 escolas, públicas e particulares, do estado de Santa Catarina, para as Secretarias de Educação de todos os municípios do estado, e para diversas bibliotecas de universidades do país. Além disso, alunos premiados na ORM e seus professores também recebem exemplares da revista na cerimônia de premiação.

Solicitamos a todos os leitores, professores e estudantes das escolas, alunos de cursos de matemática e interessados, que continuem a enviar sugestões, problemas propostos e soluções, e que submetam artigos para publicação.

Este número é inteiramente dedicado à memória do nosso colega, Prof. Waldir Quandt (veja a página seguinte), falecido neste ano. O professor Waldir integrava a Comissão da ORM desde o início do projeto em 1998. Seu trabalho na elaboração das provas da ORM, especialmente na revisão dos enunciados, foi de fundamental importância para o projeto.

Florianópolis, 28 de novembro de 2009.

José Luiz Rosas Pinho

Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina





---

## Waldir Quandt

(In Memoriam)

Waldir Quandt nasceu em Curitiba, onde fez sua graduação em Matemática e em Engenharia Química. Obteve o título de Mestre em Matemática pelo IMPA, Rio de Janeiro, em 1978, e o título de Doutor em Matemática pela UNICAMP, em 1988 na área de holomorfia. Após uma breve passagem pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, Waldir ingressou na UFSC em 1979.

Na área administrativa na UFSC, Waldir foi sub-coordenador do Curso de Matemática e chefe do Departamento de Matemática. Orientou diversos trabalhos de conclusão de curso, foi membro do Conselho Editorial da revista Extensio (Revista Eletrônica de Extensão da UFSC) e participou dos projetos Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM) e Revista da Olimpíada Regional de Santa Catarina desde o início em 1998. Com um espírito crítico altamente aguçado, de um humor refinado e muito observador, Waldir não permitia erros nem possíveis deslizes em qualquer texto que lesse. Sua ausência se faz sentir a cada instante como, por exemplo, quando elaboramos as provas da XII ORM. Creio que isso será uma constante daqui em diante.

José Luiz Rosas Pinho

Pela Comissão da ORM e todos os colegas de Waldir





**XI ORM (2008)**

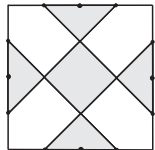
---



**Prova Nível 1**

1. Em uma lanchonete, um grupo de amigos pede para beber chocolate, café e milkshake. Cada pessoa tomou exatamente duas bebidas. Foram pedidos 13 cafés, 14 chocolates e 15 milkshakes. Quantas pessoas havia no grupo? Quantas pessoas beberam cada uma das bebidas?
2. Um viajante resolve cruzar um deserto. No 1º dia ele viaja  $\frac{1}{10}$  da distância total a ser percorrida. No 2º dia ele viaja  $\frac{2}{3}$  da distância percorrida no dia anterior. No 3º dia ele percorre  $\frac{1}{10}$  da distância que ainda falta percorrer. No 4º ele percorre  $\frac{2}{3}$  do que já foi percorrido nos dias anteriores. No 5º dia ele percorre  $\frac{1}{10}$  da distância que ainda falta percorrer. Ao final desse dia, o viajante se encontra a 63 km do final do percurso. Qual o comprimento total do percurso?
3. Escreve-se uma sequência de números da seguinte maneira: o primeiro número é 2008; o segundo número é a soma de 2008 com a soma de seus algarismos; o terceiro número é a diferença entre o segundo número e a soma de seus algarismos; o quarto número é a soma do terceiro número com a soma de seus algarismos, e assim sucessivamente.  
Colocando-se todos os números dessa sequência lado a lado pergunta-se: qual o algarismo escrito na posição 2008?
4. João e Maria têm muitos gatos, todos irmãos, em sua casa. João diz para Maria: o gato Fratello tem o dobro de irmãos do que de irmãs. Maria, por sua vez, diz: e a gata Sorella tem 10 irmãos a mais do que o número de irmãs. Quantos gatos há na casa de João e Maria?

5. A figura ao lado é um quadrado cujos lados foram divididos em quatro partes iguais. O lado do quadrado mede  $\frac{7}{2}$  cm. Calcule a área da figura sombreada.

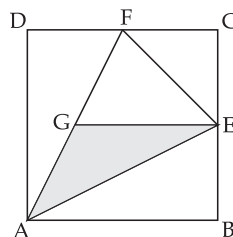


## Prova Nível 2

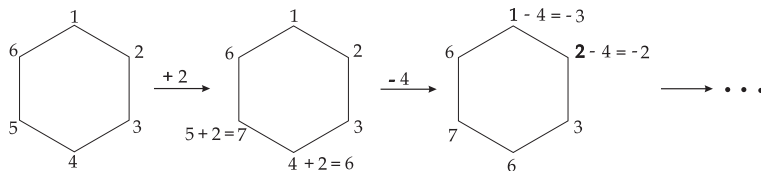
- Três pessoas possuem, juntas, R\$2.008,00. Sabendo-se também que as razões entre as quantias de quaisquer dois deles é um número inteiro (considerando a razão entre o que possui mais e o que possui menos) e que cada uma delas possui pelo menos R\$100,00, calcule todos os possíveis valores para as quantias de cada uma dessas pessoas.
- Nos relógios com ponteiros, o ponteiro dos minutos é maior do que o ponteiro das horas. Entre meia noite e meio dia, quantas vezes os ponteiros estão em posição de formarem dois lados de um triângulo retângulo (não necessariamente os catetos)?

Observação: Sabe-se que, nesse relógio, às duas horas esses ponteiros estão numa dessas posições.

- O quadrado ABCD tem lado igual a 1, e os pontos E e F são pontos médios dos lados BC e CD, respectivamente. O segmento EG é paralelo ao lado AB do quadrado.



- Calcule a área do triângulo  $\triangle AEG$ .
  - Calcule o comprimento do segmento EG.
- Em uma tribo, um caçador comprou duas lanças pelo preço de uma faca e três anzóis. Um outro caçador comprou três lanças, duas facas e um anzol por 25 cocos. Qual preço, equivalente, em cocos, de cada instrumento (faca, lança e anzol)?
  - Aos vértices de um hexágono associamos os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. A partir deste hexágono podemos somar ou subtrair um número inteiro qualquer a dois vértices consecutivos, e fazer isso sucessivas vezes. Por exemplo:



Prosseguindo de maneira semelhante, é possível chegar a um hexágono em que todos os vértices tenham o mesmo número? Justifique.

### Prova Nível 3

1. Mostre que se um número é múltiplo de 3, então a soma dos cubos de seus algarismos também é múltiplo de 3. Encontre um número de 3 algarismos que é igual à soma dos cubos de seus algarismos.
2. Determine uma função  $f$  não identicamente nula (isto é, uma função que não é igual a zero para todo  $x$  em seu domínio), cujo domínio é o conjunto dos números reais positivos, satisfazendo, para todo  $x > 0$ , as relações:

$$x \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x^2) \quad e$$

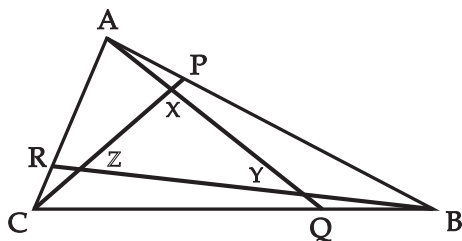
$$f(x^2) - [f(x)]^2 = \frac{2}{x} \cdot f(x)$$

3. Em um certo relógio de ponteiros, o ponteiro dos minutos mede o dobro do ponteiro das horas.  
Pergunta-se:

- (a) A partir de meia-noite, qual o primeiro horário no qual os ponteiros estão em posição de formarem dois lados de um triângulo retângulo (não necessariamente os catetos)?
- (b) Entre meia noite e meio-dia quantas vezes os ponteiros formarão dois lados de um triângulo retângulo?

4. (a) Mostre que a diferença entre duas potências naturais quaisquer de 10 é um múltiplo de 9.  
(b) Mostre que a diferença entre um número natural  $N$  e um número  $M$ , obtido de  $N$  pela permutação de seus algarismos, é um múltiplo de 9.  
Por exemplo,  $5247 - 2754 = 2493 = 277 \cdot 9$ .

5. Na figura abaixo tem-se  $\frac{BQ}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{CR}{CA} = \frac{1}{n}$ , para um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer.



- (a) Calcule a razão entre as áreas dos triângulos  $\triangle XYZ$  e  $\triangle ABC$  em função de  $n$ .
- (b) Calcule o menor  $n$  tal que esta razão seja maior do que  $\left(1 - \frac{1}{2008}\right)$ .



## Gabarito Nível 1

1. Foram pedidos 13 cafés + 14 chocolates + 15 milkshakes = 42 total de bebidas.  
Como cada pessoa tomou 2 bebidas, devemos ter  $42 \div 2 = 21$  pessoas no grupo.

Considerando agora que cada pessoa tomou duas bebidas **distintas** temos:

21 pessoas – 13 (cafés) = 8 pessoas tomaram chocolate e milkshake.

21 pessoas – 14 (chocolates) = 7 pessoas tomaram café e milkshake.

21 pessoas – 15 (milkshakes) = 6 pessoas tomaram café e chocolate.

Assim fica:

$7 + 6 = 13$  pessoas tomaram café.

$8 + 6 = 14$  pessoas tomaram chocolate.

$8 + 7 = 15$  pessoas tomaram milkshake.

2. No 1º dia, o viajante cruza  $\frac{1}{10}$  da distância total a ser percorrida, ou seja, ainda falta percorrer  $\frac{9}{10}$  do percurso. No 2º dia, ele viaja  $\frac{2}{3}$  do que percorreu no dia anterior, que corresponde a  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$  do percurso total.

Ao término do 2º dia, ele viajou  $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$  do caminho total. Portanto, falta percorrer  $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$  da distância total a ser percorrida. Já no 3º dia, ele viaja  $\frac{1}{10}$  do que falta percorrer, que equivale a  $\frac{1}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$  do total.

Ao término do 3º dia ele viajou  $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$  do caminho total.

No 4º dia ele percorre  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$  do total.

No 5º dia ele viaja mais  $\frac{1}{10}$  do que falta, que é igual a  $\frac{1}{10} \times (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{10} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{120}$  do percurso.

Ao final do 5º dia o viajante ainda precisa percorrer  $\frac{7}{12} - \frac{7}{120} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$

da distância total, que corresponde a  $63Km$ . Então,  $\frac{1}{40}$  do percurso equivale a  $\frac{63}{21} = 3Km$ . Logo,  $\frac{40}{40}$  ou o percurso todo corresponde a  $40 \times 3 = 120Km$ .

3. Conforme o enunciado, os números da sequência serão:

1º número: 2008

2º número:  $2008 + (2 + 0 + 0 + 8) = 2018$ , soma de 2008 com a soma de seus algarismos;

3º número:  $2018 - (2 + 0 + 1 + 8) = 2007$ , diferença entre o segundo número e a soma de seus algarismos;

4º número:  $2007 + (2 + 0 + 0 + 7) = 2016$ , soma do terceiro número com a soma de seus algarismos;

5º número:  $2016 - (2 + 0 + 1 + 6) = 2007$ , diferença entre o quarto número e a soma de seus algarismos;

6º número:  $2007 + (2 + 0 + 0 + 7) = 2016$ , soma do quinto número com a soma de seus algarismos;

Note que, a partir do terceiro número os números 2007 e 2016 começam a repetir, onde 2007 assume as posições ímpares e 2016 as posições pares.

Queremos descobrir qual algarismo será escrito na posição 2008 se colocarmos os números dessa sequência lado a lado. Note que cada número desta sequência é formado por quatro algarismos, portanto, o algarismo escrito na posição 2008 da sequência será o último algarismo do número escrito na posição  $\frac{2008}{4} = 502$ .

Lembre-se que já sabemos que a partir do terceiro número, o número que assumirá as posições pares é 2016. Logo, o algarismo escrito na posição 2008 da sequência será o 6.

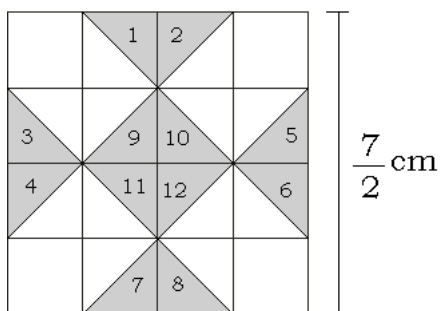
4. Se o gato Fratello tem o dobro de irmãos do que de irmãs, então o número de gatos é igual ao dobro do número de gatas mais um. Isto significa que a diferença entre o número de gatos e de gatas é igual ao número de gatas mais um (o gato Fratello).

se a gata Sorella tem 10 irmãos a mais do que o número de irmãs, então a diferença entre o número de gatos e de gatas é igual a 10 menos 1 (a gata Sorella).

Portanto, o número de gatas mais um é igual a 9, ou seja, o número de gatas é 8. Logo, o número de gatos é o o dobro do número de gatas mais um, ou seja, o número de gatos é 17.

Desta forma, há na casa  $17 + 8 = 25$  gatos

5. Podemos dividir a figura dada em 16 pequenos quadrados, como na figura a seguir:



Dessa forma, a área procurada equivale à área dos 12 triângulos sombreados. Se juntarmos cada dois desses triângulos, temos seis pequenos quadrados cujos lados medem  $\frac{7}{2} : 4 = \frac{7}{8} cm$ .

A área de cada pequeno quadrado mede  $\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} = \frac{49}{64} cm^2$ .

Assim, a área procurada mede:  $6 \times \frac{49}{64} = \frac{147}{32} = 4,59375 cm^2$ .

## Gabarito Nível 2

1. Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  as quantias de cada uma das pessoas.

Vamos supor que  $a \geq b \geq c \geq 100$  (pois o problema nos diz que cada pessoa possui pelo menos R\$100,00).

Então, de  $\frac{a}{b} = m$ ,  $\frac{b}{c} = n$ , onde  $m$  e  $n$  números inteiros, temos

$$m \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

De  $a + b + c = 2008$  temos:

$c \left( \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \right) = 2008$  ou  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 = \frac{2008}{c}$  ou  $m \times n + n + 1 = \frac{2008}{c}$  e portanto  $c$  é divisor de 2008.

Como  $2008 = 2^3 \cdot 251$  (251 é primo), temos que os divisores de 2008 são: 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004 e 2008. Como  $c \geq 100$ , os possíveis valores para  $c$  são 251, 502, 1004 ou 2008.

Se  $c = 251$ , então  $n(m + 1) + 1 = \frac{2008}{251} = 8$ , ou  $n(m + 1) = 7$ , o que nos dá  $n = 1$  e  $m = 6$  (se  $n = 7$  então  $m = 0$  e  $c = 0$ , o que não pode).

Logo,  $n = 1 \Rightarrow \frac{b}{251} = 1$  e então  $b = 251$  e  $m = 6 \Rightarrow \frac{a}{251} = 6$  e assim  $a = 6 \cdot 251 = 1506$ .

Se  $c = 502$ , então  $n(m + 1) + 1 = \frac{2008}{502} = 4$ , ou  $n(m + 1) = 3$ , o que nos dá  $n = 1$  e  $m = 2$ .

Então,  $n = 1 \Rightarrow \frac{b}{502} = 1$  e assim,  $b = 502$  e  $m = 2 \Rightarrow \frac{a}{502} = 2$  o que nos dá  $a = 1004$ .

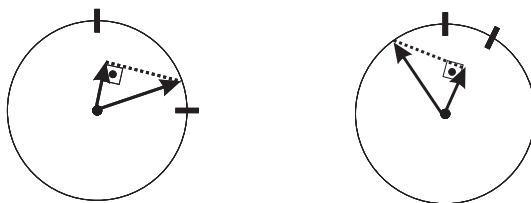
Se  $c = 1004$  ou se  $c = 2008$ , os valores para  $a$  e  $b$  seriam menores do que  $c$ , o que não é possível.

Logo, os possíveis valores para as quantias que as 3 pessoas podem ter são:  $R\$251,00$ ,  $R\$251,00$  e  $R\$1506,00$ , ou  $R\$502,00$ ,  $R\$502,00$  e  $R\$1004,00$ .

2. Há duas maneiras dos ponteiros formarem dois lados de um triângulo retângulo: uma, com o ângulo reto no centro do relógio, e a outra com o ponteiro dos minutos como hipotenusa e o das horas como cateto (como, por exemplo, às duas horas).

Vamos analisar quantas vezes o ângulo reto ocorre da primeira maneira entre a meia noite (00 horas) e o meio dia (12 horas). O ângulo reto, no centro, ocorre nas horas cheias, às 3 horas e às 9 horas (e somente nessas horas).

Entre 00 hora e 1 hora o ângulo reto no centro ocorrerá duas vezes: uma, um pouco depois de 00h 15min e a outra, depois de 00h 45min:



Entre 1 hora e 2 horas ocorrerá novamente duas vezes.

Entre 2 horas e 3 horas ocorrerá **uma** vez (não contamos a ocorrência às 3 horas)

Entre 3 horas e 4 horas ocorrerá **uma** vez.

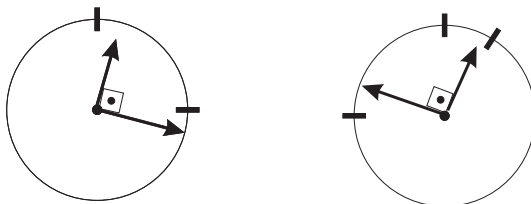
Depois, o ângulo reto ocorrerá novamente duas vezes em cada intervalo de hora, exceto entre 8 horas e 9 horas, e entre 9 horas e 10 horas, quando ocorrerá uma vez em cada intervalo.

Portanto, o ângulo reto no centro ocorrerá **duas** vezes em oito intervalos de horas, **uma** vez em quatro intervalos de horas e às 3 horas e às 9 horas.

Isso nos dá um total de:  $(8 \cdot 2) + (4 \cdot 1) + 1 + 1 = 22$  ocorrências.

Vamos analisar agora a ocorrência do ângulo reto quando o ponteiro dos minutos for a hipotenusa do triângulo retângulo.

Entre 00 hora e 1 hora isso ocorrerá **duas** vezes, uma antes de 00h 15min e outra após 00h 45min:



Isso se repetirá em cada intervalo de hora, exceto entre 1 hora e 2 horas, entre 2 horas e 3 horas, entre 9 horas e 10 horas e entre 10 horas e 11 horas. Às 2 horas isso ocorre, conforme dado do problema, e às 10 horas também (horário simétrico às 2 horas em relação ao eixo 6 - 12 do relógio).

Portanto, novamente, haverá 22 ocorrências de triângulo retângulo da segunda maneira.

No total serão **44 ocorrências** de triângulo retângulo entre 00 hora e 12 horas.

3. (a) Os triângulos  $\triangle GFE$  e  $\triangle AGE$  possuem a base  $GE$  em comum e, já que  $E$  é ponto médio de  $CB$ , possuem alturas iguais a  $\frac{1}{2}$ .  
Então,  $A_{\triangle AGE} = A_{\triangle GFE}$ . Assim,

$$A_{\triangle AGE} = \frac{A_{\triangle AFE}}{2}$$

Mas

$$A_{\triangle AFE} = A_{ABCD} - A_{\triangle ADF} - A_{\triangle AEB} - A_{\triangle CEF}$$

e

$$A_{ABCD} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$A_{\triangle ADF} = A_{\triangle AEB} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$A_{\triangle ECF} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$$

Logo

$$A_{\triangle AGE} = \frac{A_{\triangle AFE}}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{16}$$

- (b) Sabemos que

$$A_{\triangle AGE} = \frac{EG \cdot \frac{1}{2}}{2}$$

Mas pelo item anterior,  $A_{\triangle AGE} = \frac{3}{16}$ . Portanto,

$$\frac{EG \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{16}$$

o que implica em

$$EG = \frac{3}{4}$$

4. Sabemos que 2 lanças foram compradas pelo preço de 1 faca e 3 anzóis; e que 3 lanças, 2 facas, 1 anzol valem 25 cocos. Sejam  $L, F$  e  $A$  os preços, respectivamente, de uma lança, uma faca e um anzol em cocos.  
Então,

$$\begin{cases} 2L = F + 3A & (1) \\ 3L + 2F + A = 25 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (1) por 3 e a equação (2) por 2, temos:

$$\begin{cases} 6L = 3F + 9A & (3) \\ 6L + 4F + 2A = 50 & (4) \end{cases}$$

Substituindo (3) em (4) obtemos:  $3F + 9A + 4F + 2A = 50 \Rightarrow 7F + 11A = 50$   
Assumindo preços equivalentes inteiros teremos:

Se  $A = 1$  (Coco), então  $7F = 50 - 11 = 39$ , que não é múltiplo de 7.

Se  $A = 2$  Cocos, então  $7F = 50 - 22 = 28$ , o que nos dá  $F = 4$ .

Se  $A = 3, 4, \dots$ , não obtemos preços inteiros para  $F$ .

Portanto, 1 anzol equivale a 2 cocos, 1 faca equivale a 4 cocos, e substituindo os valores do anzol e da faca na equação (1) obtemos:  $2L = 4 + 6 = 10 \Rightarrow L = 5$ .  
Assim, 1 lança equivale a 5 cocos.

5. Observe que, no primeiro hexágono, a soma dos números associados aos vértices é *ímpar*, ( $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ ). Ao fazermos uma operação de transformação, somamos ou subtraímos o mesmo número em dois vértices consecutivos, sendo assim, estamos somando ou subtraindo um número total *par* ao valor 21, que é *ímpar*. Como resultado obteremos um novo hexágono, cuja soma dos números associados aos vértices ainda é *ímpar*, independente do valor que utilizemos para fazer as operações. Para que todos os vértices tivessem o mesmo número, ao somarmos esses valores deveríamos encontrar um número par, o que não acontece.

Portanto não é possível chegar a um hexágono em que todos os vértices tenham o mesmo número.



### Gabarito Nível 3

1. Seja  $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0$  em que  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$  são algarismos. Observe que

$(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0)^3$  é um número que é uma soma cujas parcelas são produtos de três fatores que são combinações dos algarismos  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ . Há três tipos de produtos:

- a) os do tipo  $a_k \cdot a_k \cdot a_k = a_k^3, k = n, n-1, n-2, \cdots, 1, 0$  (os três fatores iguais)
- b) os do tipo  $a_k \cdot a_k \cdot a_j, k \neq j, j = n, n-1, n-2, \cdots, 1, 0$  (dois fatores distintos)
- c) os do tipo  $a_k \cdot a_j \cdot a_l, k \neq j, k \neq l, j \neq l$  (os três fatores distintos)

Para cada  $k$  há apenas um produto do tipo (a); há 3 produtos para cada par  $k, j$  do tipo (b); e há 6 produtos do tipo (c), resultante das permutações de  $k, j, l$ .

Portanto,

$$(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0)^3 =$$

$$a_n^3 + a_{n-1}^3 + a_{n-2}^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3 + 3(\text{produto dos tipos (a) e (b)}).$$

Assim, se  $N$  é múltiplo de 3,  $(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0)^3$  também é múltiplo de 3. Segue de que

$$a_n^3 + a_{n-1}^3 + a_{n-2}^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3 \text{ é múltiplo de 3.}$$

2. Da 1ª equação, substituindo  $x$  por  $\frac{1}{x}$ , obtemos:

$$\underbrace{\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) - xf(x)}_{-f(x^2)} = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

para todo  $x > 0$ .

Então, de  $-f(x^2) = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , substituindo  $x^2$  por  $x$ , já que  $x > 0$ , obtemos:

$$-f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para todo } x > 0.$$

Agora, somando as duas equações dadas obtemos:

$$xf(x) - \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) - [f(x)]^2 = \frac{2}{x}f(x).$$

Multiplicando esta última por  $x$  e substituindo  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  por  $-f(x)$  teremos:

$$x^2f(x) + f(x) - x[f(x)]^2 = 2f(x), \text{ ou}$$

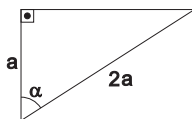
$$f(x)[x^2 - 1 - xf(x)] = 0$$

Daí, ou  $f(x) = 0$ , para todo  $x > 0$  nos dá uma reposta, que não interessa, ou:

$$x^2 - 1 - xf(x) \Rightarrow f(x) = x - \frac{1}{x},$$

para todo  $x > 0$  que é uma função que procuramos.

3. Se o ponteiro dos minutos é o dobro do comprimento do ponteiro das horas, então tais ponteiros formarão um triângulo retângulo ou com os dois ponteiros como catetos, ou o ponteiro dos minutos como hipotenusa e o outro como cateto, e nesse caso, os dois formarão um ângulo de  $60^\circ$ , pois:



$$\cos \alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \text{ e isso implica que } \alpha = 60^\circ.$$

a) A partir da meia-noite, os dois ponteiros formarão o primeiro triângulo retângulo quando o ângulo entre eles for  $60^\circ$  (que é menor do que  $90^\circ$ ).

A velocidade de rotação do ponteiro dos minutos  $V_M$  é 12 vezes a velocidade do ponteiro das horas  $V_H$  (enquanto o ponteiro dos minutos percorre  $360^\circ$ , o ponteiro das horas percorre  $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ ). Em um tempo  $t$ , o ponteiro dos minutos percorre  $V_M t$  graus =  $12V_H t$  graus, e o ponteiro das horas percorre  $V_H t$  graus. Então  $V_M t = 12V_H t$ , e:

$$60^\circ = 12V_H t - V_H t = 11V_H t, \text{ ou } t = \frac{60^\circ}{11V_H} \text{ horas.}$$

Como  $V_H = 30^\circ/\text{hora}$ , teremos  $t = \frac{60^\circ}{11 \times 30}$  horas, ou  $t = \frac{2}{11}$  horas, ou  $t = \frac{2 \times 60}{11}$  minutos.

Logo,  $t$  é aproximadamente 10,90 minutos.

Portanto, o primeiro horário que ocorrerá o triângulo retângulo será aproximadamente às 00h10,9min ou 00h10min45seg

b) Há duas maneiras de formar um triângulo retângulo:

(i) Com os ponteiros como catetos;

(ii) Com o ponteiro das horas como cateto e o dos minutos como hipotenusa.

No caso (i) isso ocorrerá nas "horas cheias", 3 e 9 horas. E, entre as horas 0 e 1, 1 e 2, 4 e 5, 5 e 6, 6 e 7, 7 e 8, 10 e 11, 11 e 12, ocorrerá duas vezes. Entre as horas , 2 e 3, 3 e 4, 8 e 9, e 9 e 10, ocorrerá uma vez. Portanto o caso (i) ocorrerá:  $8 + 2 + 4 + 2 = 22$  vezes.

No caso (ii) isso ocorrerá nas "horas cheias", 2 e 10 horas. E, entre as horas 0 e 1, 3 e 4, 4 e 5, 5 e 6, 6 e 7, 7 e 8, 8 e 9, 11 e 12, ocorrerá duas vezes. Entre as horas , 1 e 2, 2 e 3, 9 e 10, e 10 e 11, ocorrerá uma vez. Portanto o caso (ii) ocorrerá 22 vezes.

No total, teremos, entre meia-noite e meio-dia, 44 ocorrências de triângulos retângulos.

4. a) Sejam  $10^m$  e  $10^n$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ , duas potências de 10. Vejamos:

$$10^n = 1000...000 \text{ (} n \text{ zeros)}$$

$$10^m = 1000...000 \text{ (} m \text{ zeros)}$$

Então, se  $n > m$  temos:

$10^n - 10^m = (100..000...000) - (100...000) = 99...990...000$  ( $m$  zeros e  $(n - m)$  noves)

Assim:  $10^n - 10^m = 99...999 ((n - m) \text{ noves}) \times 10^m$ , que é múltiplo de 9.

Note que:

Se  $n > m$ ,  $10^n - 10^m$  é múltiplo de 9.

Se  $m > n$ ,  $10^m - 10^n = -(10^n - 10^m)$ , que o oposto de um número múltiplo de 9, por tanto é múltiplo de 9.

Ou ainda, se  $m = n$ ,  $10^n - 10^m = 0$ , que é múltiplo de 9.

- b) Seja um número natural  $N$  que possui um número  $n$  de algarismos. Por exemplo, os algarismos  $a, b, c, d, \dots, n$ . Note que esse número pode ser escrito como:

(N)

$$a + 10b + 100c + \dots + 10^x n, x \in \mathbb{N}$$

Ao permutarmos esse número podemos obter, por exemplo:

(M)

$$c + 10n + 100b + \dots + 10^x a, x \in \mathbb{N}$$

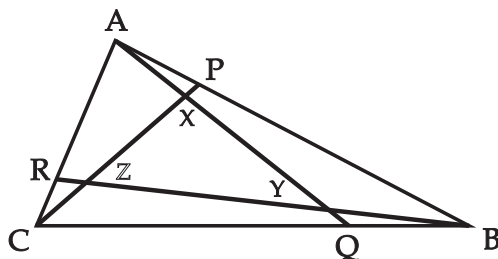
Fazendo  $(N) - (M)$ , obtemos:

$$a(10^0 - 10^x) + b(10^1 - 10^2) + c(10^2 - 10^0) + \dots + n(10^x - 10^1)$$

Como foi provado no **item a**, a diferença entre duas potências naturais quaisquer de 10 é um múltiplo de 9, logicamente ao somarmos múltiplos de 9 (como em  $N - M$ ) obteremos um múltiplo de 9.

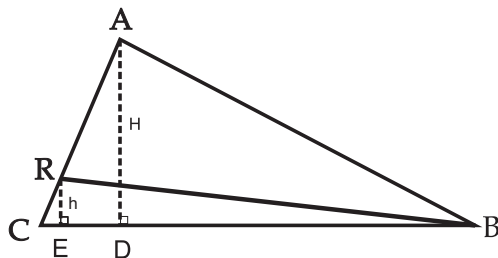
E portanto  $(N) - (M)$ , para  $M$  uma permutação qualquer de  $N$ , é um múltiplo de 9.

5. (a)



Vamos encontrar a área dos triângulos  $\triangle BCR$ ,  $\triangle ABQ$  e  $\triangle ACP$  em relação ao triângulo  $\triangle ABC$ .

Sejam  $D$  e  $E$  no lado  $BC$  tais que  $AD$  e  $RE$  são perpendiculares a  $BC$ . Como os triângulos  $\triangle ACD$  e  $\triangle RCE$  são semelhantes (os três ângulos são iguais) podemos escrever:



$$\frac{CR}{CA} = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \frac{h}{H} = \frac{1}{n}$$

Então:

$$A_{\triangle BCR} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{1}{n} \frac{BC \cdot H}{2} = \frac{1}{n} A_{\triangle ABC}$$

Da mesma maneira, concluímos que:

$$A_{\triangle ABQ} = \frac{1}{n} A_{\triangle ABC} \quad \text{e} \quad A_{\triangle ACP} = \frac{1}{n} A_{\triangle ABC}.$$

Assim, a área do triângulo  $\triangle XYZ$  pode ser escrita como:

$$A_{\triangle XYZ} = A_{\triangle ABC} - (A_{\triangle BCR} + A_{\triangle ABQ} + A_{\triangle ACP}) + A_{\triangle BYQ} + A_{\triangle CZR} + A_{\triangle AXP}$$

Vamos calcular a área dos triângulos que ainda não conhecemos.

Para o triângulo  $\triangle BYQ$ , consideremos um ponto K tal que  $\overline{RK} \setminus \overline{AQ}$ .

Aplicando o teorema de Tales temos que:

$$\frac{CK}{CQ} = \frac{CR}{CA} = \frac{1}{n}.$$

Logo,  $CK = \frac{1}{n}CQ$ . Mas,  $CQ = \frac{n-1}{n}BC$ . Assim,  $CK = \frac{n-1}{n^2}BC$ .

Agora,

$$A_{\triangle CKR} = \frac{CK \cdot h}{2} = \frac{\frac{n-1}{n^2}BC \cdot h}{2} = \frac{n-1}{n^2}A_{\triangle BCR} = \frac{n-1}{n^3}A_{\triangle ABC}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A_{\triangle BKR} &= A_{\triangle BCR} - A_{\triangle CKR} = \left( \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^3} \right) A_{\triangle ABC} \\ &= \frac{n^2 - n + 1}{n^3} A_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

Como  $BK = BC - CK = BC - \frac{n-1}{n^2}BC = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}BC$ , teremos

$$\frac{BQ}{BK} = \frac{\frac{1}{n}BC}{\frac{n^2 - n + 1}{n^2}BC} = \frac{n}{n^2 - n + 1}.$$

Assim,

$$\frac{A_{\triangle BYQ}}{A_{\triangle BKR}} = \left( \frac{BQ}{BK} \right)^2 = \left( \frac{n}{n^2 - n + 1} \right)^2,$$

e então,

$$\begin{aligned} A_{\triangle BYQ} &= \left( \frac{n}{n^2 - n + 1} \right)^2 \frac{n^2 - n + 1}{n^3} A_{\triangle ABC} \\ &= \frac{1}{n(n^2 - n + 1)} A_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

Como essa área só depende de  $n$  e da área  $A_{\triangle ABC}$ , concluímos que

$$A_{\triangle CZR} = A_{\triangle AXP} = A_{\triangle BYQ} = \frac{1}{n(n^2 - n + 1)} A_{\triangle ABC}.$$

Então,

$$A_{\triangle XYZ} = A_{\triangle ABC} - \frac{3}{n} A_{\triangle ABC} + \frac{3}{n(n^2 - n + 1)} A_{\triangle ABC}.$$

Ou seja,

$$A_{\triangle XYZ} = \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n(n^2 - n + 1)}\right) A_{\triangle ABC} = \frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1} A_{\triangle ABC}.$$

Portanto,

$$\frac{A_{\triangle XYZ}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1}.$$

(b) Queremos encontrar o menor  $n$  inteiro positivo tal que

$$\frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1} > 1 - \frac{1}{2008}.$$

Assim,

$$\frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1} > \frac{2007}{2008} \Leftrightarrow 2008(n-2)^2 > 2007(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 6025n + 6025 > 0.$$

Então,

$$n = \frac{6025 \pm \sqrt{(6025)^2 - 4 \cdot 6025}}{2} = \frac{6025 \pm \sqrt{6025 \cdot 6021}}{2}.$$

Agora, se

$$n_1 = \frac{6025 + \sqrt{6025 \cdot 6021}}{2} \text{ e } n_2 = \frac{6025 - \sqrt{6025 \cdot 6021}}{2}$$

então, como

$$6021 < \sqrt{6025 \cdot 6021} < 6025,$$

teremos

$$6023 = \frac{6025 + 6021}{2} < n_1 < \frac{6025 + 6025}{2} = 6025$$

e

$$n_2 < 6025 - 6021 = 4.$$

Para  $n$  tal que  $n_2 < n < n_1$ , teremos  $n^2 - 6025n + 6025 < 0$ , e para  $n_1 < n$  ou  $n < n_2$  teremos  $n^2 - 6025n + 6025 > 0$ . Como  $1 < n$ , então o menor valor de  $n$  é 6024.



## **Premiados**

### **Nível 1**

#### **Ouro**

- João Marcos Carnieletto Nicolodi (Escola Dinâmica)

#### **Prata**

- Amanda Tasca Petroski (Alpha Objetivo)
- Anderson Negreli (E.B.M. Doutor Hercílio Malinowsky)
- Diego Wyzykowski (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Eduardo Ferrari Ghizzo (Centro Educacional Menino Jesus)
- Nikolas da Costa Pinhelli (E.M. Prof. Anna Maria Harger)
- Pedro Bernardo Roecker (Colégio Tradição)

#### **Bronze**

- Andressa Carolina Gonçalves (E.M. Prof. Anna Maria Harger)
- Héctor Otavio Borba Paradela (E. M. Governador Pedro Ivo Campos)
- Karla Nogueira (E.M. Prof. Anna Maria Harger)
- Letícia dos Anjos Feliciano (Colégio Sagrada Família)
- Nicolas Fernandez Leitão (Escola Vivência)

#### **Menção Honrosa**

- Alex Amadeu Cani (Colégio Sinodal Ruy Barbosa)
- Alini Djenani Jansen Pereira (E.M. Prof. Anna Maria Harger)
- Antônio Jerônimo Botelho (Colégio Dehon)
- Beatriz Sada Ramos (Educandário Imaculada Conceição)

- Bruna Thieme (Colégio Cenecista Pedro Antônio Fayal)
- Bruno Granella Serpa (Colégio Geração)
- Caio Linhares Prujansky (Escola Dinâmica)
- Christine Le Brun de Vielmond (Colégio da Lagoa)
- Fernanda Momm Antunes (E.M. Prof. Anna Maria Harger)
- Gustavo Heinzen (Escola Barão do Rio Branco)
- Gustavo Stuart Gentil (Sistema de Ensino Energia Jurerê)
- Jéssica Convertino (Colégio Cenecista Pedro Antônio Fayal)
- Julian Vieira Franzen (Colégio Geração)
- Karen Delvoss Ribas (E.M. Prof. Anna Maria Harger)
- Leandro Jun Kimura (Escola Municipal Profª. Zulma do Rosário Miranda)
- Lucas André Bibow (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Maria Luiza Draprinchinski (Colégio Energia Santo Amaro)
- Natália Coriolano Machado (E.M.E.F. Oswaldo dos Reis)
- Rafael Wisbecki (E.M. Prof. Anna Maria Harger)
- Romeu Retzlaff Junior (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Vinícios Wiggers (Escola Municipal Professora Anna Maria Harger)
- Vitor Hugo Benner da Silva (Escola Barão do Rio Branco)
- Yohanna Lima dos Santos (Colégio Cenecista José Elias Moreira)

**Nível 2****Ouro**

- Eduardo José Mendes (E.E.B. Prefeito Avelino Müller)

**Prata**

- Guilherme Grando Carqueja (Colégio Catarinense)
- Gustavo Reitz Sperotto (Colégio Catarinense)
- James Schroeder (Colégio Cenecista São José)
- Jefferson da Silva Vieira (E.M. Prof. João Bernardino da Silveira Júnior)
- Lucas Kuhen Costa (Colégio Energia - Unidade Santo Amaro)
- Miryan Yumi Sakamoto (Colégio da Lagoa)
- Paulo Vinícius Lisboa Girardi (Colégio Catarinense)
- Rafael de Melo Böeger (E. M. Governador Pedro Ivo Campos)

**Bronze**

- Andréa Ayumi Saito do Nascimento (Colégio São Bento)
- Francisco Henrique Pinheiro Marques (Colégio Geração)
- Michael Borges Tommasini (E.M. Prof. João Bernardino da Silveira Júnior)
- Pedro Lufiego da Luz (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Saulo Figueiredo Silva (Colégio Geração)

**Menção Honrosa**

- Aluizio Cidral Junior (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Bianca Paola Gabardo (E.M. Prof. Anna Maria Harger)
- Daniel Gomes de Pinho Zanco (Colégio Bom Jesus Coração de Jesus)

- Daniela Weingärtner (Escola Barão do Rio Branco)
- Guilherme Voltolini Staedele (Escola Barão do Rio Branco)
- Helena Carolina Rengel Koch (E.M.E.F. Waldemar Schmitz)
- Lucas Martins Michels (E. M. Governador Pedro Ivo Campos)
- Lucas Tadeu Krüger Poffo (Sociedade Educacional Posiville)
- Luiz Felipe Andriani (Colégio Geração)
- Matheus Selke (E.B.M. Doutor Hercílio Malinowsky)
- Roberto Duessmann (E. M. Governador Pedro Ivo Campos)
- Sara Meurer (Colégio Sagrada Família)

### **Nível 3**

#### **Ouro**

- Gustavo Lisbôa Empinotti (Colégio Energia Centro)
- Marcelo Henrique Soar (Centro Educacional Timbó Sociedade Anônima )

#### **Prata**

- Marcei F. da Rosa Pereira (Sociedade Educacional Posiville)
- Natan Cardozo Leal (Escola de Ensino Médio Professor Roberto Grant)

#### **Bronze**

- Arthur Gregório (Sociedade Educacional Posiville)
- Filipe Eduardo Moecke (Escola Autonomia)
- Guilherme T. Locatelli (Colégio Energia Jurerê)
- Lourival Tenfen Júnior (Colégio Tupy)
- Marcelo Damázio (Colégio Aplicação )

- Nivaldo Stankiewicz Júnior (Sociedade Educacional Posiville)
- Philippi Farias Rachadel (Educandário Imaculada Conceição)

### **Menção Honrosa**

- Eduardo Recktenvald Graeff (Colégio Catarinense)
- Ester Borges Nunes (Colégio São Bento)
- Giovani Goraiebe Pollachini (Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina)
- Jéferson Zappelini Petry (Colégio Tupy)
- Leonardo de Bortoli (Colégio Catarinense)
- Matheus de Oliveira Demetrio (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Maurício Darabas Ronçani (Escola Agrotécnica Federal de Sombrio)
- Patrícia Cristina Ribeiro (Colégio Catarinense)
- Ruana Maíra Schneider (Senai Jaraguá do Sul)

## Escolas Participantes

Associação Franciscana de Ensino Senhor Bom Jesus São José (São Bento do Sul); C. E. M. Tomaz Francisco Garcia (Balneário Camboriú); CEJA (Ibirama) ; Centro de Educação Camboriú Ltda. (Balneário Camboriú); Centro de Educação do Município de Mafra (Mafra); Centro de Educação Elcana (Palhoça); Centro de Educação Tangaraense (Tangará); Centro Educacional Canguru (Jaraguá do sul); Centro Educacional Criativo (Florianópolis); Centro Educacional Cultura (Brusque); Centro Educacional Giovania de Almeida (Balneário Camboriú); Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis); CCentro Educacional Municipal Araucaria (São José) ; Centro Educacional Municipal Presidente Médici (Balneário Camboriú); Centro Educacional Pedro dos Santos (Rio do Sul); Centro Educacional Roberto Machado (Rio do Sul); Centro Educacional SATC (Criciúma); Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina (Florianópolis); Cetisa - Centro Educacional Timbó Sociedade Anônima (Timbó); Colegio Alto Vale (Rio do Sul); Colégio Bom Jesus Coração de Jesus (Florianópolis); Colegio Catarinense (Florianópolis); Colegio Cenecista José Elias Moreira (Joinville); Colégio Cenecista Pedro Antônio Fayal (Itajaí); Colégio Cenecista São José (Rio Negrinho); Colégio Cruz e Sousa (Florianópolis); Colégio da Lagoa (Florianópolis); Colégio de Aplicação (Florianópolis); Colégio de Ensino Médio Univille (Joinville); Colégio Dehon (Tubarão) ; Colégio Dom Jaime Camara (São José); Colegio dos Santos Anjos (Joinville); Colégio Energia (Criciúma) ; Colégio Energia (Florianópolis) ; Colégio Energia (Sto. Amaro da Imperatriz); Colégio Evolução (São Ludgero); Colégio Exathum (Joinville); Colégio Francisco José Ferreira Neto (São José); Colégio Geração (Florianópolis); Colégio Global (São Bento do Sul); Colégio Hamônia (Ibirama); Colégio Madre Francisca Lampel (Gaspar); Colégio Nossa Senhora de Fátima (Florianópolis); Colégio Sagrada Família (Blumenau); Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí); Colegio Santa Rosa de Lima (Lages) ; Colégio Santo Antônio (Joinville); Colégio São Bento (Criciúma) ; Colegio Sinodal Doutor Blumenau (Pomerode); Colégio Sinodal Ruy Barbosa (Rio do Sul); Colégio Superação

(Videira); Colégio Tradição (Florianópolis); Colégio Tupy (Joinville) ; Colégio Universitário Criciúma (Criciúma); Colégio Universitário Gaspar (Gaspar); Colégio Visão (São José) ; Curso e Colégio Tendência (Florianópolis); E. B. Aníbalcesar (Itajaí) ; E. B. Doutor Amadeu da Luz (Pomerode); E. B. M. Alberto Bordin (Jaborá); E. B. M. Anita Garibaldi (Blumenau); E. B. M. Annemarie Techentin (Blumenau); E. B. M. Basileu José da Silva (Imbituba); E. B. M. Donícia Maria Da Costa (Florianópolis); E. B. M. Dr. Hercílio Malinowsky (São Bento do Sul); E. B. M. Edith Willecke (São Bento do Sul) ; E. B. M. Judite Adelina Schürhaus (Sto. Amaro da Imperatriz); E. B. M. Luiz Cândido da Luz (Florianópolis); E. B. M. Nossa Senhora Aparecida (Xanxerê); E. B. M. Prefeito Henrique Schwarz (São Bento do Sul); E. B. M. Prof<sup>o</sup> Antônia Gasino de Freitas (Barra Velha); E. B. M. Prof<sup>a</sup> Júlia Strzalkowska (Blumenau); E. B. M. Rio Do Pinho (Canoinhas); E. B. M. Rodolfo Berti (São Bento do Sul); E. B. M. São Francisco (Guarujá do Sul); E. B. Martha Claudio Machado (Orleans); E. B. Melvin Jones (Itajaí); E. B. Prefeito Alberto Werner (Itajaí); E. B. Prof<sup>a</sup> Antonieta Silveira De Souza (Palhoça); E. B. Prof<sup>o</sup> Leopoldo Hanof (Orleans); E. B. Prof<sup>o</sup> Martinho Gervási (Itajaí); E. E. B. Aderbal Ramos Da Silva (Florianópolis); E. E. B. Alécio Alexandre Cella (Chapecó) ; E. E. B. Conselheiro Manoel Philippi (Águas Mornas); E. E. B. Dr. Frederico Rolla (Atalanta); E. E. B. Erwin Radtke (Blumenau); E. E. B. Luiz Dalcanalle (Joaçaba) ; E. E. B. Prof<sup>a</sup> Lourdes Tonin (Planalto Alegre); E. E. B. Prof<sup>o</sup> Rudolfo Meyer (Joinville); E. E. B. Rocha Pombo (São Joaquim); E. E. B. Rodolfo Zipperer (Canoinhas); E. E. B. São Judas Tadeu (Lages); E. E. B. Willy Hering (Rio do Sul); E. E. B. Adolfo José Martins (Bom Jardim da Serra); E. E. B. Antônio Gonzaga (Porto União); E. E. B. Araújo Figueiredo (Urubici); E. E. B. Conselheiro Mafra (Joinville); E. E. B. Coronel José Maurício dos Santos (Laguna); E. E. B. Costa Carneiro (Orleans); E. E. B. Dayse Werner Salles (Florianópolis); E. E. B. Deputado Nelson Pedrini (Joaçaba); E. E. B. Domingos Barbosa Cabral (Laguna); E. E. B. Humberto Hermes Hoffmann (Nova Veneza); E. E. B. João Colin (Joinville); E. E. B. Joao Teixeira Nunes (Tubarão); E. E. B. José Do Patrocínio (Siderópolis); E.

E. B. Luiz Dalcanalle (Joaçaba); E. E. B. M. Aurora Péterle (Siderópolis); E. E. B. Maria Corrêa Saad (Garopaba); E. E. B. Nereu de Oliveira Ramos (Guaraciaba); E. E. B. Prefeito Pedro Bittencourt (Imaruí); E. E. B. Prof<sup>a</sup> Valdete Ines Piazero Zindars (Jaraguá do Sul); E. E. B. Prof<sup>o</sup> Henrique da Silva Fontes (Rio do Sul) ; E. E. B. Prof<sup>o</sup> Mário de Oliveira Goeldner (Mafra) ; E. E. B. São Ludgero (São Ludgero); E. E. B. Visconde do Rio Branco (Imbituba); E. E. F. Bento Elói Garcia (Itapema) ; E. E. F. Prefeito Isidoro Giácomo Savaris (Ipumirim); E. E. F. Prof<sup>a</sup> Maria Clementina de Souza Lopes (Palhoça); E. E. F. Prof<sup>o</sup> Luís Félix Barreto (Imaruí); E. E. F. Prof<sup>o</sup> Emir Ropelato (Timbó) ; E. E. F. São João Batista (São Miguel do Oeste); E. E. F. Toldo Velho (Ipuçu) ; E. E. F. Fundamental Angelo Dognini (Brusque); E. E. M. Manuel Da Nóbrega (Rio Negrinho) ; E. E. M. Prof<sup>o</sup> Roberto Grant (São Bento do Sul); E. M. E. B. Frei Bernrdino (Lages) ; E. M. E. B. Prefeito Frederico Lampe (Rio Negrinho); E. M. E. B. Prof<sup>a</sup> Selma Teixeira (Rio Negrinho); E. M. E. B. Prof<sup>a</sup> Lucinda Maros Pscheidt (Rio Negrinho); E. M. E. F. Angelo de Luca (Criciúma); E. M. E. F. Anna Towe Nagel (Jaraguá do sul); E. M. E. F. Helmuth Guilherme Duwe (Jaraguá do sul); E. M. E. F. Oswaldo dos Reis (Itapema); E. M. Erwin Prade (Timbó); E. M. Governador Pedro Ivo Campos (Joinville); E. M. Maurício Germer (Timbó); E. M. Padre Martinho Stein (Timbó) ; E. M. Presidente Castello Branco (Joinville); E. M. Prof<sup>o</sup> João Bernardino Da Silveira Junior (Joinville); E. M. Prof<sup>a</sup> Anna Maria Harger (Joinville); E. M. Prof<sup>a</sup> Zulma do Rosario Miranda (Joinville); E. M. Prof<sup>a</sup> Zulma Do Rosario Miranda (Joinville); E. M. Professora Ada Sant'Anna da Silveira (Joinville); E. M. Vereador Curt Alvino Monich (Joinville); E. M. Viver e Conhecer (Capinzal); Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis); Escola Agrotécnica Federal De Sombrio (Santa Rosa do Sul); Escola Autonomia (Florianópolis); Escola Barão do Rio Branco (Blumenau) ; Escola de Educação Victor Hering (Blumenau); Escola Dinâmica (Florianópolis) ; Escola Gennius - Ensino Fundamental (Videira); Escola Municipal de Ensino Fundamental Educar (Itapema); Escola Sarapiquá (Florianópolis); Escola Técnica de Comércio De Tubarão (Tubarão); Escola Técnica Tupy



(São Bento do Sul); **Escola Vivencia Pe E Primeiro Grau** (Florianópolis); **Fundação Bradesco** (Laguna); **Gennius Ensino Fundamental** (Videira); **Grupo Escolar Municipal Horizonte Núcleo II** (Zortéa) ; **Instituto Educacional Madre Elisa Savoldi** (Sombrio); **Instituto Estadual De Educação** (Florianópolis); **Instituto Maria Auxiliadora** (Rio do Sul); **N. E. M. Profº Claudino Locatelli** (Ipumirim); **Núcleo Ed. M. Avelino Alves Triches** (Palmitos); **Senai** (Videira); **Senai - Centro De Educação Tecnológica Jaraguá Do Sul** (Jaraguá do sul); **Senai de Tubarão** (Tubarão); **Sistema de Ensino Energia** (Blumenau); **Sistema de Ensino Energia** (Joinville); **Sociedade Educacional Posiville** (Joinville).





# Artigos

---



## Dois Problemas do Professor Waldir

Carmem Suzane Comitre Gimenez

Departamento de Matemática - UFSC  
Florianópolis - SC

Há alguns anos o Professor Waldir Quandt sugeriu dois problemas para a nossa Olimpíada Regional. Pensamos várias vezes em colocá-los nas provas, mas por vários motivos eles ficaram na espera; devemos confessar que achávamos os problemas muito difíceis... Mas problemas deste tipo eram uma diversão para o Professor Waldir. Agora que ele não está mais conosco, gostaríamos de propô-los a todos vocês; aguardaremos as soluções!

### Problema 1

Sabendo que  $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\dots$  determine a expressão decimal de

$$x = \left(\frac{857148}{1000006}\right)^2 + \left(\frac{142856}{999992}\right)^2.$$

### Problema 2

Em um papel quadriculado é traçado um segmento de modo que suas extremidades não estão sobre linhas do papel. Prove que o número  $q$  de quadrados pelos quais o segmento passa é dado por  $q = v + h + c + 1$ , sendo  $c$  o número de “cantos” cruzados pelo segmento,  $v$  o número de verticais cruzadas pelo segmento e  $h$  o número de horizontais cruzadas pelo segmento.

## O Princípio da Casa dos Pombos e suas Aplicações

Deividi Ricardo Pansera e Edson Valmórbida <sup>1</sup>

Florianópolis - SC

### O Princípio da Casa dos Pombos e suas Aplicações

*Se colocarmos 10 pombos em 9 gaiolas então pelo menos uma das gaiolas terá mais de um pombo.*

Também conhecido como **Princípio de Dirichlet**, ou ainda Princípio das Gavetas de Dirichlet, o Princípio da Casa dos Pombos é, ao mesmo tempo, uma ferramenta simples e poderosa para resolver, principalmente, problemas em Análise Combinatória. Foi primeiramente usada explicitamente por Dirichlet<sup>2</sup> na Teoria dos Números.

Na sua forma mais simples o Princípio da Casa dos Pombos pode ser enunciado da seguinte forma:

“Dados  $n + 1$  objetos dentro de  $n$  gavetas então, pelo menos, uma das gavetas contém mais de um objeto.”

**Observação 1** *Matematicamente falando, isto quer dizer que se o número de elementos de um conjunto finito  $A$  é maior do que o número de elementos de um outro conjunto  $B$ , então uma função de  $A$  em  $B$  não pode ser injetiva.*

Vamos demonstrar agora o princípio. Na demonstração usamos uma técnica chamada “demonstração por absurdo”, que é um argumento simples em lógica clássica.

**Demonstração:** Suponha que possamos colocar os  $n + 1$  objetos nas  $n$  gavetas e que todas elas tenham no máximo um objeto. Mas, dessa forma, teríamos no máximo

---

<sup>1</sup> Graduando em Matemática e Computação Científica da UFSC e bolsistas PIBIC/CNPq.

<sup>2</sup> Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemão.

$n$  objetos guardados (1 em cada gaveta) e, portanto, temos um absurdo, pois havíamos suposto que conseguiríamos colocar  $n + 1$  objetos nas  $n$  gavetas. Logo, o princípio vale.



Vejamos agora algumas sentenças simples que podem ser demonstradas usando o princípio que enunciamos:

- Dadas 3 pessoas então duas delas são do mesmo sexo.
- Num grupo de 13 pessoas, pelo menos 2 delas nasceram no mesmo mês.
- Supondo que ninguém tem mais que 300.000 fios de cabelo então tomando 300.001 pessoas pelo menos 2 delas tem a mesma quantidade de fios.
- Escolha, dentre os elementos do conjunto  $\{1, 2, \dots, 200\}$ , 101 números ao acaso. Então, entre os números escolhidos, há dois números tais que um deles divide o outro.

Os três primeiros itens são consequência direta do enunciado do princípio. Vejamos como resolver o quarto item (que é mais complicado). Para isso, usamos um resultado conhecido de Teoria dos Números:

**Afirmção:** Todo número inteiro  $n$  diferente de zero pode ser escrito sob a forma  $n = 2^r b$ , em que  $r$  é um inteiro não negativo e  $b$  é um inteiro ímpar. Por exemplo,  $36 = 2^2 \cdot 9$ ,  $25 = 2^0 \cdot 25$ ,  $16 = 2^4 \cdot 1$ .

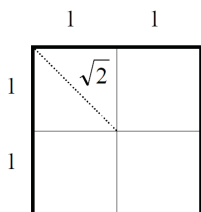
Dessa forma, se  $n \in A = \{1, 2, \dots, 200\}$ , então pela afirmação acima,  $n$  pode ser escrito como  $n = 2^r b$  em que  $b$  é um dos inteiros ímpares  $1, 3, \dots, 199$ . Note que  $b$  não é maior que 199 pois, caso contrário, teríamos  $n > 200$ , pois  $2^r \geq 1$ . Assim, há 100 possibilidade para  $b$ .

Portanto, se escolhermos 101 números do conjunto  $A$ , pelo Princípio da Casa dos Pombos, dois deles terão o mesmo  $b$ . Sejam  $n_1 = 2^{r_1} b$  e  $n_2 = 2^{r_2} b$  esses números. Caso  $r_1 < r_2$ , então  $n_2 = 2^{r_2} b = 2^{r_2 - r_1} \cdot (2^{r_1} b) = 2^{r_2 - r_1} n_1$  e portanto  $n_1$  divide  $n_2$ , uma vez que  $r_2 - r_1 > 0$ . Caso  $r_1 > r_2$ , então  $n_1 = 2^{r_1} b = 2^{r_1 - r_2} \cdot (2^{r_2} b) = 2^{r_1 - r_2} n_2$  e portanto  $n_2$  divide  $n_1$ , uma vez que  $r_1 - r_2 > 0$ . Isso conclui a demonstração.

Veremos a seguir um exemplo que mostra claramente a importância do princípio.

**Exemplo 1** Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a  $\sqrt{2}$ .

**Solução:** A solução desse problema é um tanto quanto “não-intuitiva”. A idéia é dividir o quadrado de lado 2 em 4 quadrados de lado 1 (neste caso  $n = 4$ ) pois com isso podemos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos e identificar que pelo menos 2 dos 5 pontos estarão em um desses quadrados (veja figura abaixo).



Sabemos que a diagonal de um quadrado de lado  $l$  mede  $l\sqrt{2}$  e portanto a diagonal do quadrado em questão vale  $2\sqrt{2}$  e a diagonal dos quadrados menores valem  $\sqrt{2}$ , que é a maior distância dentro do quadrado de lado 1. Logo, na pior das hipóteses, teremos 2 pontos que distam  $\sqrt{2}$ .

O Princípio da Casa dos Pombos pode ser generalizado da seguinte maneira:

“Se  $m$  objetos são colocados em  $n$  gavetas, então pelo menos uma gaveta contém  $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$  objetos.”

**OBS:**  $\lfloor x \rfloor$  é o maior número inteiro menor que ou igual a  $x$ .

**Demonstração:** Se cada gaveta contiver no máximo  $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$  objetos, então o número de objetos será no máximo

$$n \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq n \cdot \frac{m-1}{n} = m-1 < m,$$

que é uma contradição. ■

**Exemplo 2** Em um grupo de 40 pessoas, pelo menos 4 têm o mesmo signo.

**Solução:** De fato, colocando cada pessoa (objeto) na gaveta do seu signo, temos  $m = 40$  e  $n = 12$ . Logo, pelo menos uma gaveta conterá  $\left\lfloor \frac{40-1}{12} \right\rfloor + 1 = 4$  objetos.



**Exemplo 3** *Um enxadrista (jogador de xadrez) tem 77 dias para se preparar para um torneio. Ele quer jogar pelo menos um jogo por dia, mas não mais de 132 jogos. Prove que existe uma seqüência de dias sucessivos em que ele joga exatamente 21 jogos.*

**Solução:** Seja  $a_i$  o número de jogos disputados até  $i$ -ésimo dia. Então

$$1 \leq a_1 < \dots < a_{77} \leq 132.$$

Somando 21 nestas desigualdades, obtemos

$$22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \leq 153.$$

Então, temos 154 objetos, que são os números  $a_1, \dots, a_{77}, a_1 + 21, \dots, a_{77} + 21$ , e 153 “gavetas”. Logo, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem índices  $j$  e  $i$  com  $j < i$  tais que  $a_i = a_j + 21$ . Assim, o enxadrista jogou exatamente 21 jogos entre os dias  $j + 1, j + 2, \dots, i$ , pois o número de jogos jogados no  $i$ -ésimo dia é igual ao número de jogos jogados no  $j$ -ésimo dia mais 21 partidas.

Existe ainda uma outra forma de enunciar o Princípio da Casa dos Pombos:

“Suponha que hajam  $n$  gavetas e seja  $\mu$  um inteiro positivo dado. Coloquemos  $a_1$  objetos na 1ª gaveta,  $a_2$  objetos na 2ª gaveta e assim sucessivamente até  $a_n$  objetos na  $n$ -ésima gaveta. Então, se a média  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  for maior que  $\mu$ , uma das gavetas conterá pelo menos  $\mu + 1$  objetos.”

**Demonstração:** Se todos os  $a_i$  fossem menores que  $\mu + 1$ , teríamos

$$\begin{aligned} a_1 &\leq \mu \\ a_2 &\leq \mu \\ &\vdots \\ a_n &\leq \mu \end{aligned}$$

Daí,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n\mu$  e

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \mu,$$

o que é uma contradição. ■

Ou seja, o que o enunciado acima quer dizer é que se a média aritmética de um determinado conjunto de números é maior que uma constante então pelo menos um dos elementos deste conjunto é maior que esta constante.

Deixamos para o leitor interessado alguns exercícios que achamos interessantes para melhorar a compreensão do princípio ou como desafio.

1. Num grupo de 6 pessoas, pelo menos 3 delas se conhecem ou 3 delas não se conhecem.
2. Qual o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele haja pelo menos 5 pessoas nascidas no mesmo mês?
3. Sejam  $a_1, \dots, a_n$   $n$  inteiros não necessariamente distintos. Então sempre existe um subconjunto destes números cuja soma é divisível por  $n$ .
4. São dados dois discos  $A$  e  $B$ , cada um deles dividido em 200 setores iguais, os quais estão pintados de branco ou de preto. No disco  $A$  há 100 setores e 100 setores pretos, em ordem desconhecida. No disco  $B$  não sabemos quantos setores são brancos. Coloquemos o disco  $A$  sobre o disco  $B$ , de modo que os setores de  $A$  fiquem exatamente sobre os setores de  $B$ . É possível então, rodando o disco  $A$ , obter uma posição na qual 100 setores de  $A$  tenham a mesma cor que os correspondentes de  $B$ ?

### Referências

- [1] ENGEL, Arthur. Problem-Solving Strategies. New York: Springer-verlag, 1997.
- [2] MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [3] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. O Princípio das Gavetas. Eureka!, Rio de Janeiro, n. 5, p.27-33, ago. 1999.

## Algumas propriedades notáveis das cônicas II

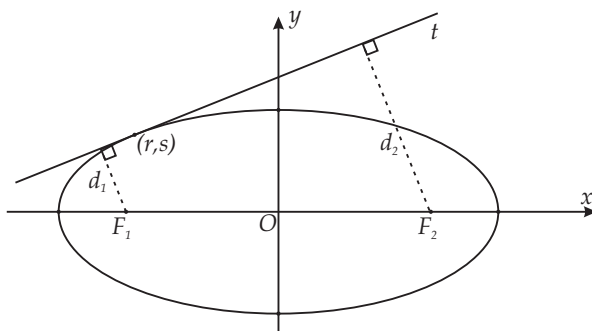
Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Departamento de Matemática - UFSC  
Florianópolis - SC

### Algumas propriedades notáveis das cônicas II

Este artigo é o segundo dedicado a propriedades clássicas das cônicas. O primeiro apareceu no no.4 desta revista e tratou das chamadas propriedades óticas das cônicas. No presente artigo consideramos inicialmente duas propriedades especiais das tangentes na elipse e na hipérbole equilátera. As demais são sobre sistemas de cordas nas cônicas.

**A.** O produto das distâncias de cada foco de uma elipse a qualquer reta tangente não depende do ponto de contato.



Consideremos a elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

com focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (0, c)$ ,  $c > 0$ . Para provarmos a propriedade precisamos dos seguintes resultados: a equação de uma reta  $t$  tangente à elipse (1) no

ponto  $(r, s)$  é

$$rb^2x + sa^2y - a^2b^2 = 0 \quad (2)$$

e a distância de um ponto  $Q(x_0, y_0)$  à reta  $Ax + By + C = 0$  pode ser calculada pela fórmula

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{(A^2 + B^2)^{1/2}}. \quad (3)$$

Por esta fórmula, a distância de  $F_1$  à reta  $t$  é

$$d_1 = \frac{|rb^2c + a^2b^2|}{(r^2b^4 + s^2a^4)^{1/2}} \quad (4)$$

e a distância de  $F_2$  a  $t$  é

$$d_2 = \frac{|rb^2c - a^2b^2|}{(r^2b^4 + s^2a^4)^{1/2}}. \quad (5)$$

Multiplicando  $d_1$  e  $d_2$  obtemos o seguinte resultado:

$$d_1d_2 = \frac{|r^2c^2b^4 - a^4b^4|}{r^2b^4 + s^2a^4}. \quad (6)$$

Mas as coordenadas  $r$  e  $s$  satisfazem a equação da elipse, ou seja,

$$b^2r^2 + a^2s^2 = a^2b^2. \quad (7)$$

Substituindo (7) na (6) obtemos:

$$d_1d_2 = b^2. \quad (8)$$

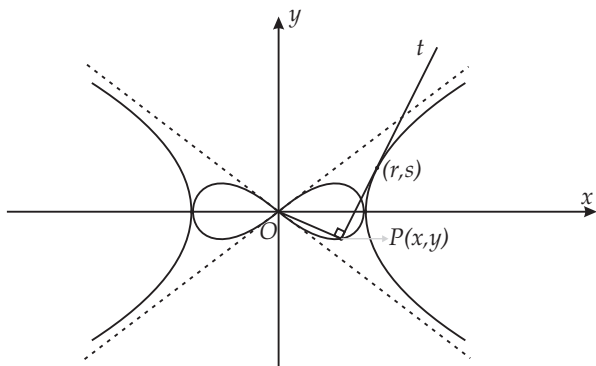
O resultado não depende de  $r$  e  $s$  e, portanto, do ponto de contato  $(r, s)$  da reta tangente.

**B. Dada a hipérbole equilátera**

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (10)$$

e a reta tangente  $t$  no ponto  $Q(r, s)$ , seja  $OP$  o segmento com extremos na origem  $O(0, 0)$  e no ponto  $P(x, y)$  da reta  $t$ , que é perpendicular a  $t$  no ponto  $P$ . Variando continuamente o ponto  $Q$  ao longo da hipérbole, o ponto  $P$  descreve a curva de equação

$$a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2 \quad (11)$$



chamada de Lemniscata.

A reta tangente num ponto  $(r, s)$  da hipérbole tem equação

$$rx - sy = a^2 \quad (12)$$

e a reta que contém o segmento  $OP$  e é perpendicular a  $t$  é

$$sx + ry = 0. \quad (13)$$

O ponto  $P$  pertence a ambas as retas de forma que suas coordenadas satisfazem (12) e (13). A partir destas equações obtemos

$$r = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \quad (14)$$

e

$$s = -\frac{a^2 y}{x^2 + y^2}. \quad (15)$$

O ponto  $(r, s)$  pertence à hipérbole e, portanto,

$$r^2 + s^2 = a^2. \quad (16)$$

Substituindo (14) e (15) na (16) determina-se a (11).

**C.** Os pontos médios de um sistema de cordas paralelas de uma dada cônica estão sobre uma reta.

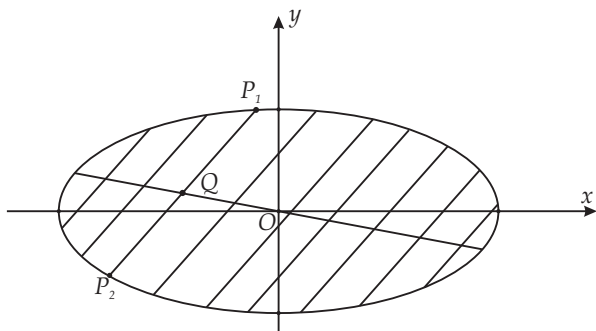
Esta propriedade é imediata quando o sistema de cordas é paralelo a um dos eixos coordenados,  $X$  ou  $Y$ , tendo em vista a simetria de uma cônica em relação a estes eixos. Neste caso os pontos médios estão sobre os eixos. Consideremos, então, o caso em que o sistema de cordas não é paralelo a nenhum dos eixos.

### Caso 1. Elipse.

Consideremos a elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (17)$$

e um sistema de cordas paralelas.



Seja  $m$  o coeficiente angular das cordas. Uma corda tem equação

$$y = mx + l \quad (18)$$

sendo o coeficiente linear  $l$  distinto para cada corda. O coeficiente angular é o mesmo para todas as cordas visto serem paralelas.

Uma corda do sistema tem dois pontos em comum com a elipse,  $P_1$  e  $P_2$ . As abscissas destes pontos podem ser determinadas substituindo a equação (18) na equação (17). Fazendo isso resulta

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mlx + a^2(l^2 - b^2) = 0. \quad (19)$$

Denotemos por  $x_1$  e  $x_2$  as raízes da (19). As ordenadas de  $P_1$  e  $P_2$  podem ser calculadas substituindo-se  $x_1$  e  $x_2$  na equação (18). Fixemo-nos numa corda qualquer. Seja  $Q(x_0, y_0)$  seu ponto médio. Então,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (20)$$

Mas a soma das raízes da equação (19) satisfazem

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2ml}{b^2 + a^2m^2} \quad (21)$$

de modo que

$$x_0 = -\frac{a^2ml}{b^2 + a^2m^2}. \quad (22)$$

Podemos, agora, calcular  $y_0$  substituindo (22) na (18). Segue que

$$y_0 = \frac{b^2l}{b^2 + a^2m^2}. \quad (23)$$

Como cada corda tem um valor distinto de  $l$ , as cordas do sistema tem pontos médios distintos. Contudo, comparando (22) e (23), determina-se a relação

$$y_0 = -\frac{b^2}{a^2m}x_0. \quad (24)$$

Portanto, qualquer que seja a corda e, portanto, seu ponto médio  $(x_0, y_0)$ , este está sobre a reta de coeficiente angular

$$m' = -\frac{b^2}{a^2m}. \quad (25)$$

Note que  $m'$  não depende de  $l$ . Logo, qualquer que seja a corda, seu ponto médio se encontra sobre a reta (24).

## Caso 2. Hipérbole.

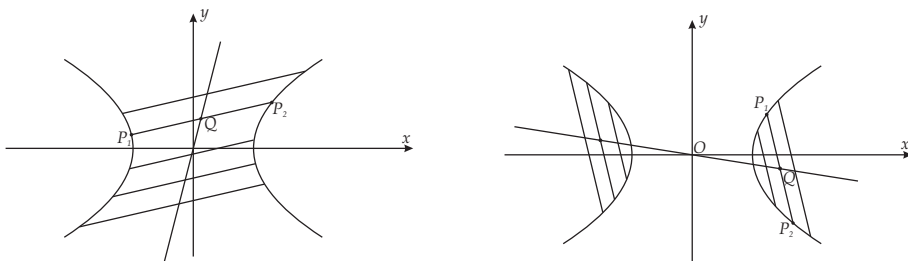
Consideremos a hipérbole

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (26)$$

e um sistema de cordas paralelas dessa hipérbole. Seja  $m$  o coeficiente angular comum a estas cordas e  $l$  o coeficiente linear, distinto para cada corda. Uma corda então tem equação

$$y = mx + l \quad (27)$$

Uma corda tem dois pontos em comum com a hipérbole.



Podemos calcular suas abscissas através da equação

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mlx - a^2(l^2 + b^2) = 0 \quad (28)$$

obtida substituindo a (27) na (26). No caso de uma hipérbole nenhuma corda pode ser paralela a uma das assíntotas pois, do contrário, teria um único ponto em comum com a hipérbole. Sendo assim,  $m \neq b/a$  e  $m \neq -b/a$  e, portanto, na equação (28),  $b^2 - a^2m^2 \neq 0$ .

Podemos determinar o ponto médio de uma corda seguindo as mesmas idéias usadas no caso da elipse. Obtemos, então, que

$$x_0 = \frac{a^2ml}{b^2 - a^2m^2}. \quad (29)$$

Podemos calcular  $y_0$  substituindo (29) na (27):

$$y_0 = -\frac{b^2l}{b^2 - a^2m^2}. \quad (30)$$

De (29) e (30), vem que

$$y_0 = -\frac{b^2}{a^2m}x_0, \quad (31)$$

do qual podemos estabelecer a mesma conclusão do caso anterior.

### Caso 3. Parábola.

Seja a parábola de equação

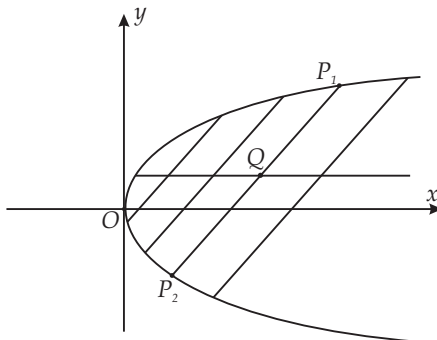
$$y^2 = 2px \quad (32)$$



e um sistema de cordas paralelas com a equação

$$y = mx + l \quad (33)$$

em que  $m$  é o coeficiente angular das cordas do sistema e  $l$  é o coeficiente linear, distinto para cada corda.



Substituindo (33) na (32), a seguinte equação é obtida:

$$m^2 x^2 + 2(ml - p)x + l^2 = 0 \quad (34)$$

cujas raízes  $x_1$  e  $x_2$  são as abscissas dos extremos de uma corda. Importante aqui observar que cordas de uma parábola tem  $m \neq 0$ . Como nos casos anteriores podemos calcular o ponto médio  $Q(x_0, y_0)$  de uma corda:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p - ml}{m^2} \quad (35)$$

e ordenada

$$y_0 = \frac{p}{m} \quad (36)$$

Observe que qualquer que seja a corda, a ordenada do ponto médio é sempre igual a (36). Concluimos que os pontos médios das cordas estão sobre a reta  $y = \frac{p}{m}$  paralela ao eixo  $OX$ .

### Referências

- [1] da COSTA, G. A. T. F., Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina no.4, 2008.
- [2] WEXLER, C., Analytic Geometry, Addison-Wesley, 1961.
- [3] YEFIMOV, N., A brief course in Analytic Geometry, Peace Publishers, 1966.

## Quadrados mágicos simples

Licio Hernanes Bezerra

Departamento de Matemática - UFSC  
Florianópolis - SC

*Este artigo é dedicado à memória do Professor Waldir Quandt, com quem curti resolver muitos problemas de sua vasta coleção de livros de Matemática Recreativa nos idos anos da década de 90.*

Desde a antiguidade quadrados mágicos têm atraído a atenção de muitas pessoas. Os quadrados mágicos  $n \times n$  mais simples são os que contêm os números de 1 a  $n^2$  de tal modo que a soma das linhas, das colunas e das duas diagonais principais dá o mesmo resultado (qual?). Uma das primeiras aparições de um quadrado mágico na arte ocidental foi na gravura Melancholia, de Albrecht Dürer, datada de 1514 (ver [http://pt.wikipedia.org/wiki/Albrecht\\_Dürer](http://pt.wikipedia.org/wiki/Albrecht_Dürer)). Os japoneses construíram vários tipos durante o período Edo (1603-1867), quando propositalmente isolaram-se do ocidente.

A solução do quadrado  $3 \times 3$  é simples, pois são poucas as possibilidades de somas de 3 números, entre 1 e 9, cujo resultado seja 15 (por que 15?):  $9+5+1$ ,  $9+4+2$ ,  $8+6+1$ ,  $8+5+2$ ,  $8+4+3$ ,  $7+6+2$ ,  $7+5+3$ ,  $6+5+4$ . Observemos que como o número que fica no centro do quadrado tem que aparecer em 4 somas (as dos números das diagonais, a dos números da segunda linha e a dos números da segunda coluna), ele tem que ser 5. Os números dos cantos dos quadrados aparecem em 3 somas, cada um. Logo, esses números têm que ser: 2, 4, 6 e 8. Agora, é só completar e obtemos um quadrado mágico  $3 \times 3$ .

Observamos que todos os quadrados mágicos de ordem 3 possíveis são originados por reflexões do quadrado acima. É importante um aluno de Matemática aprender a seguir procedimentos, pois é isso que ele faz, por exemplo, ao realizar operações algébricas. O seguinte procedimento pode ser utilizado para se construir um quadrado mágico básico (números de 1 a  $n^2$ ), de ordem ímpar:

1. coloque o 1 na primeira linha (a de cima), na coluna do meio;
2. coloque o número seguinte sempre na casa acima e à direita da anterior.

3. caso as instruções o levem a sair do quadrado, imagine que existam 8 quadrados gêmeos, iguais a ele, posicionados acima, abaixo, nas diagonais e nos lados, como se ele fosse o quadrado do centro do jogo da velha e os outros 8 fossem os circundantes. Coloque então esse número na mesma posição em que se encontraria no quadrado gêmeo correspondente ao caso (por exemplo, o 2 vai ser colocado na última linha, na coluna imediatamente à direita da coluna do meio, pois esta seria a posição do 2 no quadrado gêmeo imediatamente acima);
4. se encontrar uma casa ocupada, ponha o número na casa imediatamente abaixo da casa do número anterior.

Complicado? Se o procedimento não for entendido à primeira vista, ele deve ser relido quantas vezes forem necessárias para a completa compreensão. Novamente, é importante que se desenvolva no aluno uma verificação constante do que está sendo deduzido ou construído. A Matemática Recreativa, com seus jogos tipo descubra o erro, siga as instruções seguintes, encaixe números segundo uma regra etc, tem um papel importante no desenvolvimento crítico e analítico do ser humano, em geral. A arte e a ciência muitas vezes se inspiraram nos quadrados mágicos. Alguns exemplos:

- O sistema interativo MATLAB, que é utilizado principalmente para resolver problemas que envolvem Álgebra Linear, tem quadrados mágicos como exemplos de matrizes que têm comportamento numérico singular. É só escrever *magic(8)* que o MATLAB retorna uma matriz  $8 \times 8$ , formada por números de 1 a 64, cujas linhas, colunas e diagonais obedecem a regra de ter a soma de seus elementos igual a ... (complete).
- Na edição de fevereiro de 1999 da revista American Mathematical Monthly (revista de divulgação de Matemática para estudantes universitários e professores de ensino fundamental e médio) aparece o artigo *Magic Squares Indeed!*, dos professores Arthur T. Benjamin e Kan Yasuda. Nesse artigo, eles mostram uma estranha propriedade de alguns quadrados mágicos simples. Por exemplo, dado

o quadrado mágico  $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ , note que

$$618^2 + 753^2 + 294^2 = 816^2 + 357^2 + 492^2 \text{ (linhas)}$$

$$672^2 + 159^2 + 834^2 = 276^2 + 951^2 + 438^2 \text{ (colunas)}$$

$$654^2 + 132^2 + 879^2 = 456^2 + 231^2 + 978^2 \text{ (diagonais superiores)}$$

$$654^2 + 798^2 + 213^2 = 456^2 + 897^2 + 312^2 \text{ (diagonais inferiores)}$$

$$852^2 + 174^2 + 639^2 = 258^2 + 471^2 + 936^2 \text{ (contra-diagonais superiores)}$$

$$852^2 + 396^2 + 417^2 = 258^2 + 693^2 + 714^2 \text{ (contra-diagonais inferiores)}.$$

- Um quadrado cristão-mágico  $4 \times 4$  aparece esculpido na Sagrada Família, famosa igreja católica inacabada em Barcelona, cuja construção foi iniciada pelo arquiteto catalão Antoni Gaudi em 1882, interrompida com a sua morte em 1926 e retomada mais tarde <sup>3</sup>. Note que neste quadrado aparecem números repetidos, mas a soma dos números das colunas, linhas e diagonais é sempre 33, a idade de Cristo ao morrer.

Uma abordagem algébrica para achar um quadrado mágico  $3 \times 3$ , que infelizmente

não se generaliza, é a seguinte: calcular  $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  tal que

$$a + b + c = 15 \quad (1)$$

$$d + e + f = 15 \quad (2)$$

$$g + h + i = 15 \quad (3)$$

$$a + d + g = 15 \quad (4)$$

$$b + e + h = 15 \quad (5)$$

$$c + f + i = 15 \quad (5.5)$$

$$a + e + i = 15 \quad (6)$$

$$c + e + g = 15 \quad (7)$$

Observemos que  $(1)+(2)+(3)+(4)+(5)$  resulta na equação (5.5). Ou seja, esta equação não é independente das outras, podendo ser eliminada do sistema (uma solução das cinco primeiras equações satisfará obrigatoriamente a equação (5.5)).

Substituindo-se a equação (7) por  $(7)+(6)-(1)-(3)$ , temos uma nova equação (7):  $2e = h + b$ . Fazendo agora  $(7)-(5)$ , temos  $3e = 15$ , ou seja,  $e = 5$ . Substituindo-se o valor de  $e$  em (2), (5) e (6):

$$f = 10 - d \quad (2)$$

$$h = 10 - b \quad (5)$$

$$i = 10 - a \quad (6)$$

Substituindo (5) e (6) em (3), temos:  $g = -5 + a + b$ . E, assim, (4) transforma-se em  $d = 20 - 2a - b$  e, então, (2) fica  $f = -10 + 2a + b$ . Ou seja, podemos escrever

<sup>3</sup>ver [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:20070523magic\\_square\\_sagradafamilia.jpg](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:20070523magic_square_sagradafamilia.jpg)

a matriz acima toda em função de  $a$  e de  $b$ :

$$\begin{bmatrix} a & b & 15 - a - b \\ 20 - 2a - b & 5 & -10 + 2a + b \\ -5 + a + b & 10 - b & 10 - a \end{bmatrix}.$$

Vamos construir agora um quadrado mágico de ordem igual a  $n = 2(2m + 1)$ :

1. Divida o quadrado em 4 quadrados de ordem  $2m + 1$ :
 

A	B
C	D
2. construa os 4 quadrados mágicos de ordem  $2m + 1$ , usando o procedimento visto acima para os quadrados de ordem ímpar, começando o A com 1, o B com  $(2m + 1)^2 + 1$ , o C com  $2(2m + 1)^2 + 1$  e o D com  $3(2m + 1)^2 + 1$ ;
3. considere os  $m$  números da linha do meio de A a partir da segunda coluna e troque-os com os números das respectivas posições de C;
4. considere os  $m$  primeiros números das outras linhas de A e troque-os com os números das respectivas posições de C;
5. troque os elementos das  $m-1$  últimas colunas de B com os respectivos números em D.

Vamos ver a seguir um exemplo de quadrado mágico  $10 \times 10$ . Começamos construindo os quadrados mágicos em cada quadrado  $5 \times 5$ :

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

Tabela 1: Quadrados mágicos em cada quarto

A seguir, iremos fazer os ajustes, trocando os números da matriz segundo o procedimento acima. É interessante refletir sobre o funcionamento do procedimento: ao dividir o quadrado em quartos e preenchê-los como acima, a soma dos elementos de cada coluna é a soma esperada; os ajustes seguintes são para garantir a soma dos elementos das linhas e das duas diagonais (convença-se disso).

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

Figura 2: Quadrado mágico final

Para construir quadrados de ordem múltipla de 4, existe um procedimento muito simples:

1. divida o quadrado em blocos  $4 \times 4$ ;
2. enumere o quadrado de 1 a  $n^2$ , da esquerda para a direita, de cima para baixo, deixando em branco as entradas das duas diagonais de cada bloco  $4 \times 4$ ;
3. preencha os brancos com seus complementares (dois números de um quadrado mágico simples  $n \times n$  são complementares se sua soma for  $n^2 + 1$ ).

A seguir, vamos ver o procedimento em um quadrado  $4 \times 4$ .

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Figura 3: Quadrado mágico  $4 \times 4$

Abaixo, há um quadrado  $8 \times 8$  para você completar.

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

Figura 4: Quadrado mágico  $8 \times 8$  para completar

O quadrado  $4 \times 4$  do Dürer é diferente do que apresentamos aqui. Na verdade, existem 880 quadrados mágicos simples  $4 \times 4$  que, por reflexões e rotações, podem ser apresentados em 7040 formas. Há 275 305 224 quadrados mágicos simples  $5 \times 5$  normais, isto é, desconsiderando rotações ou reflexões. Ainda não se sabe quantos quadrados mágicos  $6 \times 6$  existem. O quadro seguinte mostra as quantidades projetadas para o número de quadrados mágicos normais<sup>4</sup> de ordens entre 6 e 10.

Ordem	Número de quadrados mágicos	erro relativo máximo
6	$(1.775399 \pm 0.000042) \times 10^{19}$	0.0024 %
7	$(3.79809 \pm 0.00050) \times 10^{34}$	0.014 %
8	$(5.2225 \pm 0.0018) \times 10^{54}$	0.035 %
9	$(7.8448 \pm 0.0038) \times 10^{79}$	0.049 %
10	$(2.4149 \pm 0.0012) \times 10^{110}$	0.049 %

Tabela 1: Previsão do número de quadrados mágicos normais

<sup>4</sup>fonte: <http://www.trump.de/magic-squares/normal.htm>

# A Solução de Gergonne para o Problema de Apolônio

José Luiz Rosas Pinho

Departamento de Matemática - UFSC  
Florianópolis - SC

Tiara Martini<sup>5</sup>

Florianópolis - SC

*Dedicamos este artigo à memória do Professor Waldir Quandt.*

## 1. Introdução

O problema de Apolônio é um dos mais belos problemas da geometria euclidiana. Seu enunciado é o seguinte:

*Dadas três circunferências, encontrar uma outra circunferência tangente a essas três circunferências dadas.*

Por encontrar uma circunferência entenda-se determinar a posição de seu centro e calcular seu raio, ou simplesmente traçar tal circunferência. A primeira dessas interpretações consiste na solução analítica do problema, que eventualmente leva à solução na segunda interpretação. Porém, é possível resolver o problema com uma solução puramente geométrica.

Apolônio de Perga foi, juntamente com Euclides e Arquimedes, um dos maiores matemáticos da antiguidade. Nasceu em Perga, ao sul da Ásia Menor, e acredita-se que tenha vivido entre 260 e 170 AC. Seu trabalho mais importante foi *As Cônicas* (κωνικά). Em seu tratado *Tangências* (*De Tactionibus*) propôs e resolveu seu famoso problema. Essa obra foi perdida e dela temos notícia por Pappus. François Viète (1540 - 1603), o grande matemático francês, tentou recuperar as idéias contidas

---

<sup>5</sup>Graduanda do curso de Matemática Licenciatura da UFSC e bolsista do PET Matemática



em Tangências e resolveu o problema geometricamente de maneira sucessiva em dez casos especiais. Nessa solução, circunferência pode ser um ponto (circunferência de raio zero), uma circunferência de raio finito maior do que zero, ou uma circunferência de "raio infinito"(reta). Os casos mais simples são: dados três pontos, encontrar uma circunferência passando por esses três pontos (circunferência circunscrita ao triângulo formado por esses três pontos, caso eles sejam não colineares), e dadas três retas, achar uma circunferência tangente a essas três retas (circunferência inscrita no triângulo formado por essas três retas, caso elas sejam concorrentes duas a duas).

Outros matemáticos trabalharam no problema: Gauss, Newton, Gergonne e Petersen. Apresentaremos aqui a resolução de Gergonne, no caso de três circunferências exteriores e com centros não colineares (a resolução é válida em qualquer caso que tenha solução).

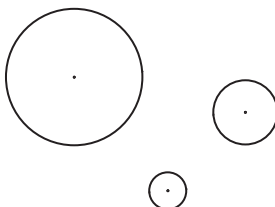


Figura 1: Problema de Apolônio

## 2. Resultados Preliminares

Antes de resolver o problema precisamos conhecer alguns resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [1] e [2].

**Inversão:** Dada uma circunferência com centro  $O$  e raio  $R$ , a inversão é definida como:

para cada ponto  $A$ , distinto de  $O$ , sua imagem  $Inv(A)$  é o ponto  $A'$  que satisfaz a relação,  $OA \cdot OA' = R^2$ .

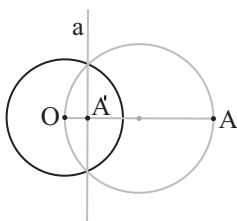


Figura 2: Inversão

A reta  $a$ , perpendicular ao segmento  $\overline{OA}$  e passando por  $A'$ , inverso de  $A$ , é denominada *polar do ponto A*, o ponto  $A$  é denominado *polo da reta a*.

**Resultado 1:** Se  $Q$  está na polar de  $P$  então  $P$  está na polar de  $Q$ . Em outras palavras: Se  $p$  passa pelo polo de  $q$  então  $q$  passa pelo polo de  $p$ .

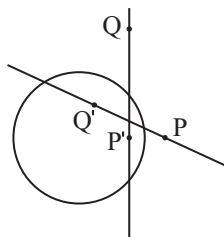


Figura 3: Relação entre polo e polar

**Centros de Semelhança:** Quaisquer secantes a duas circunferências que passam pelas extremidades de dois diâmetros paralelos interceptam a reta dos centros em no máximo dois pontos. Tais pontos são chamados de centros de semelhança dessas circunferências.

O centro de semelhança que está entre os centros das duas circunferências é chamado de centro de semelhança interno; o outro é chamado de centro de semelhança externo.

Os centros de semelhança são os centros de homotetia. [1]

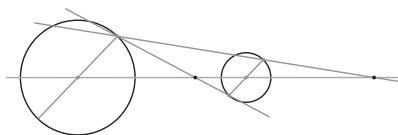


Figura 4: Centros de semelhança

### Propriedades dos centros de semelhança:

- As tangentes comuns às duas circunferências, caso existam, passam pelos centros de semelhança.
- Duas circunferências com mesmo raio possuem apenas o centro de semelhança interno.

**Potência de Ponto:** Por um ponto  $P$  exterior a uma circunferência conduzimos dois segmentos secantes quaisquer ( $\overline{PA}$  e  $\overline{PC}$ ). A potência do ponto  $P$  em relação à circunferência é o produto:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (PT)^2.$$

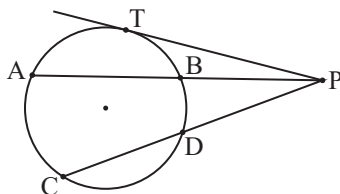


Figura 5: Potência de ponto

**Eixo radical:** Dadas duas circunferências não concêntricas, o eixo radical dessas circunferências é o conjunto dos pontos  $P$  que possuem mesma potência em relação às duas circunferências.

- O eixo radical de duas circunferências é uma reta perpendicular à reta dos centros.

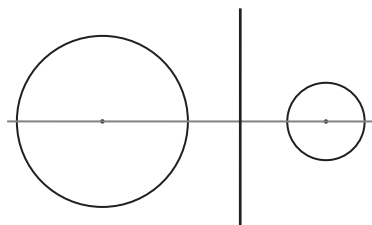


Figura 6: Eixo radical

**Centro radical:** Considere três circunferências não concêntricas. Os eixos radicais dessas circunferências, tomadas duas a duas, ou são paralelos ou são concorrentes. Quando são concorrentes, a interseção é o único ponto do plano que possui mesma potência em relação às três circunferências. Tal ponto é chamado de centro radical.

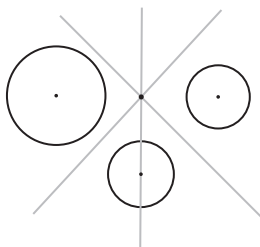


Figura 7: Centro radical

**Resultado 2 (Teorema de D'Alembert):** Se três circunferências  $a$ ,  $b$  e  $c$  são tomadas em pares,  $(a, b)$ ,  $(a, c)$  e  $(b, c)$ , os centros de semelhança externos dos três pares de circunferências estão sobre uma mesma reta. Além disso, o centro de semelhança externo de um par de circunferências e dois centros de semelhança internos dos outros dois pares de circunferências estão sobre uma mesma reta. Tais retas são chamadas de *eixos de simetria*.

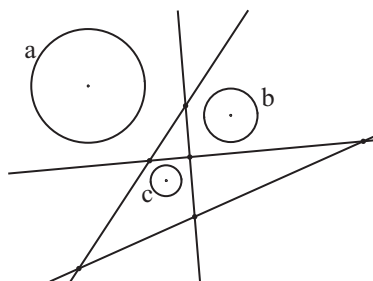
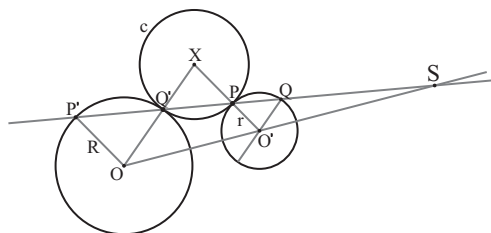


Figura 8: Teorema de D'Alembert

**Resultado 3 (Teorema das tangências):** A potência do centro de semelhança exterior  $S$  de duas circunferências em relação a qualquer circunferência  $c$ , tangente exteriormente a essas duas circunferências, é constante e igual a raiz quadrada dos produtos das potências desse mesmo centro em relação a cada uma delas.



$$SP \cdot SQ' = (SQ \cdot SP \cdot SQ' \cdot SP')^{\frac{1}{2}}$$

Figura 9: Teorema das tangências

Um resultado análogo ocorre se a circunferência for tangente interiormente a uma delas e exteriormente a outra. Nesse último caso, deve-se trocar o centro de semelhança exterior pelo centro de semelhança interior.

Agora que vimos estes resultados, podemos entender como Gergonne resolveu o Problema de Apolônio!

### 3. A solução de Gergonne

O procedimento abaixo resume o desenvolvimento da solução proposta por Gergonne. Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  três circunferências.

1. Separe as circunferências em três pares:  $(a, b)$ ,  $(a, c)$  e  $(b, c)$ .

2. Construa os centros de semelhança (homotetia) dos pares de circunferências.

Como cada par de circunferências possui dois centros de semelhança, obteremos seis centros (três centros de semelhança internos e três externos).

3. Ligue estes pontos de acordo com o Teorema de D'Alembert:

- dois centros de semelhança internos com um externo
- os três centros de semelhança externos

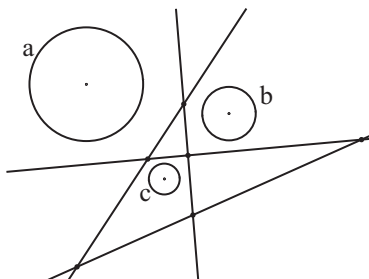


Figura 10: Retas obtidas quando ligamos os centros de semelhança

4. Escolha uma dessas retas, por exemplo a reta que passa pelos centros de semelhança externos, para continuar a solução.
5. Encontre os polos dessa reta, referentes a cada uma das circunferências.
6. Determine o centro radical das três circunferências, ponto de interseção dos três eixos radicais.
7. Una o centro radical aos polos encontrados.

Dessa maneira, em cada circunferência obtemos dois pontos. Estes são os pontos de tangência das circunferências buscadas!!

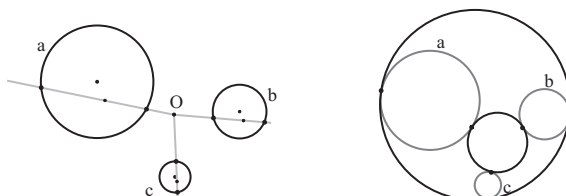


Figura 11: Pontos de tangência e circunferências traçadas por esses pontos

Você deve estar se perguntando porque isso funciona.

Para compreender este procedimento suponhamos o problema já resolvido, sendo  $x$  e  $y$  duas circunferências tangentes àquelas três circunferências dadas. Vamos chamar de  $P$ ,  $Q$  e  $R$  os três pontos de tangência com a circunferência  $x$ ; de  $p$ ,  $q$  e  $r$ , os três pontos de tangência com a circunferência  $y$ . Os pontos  $I$ ,  $II$  e  $III$  são os centros de semelhança externos dos pares de circunferências e os pontos 1, 2 e 3 são os polos da reta  $t$  referentes a cada uma das circunferências  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente. O ponto  $O$  é o centro radical de  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Conforme a figura abaixo:

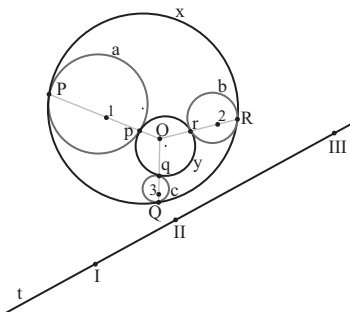


Figura 12: Nomenclatura dos pontos importantes na solução de Gergonne

Olhando para as circunferências  $x$  e  $y$ , percebemos que  $a$  é uma circunferência tangente a  $x$  e  $y$ . Assim, o centro de semelhança de  $x$  e  $y$  tem potência, em relação à circunferência  $a$ , igual à raiz quadrada dos produtos das potências desse centro em relação a  $x$  e  $y$  (teorema da tangência).

O mesmo ocorrerá quando considerarmos as circunferências  $b$  e  $c$  como tangentes a  $x$  e  $y$ .

Logo, o centro de semelhança de  $x$  e  $y$  é um ponto que tem a mesma potência em relação às três circunferências  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e portanto só pode ser o centro radical  $O$  dessas três circunferências.

Além disso, pelo teorema das tangências, o centro de semelhança (ponto  $O$ ) deve estar nas retas que passam pelos pontos de tangência (das circunferências  $x$  e  $y$ ) com cada uma das circunferências  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

**Conclusão:** os pontos  $P$ ,  $p$  e  $O$ ;  $Q$ ,  $q$  e  $O$ ;  $R$ ,  $r$  e  $O$  são colineares.

Ainda pelo teorema da tangência, as potências dos pontos  $I$ ,  $II$  e  $III$  são as mesmas em relação às circunferências  $x$  e  $y$  (cada ponto com uma potência diferente).

Logo, a reta que passa por esses três pontos é o eixo radical de  $x$  e  $y$ .

Seja  $S$  o ponto de intersecção das retas tangentes à circunferência  $a$  nos pontos  $P$  e  $p$ . Então as distâncias  $SP$  e  $Sp$  são iguais. Como essas retas tangentes são também tangentes às circunferências  $x$  e  $y$  naqueles pontos  $P$  e  $p$ , segue que  $S$  está no eixo radical de  $x$  e  $y$ , ou seja, na reta  $t$ .

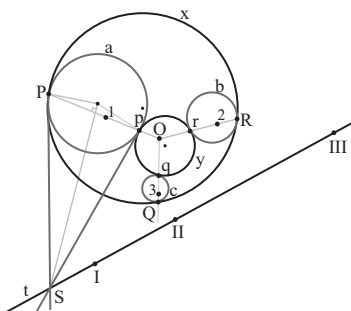


Figura 13: O polo  $S$

Mas, por construção,  $S$  é o polo da reta que passa por  $P$  e  $p$  com relação à circunferência  $a$ . Como a reta  $t$  passa por esse polo  $S$ , então, pelo resultado 1, a reta  $\overleftrightarrow{Pp}$  passa pelo polo da reta  $t$  em relação à circunferência  $a$  (que é o ponto 1).

Logo, os pontos  $P$ ,  $p$  e 1 são colineares. Como já tínhamos  $O$ ,  $P$  e  $p$  colineares, segue que os pontos  $O$ ,  $P$ ,  $p$  e 1 são colineares. Da mesma maneira, temos que os pontos  $O$ ,  $Q$ ,  $q$  e 2, e os pontos  $O$ ,  $R$ ,  $r$  e 3 são colineares!

Portanto, quando encontramos  $O$ , 1, 2 e 3, temos  $P$ ,  $p$ ,  $Q$ ,  $q$ ,  $R$  e  $r$ . □

#### 4. Número de soluções

O Problema de Apolônio admite uma infinidade de soluções ou, no caso finito, até oito soluções.

Vamos ver alguns casos particulares:

- Nenhuma solução: quando uma das circunferência está no interior de alguma outra e não há tangência entre as três circunferências.



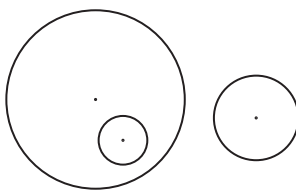


Figura 14: Caso em que não há solução

- Duas soluções: veja alguns exemplos:

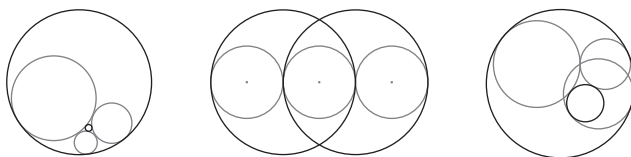


Figura 15: Alguns casos em que há apenas duas soluções

- Quatro soluções: veja os exemplos:

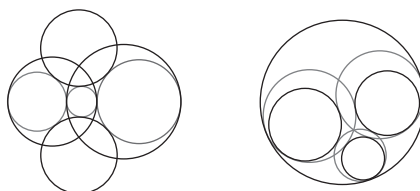


Figura 16: Alguns casos em que há apenas quatro soluções

- Oito soluções: quando as três circunferências são exteriores uma das outras. O caso que resolvemos neste artigo é um exemplo. Veja:

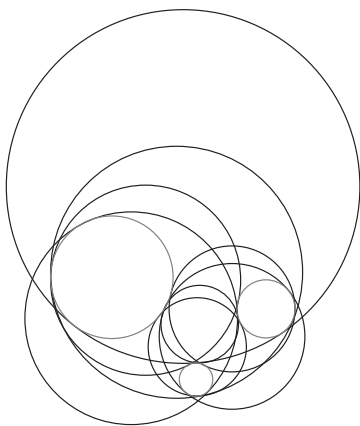


Figura 17: Caso em que há oito soluções

- Infinitas soluções: quando as três circunferências são tangentes no mesmo ponto.

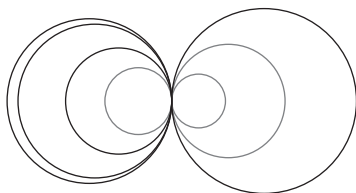


Figura 18: Caso em que há uma infinidade de soluções

## 5. Referências Bibliográficas:

- [1] LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*, Coleção do professor de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 1991.
- [2] SPIRA, Michel. *Como transformar retas em círculos e vice versa*, II Biental da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- [3] DÖRRIE, Heinrich. *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications, Inc, 1965.
- [4] GISCH, David e RIBANDO, Jason M. *Apollonius' Problem: A Study of Solutions and Their Connections*, American Journal of Undergraduate Research, 2004.



# Curiosidades

---



### Números de três algarismos

Escolha um número de três algarismos. Repita este número na frente do mesmo (ex: se você escolheu o número 100, nesta etapa ficará 100100). Agora divida respectivamente por 13, 11 e 7. Surpresa! O resultado será o número que você escolheu.

### Obtendo quadrados perfeitos

Você sabia que adicionando 1 ao produto de quatro números consecutivos você obtém um quadrado perfeito?

### Fórmula de Bhaskara

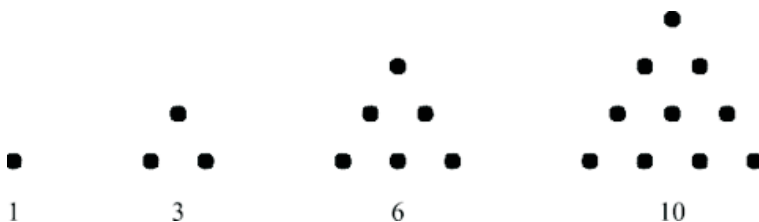
A fórmula de Bhaskara, utilizada para determinar as raízes de uma equação quadrática e dada por  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  é equivalente à fórmula  $\frac{2c}{-b \pm \sqrt{\Delta}}$ . Esta equivalência foi notada por uma professora do Pará ao perceber que uma aluna, apesar de utilizar a fórmula "errada" sempre obtinha as raízes das equações do segundo grau. Tal aluna utilizava a fórmula  $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2c}$  e invertia a fração obtida.

### Forma de calcular potências

A soma dos  $n$  primeiros números naturais ímpares é igual a  $n^2$ .

### Números triangulares

Número triangular é um número natural que pode ser representado na forma de um triângulo equilátero. Em geral, o  $n$ -ésimo número triangular é dado por  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Veja alguns exemplos de números triangulares:







# **Soluções dos Problemas Propostos**

---





1. (Proposto pelo professor Marcelo Ferreira Lima Carvalho, UFSC, na Revista da ORM n.º 6) Considere as frações  $\frac{1000000001}{1000000002}$  e  $\frac{2000000001}{2000000002}$ . Qual delas é maior?

**SOLUÇÃO 1:** (apresentada por Fábio Pra da Silva de Souza, licenciado em física pela UFSC)

Para começar vamos reescrever as frações nas seguintes formas:

$$\frac{10^9 + 1}{10^9 + 2} \text{ e } \frac{2 \times 10^9 + 1}{2 \times 10^9 + 2}$$

Agora fazemos  $a = 10^9$  e adicionamos o símbolo ? para denotar a relação que estamos procurando, < ou >. Substituindo:

$$\frac{a + 1}{a + 2} ? \frac{2a + 1}{2a + 2}$$

$$\frac{a + 1}{a + 2} ? \frac{2a + 1}{2(a + 1)}$$

Multiplicando os dois lados por  $2(a + 1)(a + 2)$

$$2(a + 1)(a + 2) \times \frac{a + 1}{a + 2} ? 2(a + 1)(a + 2) \times \frac{2a + 1}{2(a + 1)}$$

Simplificando,

$$2(a + 1)^2 ? (2a + 1)(a + 2)$$

Fazendo o produto,

$$2a^2 + 4a + 2 ? 2a^2 + 5a + 2$$

$$4a ? 5a$$

Como  $a = 10^9$  chegamos à relação  $4a < 5a$ .

Agora é só realizar as operações inversas que voltaremos à

$$\frac{1000000001}{1000000002} < \frac{2000000001}{2000000002}.$$

**SOLUÇÃO 2:** (apresentada pelo Professor Licio Hernanes Bezerra, UFSC)

Sejam  $a, b > 0$ . Então,

$$\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1} \Leftrightarrow ab + a < ab + b \Leftrightarrow a < b.$$

Logo,

$$\frac{1000000001}{1000000002} < \frac{2000000001}{2000000002}.$$

2. (Proposto pelo professor Marcelo Ferreira Lima Carvalho, UFSC, na Revista da ORM n°6) Joana e Pedro foram a uma papelaria. Ela comprou dois lápis e três canetas e ele, três lápis e duas canetas. Suas compras custaram, respectivamente, 78 e 72 reais. Quanto custa um lápis nessa papelaria? OBS: Resolva o problema sem utilizar sistema de equações lineares.

**SOLUÇÃO:** (apresentada por Rafaela Goulart de Andrade e Tiara Martini, graduandas da UFSC)

Juntos, Joana e Pedro compraram cinco lápis e cinco canetas, com um valor total de  $78 + 72 = 150$  reais. Logo, um lápis mais uma caneta custam  $\frac{150}{5} = 30$  reais.

Pedro comprou dois lápis mais duas canetas mais *um lápis*, no valor de  $2 \cdot 30$  reais + *valor de um lápis*, totalizando 72 reais. Portanto, um lápis custa  $72 - 60 = 12$  reais.

3. (Retirado do livro “A Caixa de Pandora da Matemática” de Brian Bolt, proposto na Revista da ORM n°6) Os algarismos 1, 2, 3, ..., 8, 9 podem ser dispostos de muitas maneiras de modo a formar um número de quatro algarismos e outro de cinco algarismos. Contudo, apenas uma dessas maneiras maximiza o seu produto. Consegue descobri-la?

**SOLUÇÃO 1:** (apresentada no livro “A Caixa de Pandora da Matemática” de Brian Bolt)

O maior produto é constituído por  $9642 \times 87531$ . Uma estratégia elegante para resolver este problema e outros semelhantes consiste em começar pela frente com os algarismos mais altos, alternando entre os dois números e, ao

mesmo tempo, mantendo os números finais de um tamanho tão próximo possível. Compare esta situação com a que teria se tivesse um retângulo cujo comprimento dos lados fosse igual aos seus números e cuja área lhe interessasse maximizar. Quanto mais o conseguisse aproximar de um quadrado, para um mesmo perímetro, maior seria a sua área.

**SOLUÇÃO 2:** (apresentada por Thiane Pereira P. Coliboro e José Luiz Rosas Pinho, UFSC)

Pensemos nos números de quatro e cinco algarismo escritos como potências de dez, ou seja, como o seguinte produto:

$$(10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e) \times (10^3f + 10^2g + 10h + i),$$

em que  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  são algarismos de 1 a 9, todos distintos. Neste caso obtemos:

$$10^7af + 10^6(ag + bf) + 10^5(ah + bg + cf) + 10^4(ai + bh + cg + df) + 10^3(bi + ch + dg + ef) + 10^2(dh + ci + eg) + 10(di + eh) + ei.$$

Assim, interessa-nos agora maximizar cada uma das expressões dependentes de  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ , sempre da esquerda para a direita, obtendo assim o maior número possível.

Seguindo este raciocínio temos que  $af$  deve ser o produto dos dois maiores algarismos, ou seja, 8 e 9. No entanto, não sabemos qual algarismo representa a letra  $a$ , por exemplo. Separemos, então em casos:

#### CASO 1: $a=9$ e $f=8$

Assim, vamos maximizar  $ag + bf$ , ou seja,  $9g + b8$ . Neste caso,  $g$  e  $b$  têm que ser os maiores possíveis e, como 8 e 9 já foram utilizados,  $g$  e  $b$  representam 6 e 7. Agora, vamos decidir em qual ordem.

Se  $g = 7$  e  $b = 6$  temos:

$$9g + b8 = 9 \times 7 + 6 \times 8 = 63 + 48 = 111.$$

Se  $g = 6$  e  $b = 7$  temos:

$$9g + b8 = 9 \times 6 + 7 \times 8 = 54 + 56 = 110.$$

Logo,  **$g=7$  e  $b=6$** .

Seguimos com a mesma idéia de maximização para todas as demais expressões.

Para obter o maior valor de  $ah + bg + cf = 9h + 6 \times 7 + c8$ ,  $h$  e  $c$  devem ser iguais a 4 e 5.

Se  $h = 5$  e  $c = 4$  temos:

$$9h + 6 \times 7 + c8 = 9 \times 5 + 42 + 4 \times 8 = 45 + 42 + 32 = 119.$$

Se  $h = 4$  e  $c = 5$  temos:

$$9h + 6 \times 7 + c8 = 9 \times 4 + 42 + 5 \times 8 = 36 + 42 + 40 = 118.$$

Logo,  **$h=5$  e  $c=4$** .

Para obter o maior valor de  $ai + bh + cg + df = 9i + 6 \times 5 + 4 \times 7 + d8$ ,  $i$  e  $d$  devem ser iguais a 2 e 3.

Se  $i = 2$  e  $d = 3$  temos:

$$9i + 6 \times 5 + 4 \times 7 + d8 = 9 \times 2 + 30 + 28 + 3 \times 8 = 18 + 58 + 24 = 100.$$

Se  $i = 3$  e  $d = 2$  temos:

$$9i + 6 \times 5 + 4 \times 7 + d8 = 9 \times 3 + 30 + 28 + 2 \times 8 = 27 + 58 + 16 = 101.$$

Logo,  **$i=3$  e  $d=2$** . E assim,  **$e=1$** .

Portanto, o número obtido é:

$$96.421 \times 8.753 = 843.973.013 \text{ (I)}.$$

**CASO 2:  $a=8$  e  $f=9$**

Seguindo os mesmo passos do caso 1, chegamos ao produto  $87.531 \times 9.642 = 843.973.902$  (II).

Como o número (I) é menor que o (II), e estes são os maiores produtos possíveis, então o produto máximo de um número de quatro algarismos e outro de cinco algarismos, formados com os algarismos 1, 2, 3, ..., 8, 9, sem repetição, é 843.973.902.

4. (Adaptado do livro “100 Jogos Lógicos” de Pierre Berloquin, proposto na Revista da ORM n°6) Um general tenta escolher um cozinheiro dentre 625 voluntários. Manda-os formar um quadrado com 25 linhas e 25 colunas. Manda sair o mais alto de cada linha e escolhe o mais baixo dentre eles. Depois, muda de idéia. Após regressarem aos seus respectivos lugares, manda sair o mais baixo de cada coluna e escolhe o mais alto dentre eles. Sendo diferentes os dois cozinheiros escolhidos, qual deles é o mais alto?

**SOLUÇÃO:** (apresentada no livro “100 Jogos Lógicos” de Pierre Berloquin)

Denotemos por  $A$  o primeiro cozinheiro e por  $B$  o segundo. Se  $A$  e  $B$  estão na mesma linha,  $A$  é o mais alto. Se  $A$  e  $B$  estão na mesma coluna,  $B$  é o mais baixo. Se estão em linhas e colunas diferentes, designemos por  $C$  o voluntário que se encontra no cruzamento da linha de  $A$  e da coluna de  $B$ .  $C$  é mais baixo que  $A$ , mas mais alto que  $B$ . Logo,  $A$  é sempre mais alto que  $B$ .

5. (Proposto pela graduanda Thiane Pereira P. Coliboro, UFSC, na Revista da ORM n°6) Um problema bastante conhecido no meio matemático é o “Problema dos Quatro Quatros”, que consiste em formar uma expressão que seja igual a um número inteiro dado utilizando apenas quatro algarismos 4 e sinais matemáticos. Além disso, a expressão não pode conter nenhum símbolo algébrico que envolva letra, tais como  $\log$ ,  $\lim$ , etc. Por exemplo, o número zero pode ser escrito como  $44 - 44$  e o número 5 como  $\frac{4 \times 4 + 4}{4}$ .

Este problema pode ser encontrado no livro “O Homem que Calculava” de Malba Tahan, pseudônimo do professor carioca Júlio César de Mello e Souza.

Agora, pensemos em uma interessante variação: escrever um número natural dado utilizando apenas os algarismos de um determinado ano e as operações  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  e raiz quadrada, além de parênteses. Será que você consegue escrever os números de 0 a 30 utilizando os algarismos do ano 1998, ano de criação da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina? Uma dica pra começar: existem números que podem ser escritos de várias formas, por exemplo,  $36 = 19 + 9 + 8$  e  $36 = (1 + 8 + \sqrt{9}) \times \sqrt{9}$ .

**SOLUÇÃO:** (apresentada pela proponente)

Lembre-se que só podemos usar  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ , raiz quadrada e parênteses. Então vamos ao trabalho:

$$0 = \frac{9 - (8 + 1)}{9}$$

$$1 = (8 + \sqrt{9}) - (9 + 1)$$

$$2 = 91 - 89$$

$$3 = \sqrt{9} + \sqrt{9} - \sqrt{8 + 1}$$

$$4 = \sqrt{8 + 1} + \frac{9}{9}$$

$$5 = \sqrt{9 + 9 + 8 - 1}$$

$$6 = 8 - 1 - \frac{9}{9}$$

$$7 = 98 - 91$$

$$8 = \frac{9}{9} + 8 - 1$$

$$9 = \left(\frac{9}{9} + 8\right) \times 1$$

$$10 = \frac{81 + 9}{9}$$

$$11 = (9 + 1) + (9 - 8)$$

$$12 = 18 - 9 + \sqrt{9}$$

$$13 = (9 + 8) - (1 + \sqrt{9})$$

$$14 = (9 + 8 - \sqrt{9}) \times 1$$

$$15 = 9 + 8 + 1 - \sqrt{9}$$

$$16 = \sqrt{9} \times \sqrt{9} + 8 - 1$$

$$17 = 18 - \frac{9}{9}$$

$$18 = 19 - (9 - 8)$$

$$19 = 19 \times (9 - 8)$$

$$20 = 19 + 9 - 8$$

$$21 = 9 + 8 + 1 + \sqrt{9}$$

$$22 = 8 \times \sqrt{9} - \sqrt{9} + 1$$

$$23 = 8 \times (\sqrt{9} + 1) - 9$$

$$24 = 9 \times \sqrt{8 + 1} - \sqrt{9}$$

$$25 = 9 + 9 + 8 - 1$$

$$26 = (9 + 9 + 8) \times 1$$

$$27 = 9 + 9 + \sqrt{81}$$

$$28 = 19 + 8 + 1$$

$$29 = 8 \times (\sqrt{9} + 1) - \sqrt{9}$$

$$30 = 9 \times \sqrt{8 + 1} + \sqrt{9}$$



# **Problemas Propostos**

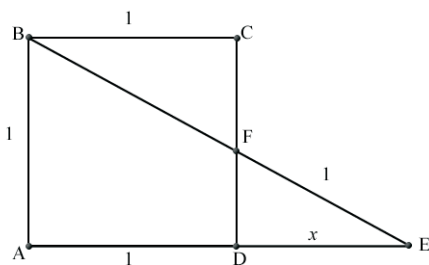
---





Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão um exemplar da mesma (Veja “Informações Gerais”).

1. Represente de três formas diferentes o número 100 utilizando **apenas uma vez cada um dos algarismos** de 1 a 9, na sua ordem natural (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.
2. (*Proposto por Gustavo Felisberto Valente, graduando UFSC*) Um casal de namorados combina de se encontrar no parque ao meio-dia. O rapaz chega na hora marcada mas ela não aparece. Ele pensa: “Vou esperar até meio-dia e meia. Se ela não aparecer, eu aguardo mais metade do tempo que esperei anteriormente. Farei isso sucessivamente”. Supondo que sua namorada nunca compareça, que horas o rapaz irá embora?
3. Seja  $ABCD$  um quadrado de aresta igual a 1. O lado  $AD$  do quadrado é prolongado formando o segmento  $AE$  de modo que  $B$ ,  $F$  e  $E$  sejam colineares. Se  $FE$  mede 1, quanto vale  $x$ ?



Veja também o artigo “Dois Problemas do Professor Waldir”, na página 45.





# **Premiados da ORM em Outras Olimpíadas**

---



---

## Premiados da ORM em outras olimpíadas

### **Bruno Leonardo Schneider - São José**

Medalha de bronze na I Olimpíada Regional de Matemática em 1998 (Nível 1)  
Medalha de prata na II Olimpíada Regional de Matemática em 1999 (Nível 1)  
Medalha de bronze na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)  
Menção honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática em 2000 (Nível 2)  
Menção honrosa na IV Olimpíada Regional de Matemática em 2001 (Nível 2)  
Menção honrosa na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 3)  
Medalha de prata na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 3)  
Medalha de prata na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 3)

### **Eduardo José Mendes - Biguaçu**

Menção honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)  
Medalha de bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)  
Medalha de bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)  
Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 2)  
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

### **Felipe Paupitz Schilichting - Florianópolis**

Medalha de ouro na II Olimpíada Regional de Matemática em 1999 (Nível 1)  
Menção honrosa na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)  
Medalha de ouro na III Olimpíada Regional de Matemática em 2000 (Nível 2)  
Medalha de ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática em 2001 (Nível 2)  
Medalha de bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2001 (Nível 2)  
Medalha de ouro na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 3)  
Medalha de ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 3)  
Medalha de ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 3)

### **Fernanda Momm Antunes - Joinville**

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 1)  
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2008 (Nível 1)

**Giuliano Boava - Criciúma**

Medalha de ouro na II Olimpíada Regional de Matemática em 1999 (Nível 3)

Menção honrosa na III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2000

Medalha de bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2001

Menção honrosa na IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2001

Medalha de prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2002

Menção honrosa na V Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2002

Medalha de bronze na XXV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2003

Menção honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2004

**Guilherme Rohden Echelmeier - Itajaí**

Medalha de prata na III Olimpíada Regional de Matemática em 2000 (Nível 1)

Medalha de ouro na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)

Medalha de ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática em 2001 (Nível 2)

Medalha de ouro na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 2)

Medalha de prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 2)

Medalha de ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 3)

Medalha de ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 3)

Medalha de ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática em 2005 (Nível 3)

**Gustavo Lisboa Empinotti - Florianópolis**

Medalha de prata na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)

Medalha de ouro na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de prata na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de ouro na X Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 2)

Medalha de bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 2)

Menção honrosa na 13ª Olimpíada de Maio em 2007 (Nível 2)

Medalha de ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 3)

Medalha de bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)

---

Medalha de bronze na XIX Olimpíada de Matemática do Cone Sul em 2008 - Temuco, Chile

**Hanna Kurihara e Silva - Florianópolis**

Medalha de bronze na II Olimpíada Regional de Matemática em 1999 (Nível 1)  
Menção honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática em 2000 (Nível 1)  
Menção honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)  
Medalha de bronze na IV Olimpíada Regional de Matemática em 2001 (Nível 2)  
Medalha de ouro na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 2)  
Menção honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 3)

**Helena Carolina Rengel Koch - Jaraguá do Sul**

Menção honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)  
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)  
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 2)  
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

**João Marcos Carnieletto Nicolodi - Florianópolis**

Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 1)  
Medalha de Bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 1)  
Medalha de ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 1)  
Medalha de bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 1)

**Leandro Augusto Lichtenfelz - Blumenau**

Medalha de ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 3)  
Medalha de bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2008  
Medalha de prata (Second Prize) na XVI Internacional Mathematical Competition for University Students em 2009 - Budapest, Hungria

**Leandro Jun Kimura - Joinville**

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática em 2008 (Nível 1)  
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

**Leonardo Gonçalves Fischer - Fraiburgo**

Medalha de bronze na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)

Medalha de prata na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)

Menção honrosa na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 1)

Medalha de bronze na X Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 2)

**Lucas Bruno Barbosa Sandoval - Florianópolis**

Medalha de ouro na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 2)

Medalha de bronze na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 3)

**Lucas Lolli Savi - Florianópolis**

Medalha de ouro na III Olimpíada Regional de Matemática em 2000 (Nível 2)

Menção honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 2)

Medalha de bronze na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 3)

**Natan Cardozo Leal - São Bento do Sul**

Medalha de ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 1)

Medalha de ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática em 2005 (Nível 2)

Menção honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção honrosa na X Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 3)

Medalha de prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 3)

Medalha de Prata na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (Nível 3)

Medalha de prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)

**Renan Henrique Finder - Joinville**

Medalha de ouro na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 1)

Medalha de prata na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 1)

Medalha de prata na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)

Medalha de ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática em 2005 (Nível 2)

Menção honrosa na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 2)

Medalha de ouro na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)



---

Medalha de ouro na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de bronze na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 2)

Medalha de ouro na XVIII Olimpíada de Matemática do Cone sul em 2007 - Uruguai

Medalha de prata na 23ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2008 - Brasil

Medalha de prata na 49ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2008 - Madri, Espanha

Medalha de prata na 50ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2009 - Bremen, Alemanha

Medalha de prata na 24ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2009 - Santiago de Querétaro, México

### **Tiago Madeira - Itajaí**

Medalha de ouro na V Olimpíada Regional de Matemática em 2002 (Nível 1)

Menção honrosa na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 1)

Medalha de bronze na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 2)

Medalha de bronze na 9ª Olimpíada de Maio em 2003 (Nível 1)

Medalha de ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 2)

Menção honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática em 2005 (Nível 3)

Medalha de bronze na 11ª Olimpíada de Maio em 2005 (Nível 2)

### **Vitor Costa Fabris - Criciúma**

Menção honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática em 2003 (Nível 1)

Medalha de ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática em 2004 (Nível 1)

Menção honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)

Menção honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática em 2005 (Nível 2)

Medalha de prata na IX Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)





# **Informações Gerais**

---



## Envio de Problemas e Soluções

A seção de problemas propostos e soluções é uma seção dinâmica. Contribua propondo problemas ou enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

## Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o  $\text{\LaTeX}$ , então o artigo poderá ser submetido neste formato.

## Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) devem cadastrar suas escolas. O cadastramento para a OBM e ORM é feito somente no site da OBM ([www.obm.org.br](http://www.obm.org.br)). Escolas já cadastradas em anos anteriores deverão confirmar a cada novo ano a sua inscrição. Para o cadastramento será necessário o código do Inep da escola. Existe um período para cadastramento ou confirmação. Consulte o site da OBM. No site não aparece a opção para cadastramento na ORM. As escolas cadastradas para a OBM estarão automaticamente cadastradas para a ORM. No cadastramento deve ser indicado o nome do coordenador regional (José Luiz Rosas Pinho ou Licio Hernanes Bezerra).

Alunos interessados em participar das olimpíadas devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

## Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberam a revista podem nos solicitar o envio da mesma.

Além disso, a revista é enviada às universidades federais brasileiras (um exemplar por IES), por intermédio da Biblioteca Universitária da UFSC.

## Erramos

Na Revista nº6, deve ser observada a seguinte alteração:

- Página 29: Também foi medalhista de brnze no nível 1 o aluno Victor Hamann Pereira, da escola Barão do Rio Branco, de Blumenau.

## Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

- Nosso site: [www.orm.mtm.ufsc.br](http://www.orm.mtm.ufsc.br)
- Telefone/Fax: (48) 37216809 (PET - Matemática)
- e-mail: [orm@pet.mtm.ufsc.br](mailto:orm@pet.mtm.ufsc.br)
- Endereço: PET - Matemática

Departamento de Matemática - CFM  
UFSC  
Campus Universitário - Trindade  
88040-900 – Florianópolis/SC