

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Reitor: Alvaro Toubes Prata

Vice-Reitor: Carlos Alberto Justo da Silva

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E EXTENSÃO - PRPE

Pró-Reitora: Débora Peres Menezes

DEPARTAMENTO DE PROJETOS DE EXTENSÃO - DPE

Diretora: Mônica Aparecida Aguiar dos Santos

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO - PREG

Pró-Reitora: Yara Maria Rauh Müller

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM

Diretor: Tarciso Antônio Grandi

Vice-Diretor: Valdir Rosa Correia

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Chefe: Rosimary Pereira

Sub-Chefe: Nereu Estanislau Burin

Apoio:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

**CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DE SANTA CATARINA**

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina/
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],
2004 -

v.: 6 (2009) 23 cm

Anual
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas,
exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas.

Comissão da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:

Coordenador: José Luiz Rosas Pinho.

Professores: Carmem Suzane Comitre Gimenez, Eliezer Batista, Licio Hernanes Bezerra, Nereu Estantislau Burin e Waldir Quandt.

Bolsistas da olimpíada: Bianca de Souza, Edson Luiz Valmorbida e Michely de Melo Pellizzaro.

Bolsistas do PET - Matemática: Anelize Zomkowski Salvi, Camila Fabre Sehnem, Deividi Ricardo Pansera, Ecila de Almeida Waltrick, Fernanda Cristina da Silva, Gustavo Felisberto Valente, Helena Martins, Leonardo Koller Sacht, Maíra Fernandes Gauer, Rafaela Goulart de Andrade, Sara Regina da Rosa Pinter, Soyara Carolina Biazotto, Thiane Pereira Poncetta Coliboro, Tiara Martini, Virginia Angélica Reck, Viviam Giacomelli Pedroso, Welton Ademar Costa.

Comitê Editorial da Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina:

Cláudia Dal Pont Rocha
Helena Martins
José Luiz Rosas Pinho
Licio Hernanes Bezerra
Soyara Carolina Biazotto
Tiara Martini

Editoração Eletrônica:

Cláudia Dal Pont Rocha
Alda Dayana Mattos
Helena Martins
Rodrigo Maciel Rosa
Soyara Carolina Biazotto
Tiara Martini

Tiragem:

1500 exemplares

Arte da Capa:

Renata Leandro Becker
Asteroide Santana

Postagem:

Segundo semestre de 2008.

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina Nº6, 2009

ISSN 1679-7612

Sumário

Apresentação	5
---------------------	----------

X ORM (2007)	7
---------------------	----------

Prova Nível 1	9
Prova Nível 2	10
Prova Nível 3	11
Gabarito Nível 1	13
Gabarito Nível 2	18
Gabarito Nível 3	23
Premiados	29
Nível 1	29
Nível 2	30
Nível 3	32
Escolas Participantes	34

Evento	39
---------------	-----------

III Encontro de Professores da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

Cláudia Dal Pont Rocha, Edson Valmórbida, José Luiz Rosas Pinho	41
---	----

Artigo	43
---------------	-----------

Por que compomos música com apenas 12 notas musicais?

Licio Hernanes Bezerra	45
Frações contínuas	52

Artigo	57
---------------	-----------

O Princípio da Indução e Aplicações

Paulo Ricardo Boff	59
--------------------	----

Artigo	69
Uma fórmula para a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$	
Helena Martins e Dr. João Luiz Martins	71
Artigo	83
Isometrias	
Viviam Giacomelli Pedroso	85
Translação	88
Reflexão em torno de uma reta	89
Rotação	91
Reflexão deslizante	92
Proposições gerais sobre isometrias	93
Classificação das isometrias no plano	95
Soluções dos problemas propostos	101
Problemas propostos	107
Outras olimpíadas	111
Informações gerais	115
Envio de Problemas e Soluções	117
Envio de Artigos	117
Cadastramento	117
Como adquirir a revista	117
Erramos	118
Fale Conosco	118

Apresentação

Este número desta revista foi inteiramente financiado através de um auxílio para Olimpíadas Regionais de Matemática pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), e lançado em dezembro de 2008 na cerimônia de premiação da XI ORM.

Os projetos *Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina* (ORM) e *Revista da ORM* são totalmente idealizados, organizados e executados pelos bolsistas do Programa de Educação Tutorial (PET/SESu/MEC) Matemática da UFSC, com o apoio da Pró-Reitoria de Ensino e Graduação, por bolsistas de extensão, com bolsas do Departamento de Projetos de Extensão (DPE) da Pró-Reitoria de Pesquisa e Extensão (PRPE), por alunos voluntários do Curso de Matemática, e com a participação de cinco professores do Departamento de Matemática da UFSC, tendo sido apresentado na 7ª Semana de Ensino, Pesquisa e Extensão (SEPEX) da UFSC, realizada em outubro de 2008. Cabe ressaltar que esses projetos recebem ainda um importante apoio da Pró-Reitoria para Assuntos Estudantis (PRAE) e do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas (CFM) desta Universidade.

Neste número discutimos as soluções das provas da *X Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina*, realizada em 2007. Quatro artigos são aqui apresentados: um do professor João Luiz Martins, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, conjuntamente com a graduanda do Curso de Matemática da UFSC, Helena Martins, outro do professor Lício Hernanes Bezerra, do Departamento de Matemática da UFSC, e dois artigos dos graduandos Paulo Ricardo Boff e Viviam Giacomelli Pedroso, do Curso de Matemática da UFSC. Além disso, fazemos um breve relato do III Encontro da ORM, realizado no dia 26 de abril de 2008, com a presença de professores de várias escolas participantes da ORM.

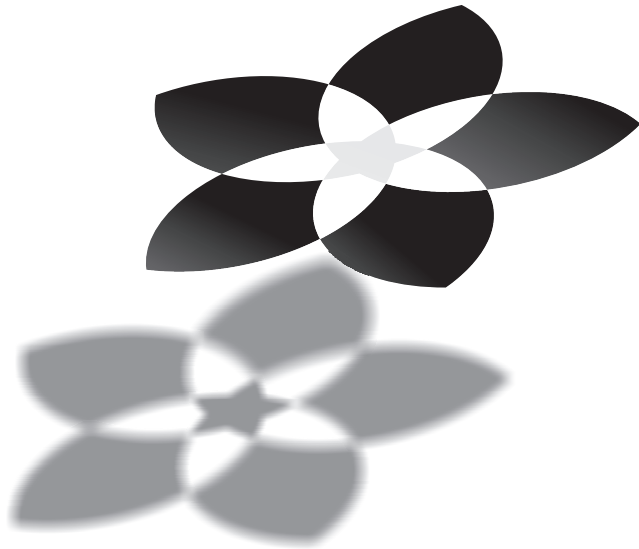
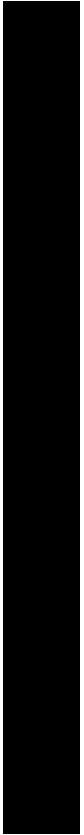
A Revista da ORM tem sido enviada anualmente para mais de 600 escolas, públicas e particulares, do estado de Santa Catarina e a diversas bibliotecas de universidades do país.

Continuaremos a distribuir gratuitamente a revista a todas as escolas interessadas nas olimpíadas de matemática com o objetivo de divulgar a ORM e a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

Florianópolis, 6 de dezembro de 2008.

José Luiz Rosas Pinho

Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina



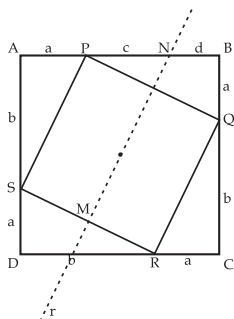
X ORM (2007)

Prova Nível 1

1. Vovó Isabel passa seus dias fazendo tricô e cuidando de seu gato Bonfio. Ela fez dois presentes para cada um de seus netos: uma blusa e um cachecol. Vovó comprou 35 novelos, cada um pesando 40 gramas e medindo 106 metros. Cada blusa gasta sete novelos e meio, e cada cachecol gasta dois novelos e meio. Vovó começou o trabalho e, depois de fazer duas blusas, descobriu que o gato Bonfio havia estragado 53 metros de lã de um novelo e escondido outros 60 gramas de lã. Mesmo assim Vovó conseguiu terminar os presentes e, com a sobra de 120 gramas fez uma touca para Bonfio e um xale. Quantos netos tem a Vovó?
2. Considere a sequência 1, 2, 3, 4, \dots , 500, dos números naturais de 1 a 500. Usando apenas adições e subtrações, é possível operar todos os números da sequência de modo a dar resultado zero? E para a sequência 1, 2, 3, 4, \dots , 500, 501, 502? Explique por que.
3. 2007 moedas são distribuídas para 11 pessoas sentadas em círculo, da seguinte forma: a primeira recebe uma moeda, a segunda recebe duas moedas, a terceira recebe uma moeda, a quarta recebe duas moedas, até a 11^a, que recebe uma moeda. A distribuição continua com a primeira pessoa recebendo duas moedas, a segunda, uma moeda, e assim por diante, até que as moedas se acabam. Em qual pessoa terminou a distribuição? Quantas moedas cada pessoa recebeu?
4. Se o resto da divisão do número ab (a é o algarismo das dezenas e b é o algarismo das unidades) por sete é quatro, e o resto da divisão do número ba (b é o algarismo das dezenas e a é o algarismo das unidades) por sete também é quatro, quais podem ser os números ab e ba ?
5. Um número de quatro algarismos é chamado uma número *mais-que-perfeito* se satisfaz as condições:
 - (1) nenhum de seus algarismos é zero.
 - (2) os dois primeiros algarismos e os dois últimos algarismos são quadrados perfeitos quando considerados como números de dois algarismos.
 - (3) a soma de todos os algarismos do número é um quadrado perfeito.Quantos números *mais-que-perfeito* existem? Algum deles é um quadrado perfeito?

Prova Nível 2

1. Encontre dois números inteiros m e n tais que $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2007}$.
2. $ABCD$ é um quadrado de lado 1.



- a) Mostre que o quadrilátero $PQRS$ da figura é um quadrado.
- b) Seja M o ponto médio do segmento RS e r a reta que passa por M , e é perpendicular a RS .

Considere $\frac{5}{9}$ a medida do lado do quadrado $PQRS$.
 Calcule a , b , $c = PN$ e $d = NB$.

3. Considere a sequência em que o primeiro termo é igual a 1, o segundo termo é igual a 2, e cada termo de ordem ímpar é igual ao triplo do anterior (de ordem ímpar) menos 1, e cada termo de ordem par é igual ao dobro do anterior (de ordem par) mais 1:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3 \cdot x_1 - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

$$x_4 = 2 \cdot x_2 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$x_5 = 3 \cdot x_3 - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$x_6 = 2 \cdot x_4 + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$$

$$x_7 = 3 \cdot x_5 - 1 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$$

\vdots

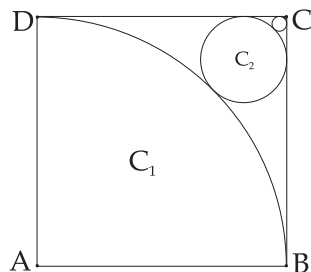
Determine o termo x_{2007} , ou seja, o termo que ocupa a posição 2007 da sequência.

4. Determine a soma de todos os números de quatro algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4.
5. Quais são os números de dois algarismos que são divisíveis pela soma de seus algarismos?

Prova Nível 3

1. Seja uma função f , definida no conjunto dos números racionais positivos. Sabendo que $f(1) = 7$ e $f(x \cdot f(y)) = x \cdot f(f(y))$, calcule $f(2007)$.

2. Em um quadrado $ABCD$, de lado $AB = l$, inscreve-se um quarto de círculo C_1 com centro em A . Na região delimitada pelos lados BC e CD e pela circunferência de C_1 inscreve-se um círculo C_2 . Na região delimitada pelos lados BC , CD e pela circunferência de C_2 inscreve-se um outro círculo C_3 , e assim por diante (veja figura). Calcule a área do círculo C_n assim construído, em função do lado l do quadrado.



3. A sequência de Farey é uma seqüência de frações entre 0 e 1 construída com as seguintes etapas:

$$(1) \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{1}$$

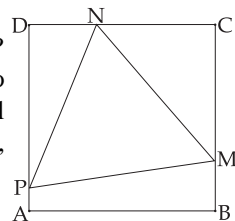
$$(2) \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$$

$$(3) \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}$$

$$(4) \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1}$$

e assim por diante, sempre tomando duas frações vizinhas $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ e inserindo-se entre elas a fração $\frac{p+r}{q+s}$. Mostre que em qualquer etapa da construção da sequência de Farey quaisquer duas frações vizinhas $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ satisfazem $ps - qr = -1$.

4. O quadrado $ABCD$ tem lado 1 e a distância AP (veja figura) é igual a $\frac{1}{8}$. Calcule o lado do triângulo equilátero PMN inscrito no quadrado. Seria possível outra configuração para os vértices M e N (por exemplo, M em AB e N em CD)? Explique.



5. Mostre que a soma de todos os números de nove algarismos distintos, formados somente com algarismos de 1 a 9 é um múltiplo de 111.111.111.

Gabarito Nível 1

1. Vovó comprou 35 novelos para fazer uma blusa e um cachecol para cada neto. Cada blusa gasta 7,5 novelos e cada cachecol gasta 2,5 novelos. Cada novelo tem 40 gramas e 106 metros. Vovó já fez duas blusas, ou seja, já gastou $7,5 + 7,5 = 15$ novelos. O gato Bonfio estragou 53 metros de lã, que correspondem a meio novelo, e escondeu 60 gramas de lã, que correspondem a um novelo e meio. Assim, temos dois novelos que não podem ser usados. Temos ainda que vovó fez uma touca para o gato Bonfio e um xale, gastando 120 gramas de lã, ou seja, três novelos. Então, restam $35 - 15 - 2 - 3 = 15$ novelos.

Como cada presente é formado por uma blusa e um cachecol e já temos duas blusas prontas, devemos fazer mais 2 cachecois gastando mais 5 novelos de lã. Portanto, sobram ainda, $15 - 5 = 10$ novelos de lã que dão para fazer mais uma blusa e mais um cachecol. Logo, vovó tem três netos.

2. Tomando os algarismos 1, 2, 3, ..., 500, temos um número par de parcelas. Além disso, somando

$$1 + 500 = 2 + 499 = 3 + 498 = \dots = 250 + 251$$

teremos um número par de somas iguais.

Então,

$$(1 + 500) - (2 + 499) + (3 + 498) - \dots + (249 + 252) - (250 + 251) = 0$$

Agora, considerando os números 1, 2, 3, ..., 500, 501, 502 também há um número par de parcelas, mas somando

$$1 + 502 = 2 + 501 = 3 + 500 = \dots = 250 + 253 = 251 + 252$$

teremos um número ímpar de somas iguais a 503, que é ímpar. Portanto a soma de todos os números de 1 a 502 é um número ímpar. Assim, não podemos operar todos os números de forma a resultar zero, já que a parte positiva deveria ser igual à parte negativa desta soma, o que daria, somando todos os números, um número par.

3. A distribuição após duas rodadas é a seguinte:

$$\begin{aligned}1^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 1 + 2 \text{ moedas} \\2^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 2 + 1 \text{ moedas} \\3^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 1 + 2 \text{ moedas} \\4^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 2 + 1 \text{ moedas} \\5^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 1 + 2 \text{ moedas} \\6^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 2 + 1 \text{ moedas} \\7^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 1 + 2 \text{ moedas} \\8^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 2 + 1 \text{ moedas} \\9^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 1 + 2 \text{ moedas} \\10^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 2 + 1 \text{ moedas} \\11^{\text{a}} \text{ pessoa} &= 1 + 2 \text{ moedas}\end{aligned}$$

A cada duas rodadas o número de moedas é igual para todos.

$$\begin{aligned}2^{\text{a}} \text{ rodada} &= 3 \text{ moedas por pessoa} \\4^{\text{a}} \text{ rodada} &= 6 \text{ moedas por pessoa} \\6^{\text{a}} \text{ rodada} &= 9 \text{ moedas por pessoa}\end{aligned}$$

E assim por diante.

Então podemos notar que, para cada pessoa,

$$\begin{aligned}\text{Rodada } 2 \cdot 1 &\rightarrow 3 \cdot 1 \text{ moedas} \\ \text{Rodada } 2 \cdot 2 &\rightarrow 3 \cdot 2 \text{ moedas} \\ \text{Rodada } 2 \cdot 3 &\rightarrow 3 \cdot 3 \text{ moedas}\end{aligned}$$

E assim sucessivamente. Desta maneira o total (para 11 pessoas) de moedas será:

$$\begin{aligned}\text{Rodada } 2 \cdot 1 &\rightarrow 11 \times 3 \cdot 1 = 33 \\ \text{Rodada } 2 \cdot 2 &\rightarrow 11 \times 3 \cdot 2 = 66 \\ \text{Rodada } 2 \cdot 3 &\rightarrow 11 \times 3 \cdot 3 = 99\end{aligned}$$

Seguindo dessa maneira até a Rodada $2 \cdot 60 \rightarrow 11 \times 3 \cdot 60 = 1980$ moedas.

Após 120 rodadas, cada pessoa recebeu 180 moedas e sobram 27 moedas. Então $2007 = 33 \times 60 + 27$. Agora vamos distribuir as 27 moedas restantes entre as

11 pessoas:

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$R121$	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
$R122$	2	1	2	1	2	1	2				
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
TM	183	183	183	183	183	183	183	182	181	182	181

onde P se refere à pessoa, $R121$ é a 121ª rodada, $R122$ é a 122ª rodada e TM é o total de moedas.

Logo, a distribuição terminou na 7ª pessoa. Da 1ª à 7ª, todos receberam 183 moedas. A 8ª e a 10ª receberam 182 moedas e a 9ª e a 11ª receberam 181 moedas.

4. Podemos escrever ab e ba da seguinte forma:

$$ab = 10a + b = 7q_1 + 4$$

$$ba = 10b + a = 7q_2 + 4$$

Tomemos os múltiplos de 7 que, quando somados com 4, resultam em números de 2 algarismos. Vamos então inverter a posição desses algarismos e dividir o novo número por 7, se o resto da divisão for 4, o número serve, caso contrário não.

$7.1 + 4 = 11$	$11 = 7.1 + 4$	<i>serve!</i>
$7.2 + 4 = 18$	$81 = 7.11 + 4$	<i>serve!</i>
$7.3 + 4 = 25$	$52 = 7.7 + 3$	
$7.4 + 4 = 32$	$23 = 7.3 + 2$	
$7.5 + 4 = 39$	$93 = 7.13 + 2$	
$7.6 + 4 = 46$	$64 = 7.9 + 1$	
$7.7 + 4 = 53$	$35 = 7.5 + 0$	
$7.8 + 4 = 60$		
$7.9 + 4 = 67$	$76 = 7.10 + 6$	
$7.10 + 4 = 74$	$47 = 7.6 + 5$	
$7.11 + 4 = 81$	$18 = 7.2 + 4$	<i>serve!</i>
$7.12 + 4 = 88$	$88 = 7.12 + 4$	<i>serve!</i>
$7.13 + 4 = 95$	$59 = 7.8 + 3$	

Os números são 11, 18, 81 e 88.

5. Os quadrados perfeitos com dois algarismos são: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Vamos fazer então as combinações dos números anteriores (dois a dois) e ver quais as somas dos algarismos dos que darão quadrados perfeitos.

16	25	<i>soma</i> 14	
16	36	<i>soma</i> 16	<i>serve!</i>
16	49	<i>soma</i> 20	
16	64	<i>soma</i> 17	
16	81	<i>soma</i> 16	<i>serve!</i>
16	16	<i>soma</i> 14	

Os números que obedecem as condições do problema são: 1636, 3616, 1681, 8116.

25	25	<i>soma</i> 14	
25	36	<i>soma</i> 16	<i>serve!</i>
25	49	<i>soma</i> 20	
25	64	<i>soma</i> 17	
25	81	<i>soma</i> 16	<i>serve!</i>

Os números que obedecem as condições do problema são: 2536, 3625, 2581, 8125.

36	36	<i>soma</i> 18	
36	49	<i>soma</i> 22	
36	64	<i>soma</i> 19	
36	81	<i>soma</i> 18	

Não conseguimos formar números de acordo com as condições do problema.

49	49	<i>soma</i> 26	
49	64	<i>soma</i> 23	
49	81	<i>soma</i> 22	

Também não conseguimos formar números.

64	64	<i>soma</i> 20	
64	81	<i>soma</i> 19	

Novamente não conseguimos formar números.

81	81	<i>soma</i> 18	
----	----	----------------	--

Também não podemos formar números.

Então os números *mais-que-perfeito* são: 1636, 3616, 1681, 8116, 2536, 3625, 2581, 8125. Assim temos 8 números *mais-que-perfeito*, sendo que 1681 é quadrado perfeito.

Gabarito Nível 2

1. Vamos resolver o problema para m e n **positivos**.

Primeiramente, encontramos o mínimo múltiplo comum (*mmc*) entre os denominadores das frações que estão no membro esquerdo da igualdade abaixo:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2007}$$

Nesse caso, vamos assumir que o *mmc* é o produto dos denominadores, ou seja $m \cdot n$, com isso obtemos a igualdade:

$$\frac{n - m}{mn} = \frac{1}{2007}$$

Note que o número 2007 é fatorado como $3^2 \cdot 223$, e assim:

$$\frac{n - m}{mn} = \frac{1}{3^2 \cdot 223}$$

Analizando a equação acima, podemos ver que não é possível encontrar m e n tais que $mn = 3^2 \cdot 223$ e $n - m = 1$.

Então, a fração $\frac{1}{3^2 \cdot 223}$ deve estar na forma reduzida, ou seja seu denomina-

dor e numerador foram divididos ao mesmo tempo por um número k . Ao multiplicarmos a fração por k , ela estará novamente em sua forma inicial e assim podemos encontrar valores inteiros para m e n . Fazendo isso, temos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{k}{3^2 \cdot 223 \cdot k}$$

Existem algumas possibilidades para m e n , uma delas assumindo $n = 3^2 \cdot 223 \cdot k$ e $m = 3 \cdot 223 \cdot k$. Resolvemos então a subtração acima utilizando desses valores para m e n :

$$\frac{1}{3 \cdot 223 \cdot k} - \frac{1}{3^2 \cdot 223 \cdot k} = \frac{k}{3^2 \cdot 223 \cdot k}$$

$$\frac{3 - 1}{3^2 \cdot 223 \cdot k} = \frac{k}{3^2 \cdot 223 \cdot k}$$

$$k = 2.$$

Substituindo o valor encontrado para k obtemos $n = 4014$ e $m = 1338$.

Note que esses são os menores números inteiros positivos que satisfazem a equação, pois 2 é o menor valor inteiro positivo possível para k .

2. a) Os triângulos $\triangle APS$, $\triangle DSR$ e $\triangle CRQ$ são congruentes pois $\hat{A} = \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$ e os lados que formam esses ângulos são congruentes (caso LAL de congruência de triângulos).

Então $PS = SR = RQ$. Além disso, $\hat{PSA} = \hat{SRD} = \hat{RQC}$ e, como $\hat{APS} = \hat{DSR} = \hat{CRQ}$, e

$\hat{PSA} + \hat{APS} = \hat{SRD} + \hat{DSR} = \hat{RQC} + \hat{CRQ} = 90^\circ$ temos que

$\hat{PSA} + \hat{DSR} = \hat{SRD} + \hat{CRQ} = 90^\circ$, e portanto $\hat{PSR} = \hat{SRQ} = 90^\circ$.

Logo, PSRQ é um quadrado.

(A rigor teremos que os triângulos $\triangle PSR$ e $\triangle QSR$ são triângulos retângulos isósceles congruentes. Segue-se daí que $\triangle SQP \equiv \triangle RPQ$, e daí $PQ = PS = SR = RQ$. Além disso, $\hat{PQR} = \hat{QPS} = 90^\circ$, e portanto PQRS é um quadrado.)

b) Se $PS = SR = RQ + QP = \frac{5}{9}$ então $a^2 + b^2 = \frac{25}{81}$

e, como $a + b = 1$ teremos $1 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = \frac{25}{81} + 2ab$.

Segue-se que $ab = \frac{28}{81}$.

Daí, a e b satisfazem a equação do 2º grau $x^2 - x + \frac{28}{81} = 0$, o que não nos dá valores reais! Portanto o problema não tem solução com os dados apresentados.

3. Note que os termos ímpares só dependem de outros termos ímpares, isto é, podemos fazer uma nova sequência apenas usando os termos ímpares da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x_1 \\
 y_2 &= x_3 \\
 y_3 &= x_5 \\
 y_4 &= x_7 \\
 &\vdots \\
 y_{1004} &= x_{2007}
 \end{aligned}$$

O enunciado já fornece os valores de x_1, x_3, x_5, \dots . Logo basta substituírmos na nossa nova sequência:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= y_1 = 1 \\
 x_3 &= y_2 = 3x_1 - 1 \\
 x_5 &= y_3 = 3x_3 - 1 \\
 x_7 &= y_4 = 3x_5 - 1 \\
 &\vdots \\
 x_{2007} &= y_{1004} = 3x_{2005} - 1
 \end{aligned}$$

Substituindo os valores da sequência x_n por seus respectivos valores na sequência y_n :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= y_1 = 1 \\
 x_3 &= y_2 = 3y_1 - 1 = 3y_1 - \frac{3-1}{2} \\
 x_5 &= y_3 = 3y_2 - 1 = 3(3y_1 - 1) - 1 = 3^2y_1 - 4 = 3^2y_1 - \frac{3^2-1}{2} \\
 x_7 &= y_4 = 3y_3 - 1 = 3(3^2y_1 - 4) - 1 = 3^3y_1 - 13 = 3^3y_1 - \frac{3^3-1}{2} \\
 &\vdots \\
 x_{2007} &= y_{1004} = 3y_{2003} - 1 = 3^{1003}y_1 - \frac{3^{1003}-1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } x_{2007} = \frac{3^{1003} + 1}{2}$$

4. Fixando o dígito 1 na casa da unidade, teremos seis números:

$$2341, 2431, 4321, 4231, 3421, 3241$$

O mesmo ocorrerá se fixarmos cada um dos outros três dígitos nessa casa.

Somando somente os algarismos da casa das unidades obteremos:

$$6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 4 = 6(1 + 2 + 3 + 4) = 6 \times 10$$

Para as casas da dezena, centena e unidade de milhar ocorrerá o mesmo. Note que no número $abcd$ (algarismos a , b , c e d), o algarismo a vale $a \cdot 10^3$, o algarismo b vale $b \cdot 10^2$, o algarismo c vale $c \cdot 10^1$ e o algarismo d , como vimos, vale $d \cdot 10^0$.

Ou seja, o número $abcd$ é igual a:

$$10^3a + 10^2b + 10c + d$$

Temos que a soma procurada será dada por:

$$10^3 \cdot (6 \times 10) + 10^2 \cdot (6 \times 10) + 10 \cdot (6 \times 10) + 1 \cdot (6 \times 10) = 60(10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 60 \times 1111 = 66660$$

5. Seja ab um número de dois algarismos. Então esse número é dado por $10a + b$, onde $a, b \in \mathbb{N}$, $0 < a \leq 9$ e $0 \leq b \leq 9$.

Queremos que:

$$10a + b = k(a + b)$$

$$(10 - k)a = b(k - 1)$$

Observe que $k > 1$ e, portanto a equação está na ordem certa. Assim, $1 < k \leq 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

Então, como a e b são algarismos, temos:

$$\text{Se } k = 2 \text{ teremos } 8a = b \implies a = 1, b = 8 \longrightarrow 18$$

Se $k = 3$ teremos $7a = 2b \implies a = 2, b = 7 \longrightarrow 27$

Se $k = 4$ teremos $6a = 3b \implies \begin{cases} a = 1, b = 2 \longrightarrow 12 \\ a = 2, b = 4 \longrightarrow 24 \\ a = 3, b = 6 \longrightarrow 36 \\ a = 4, b = 8 \longrightarrow 48 \end{cases}$

Se $k = 5$ teremos $5a = 4b \implies a = 4, b = 5 \longrightarrow 45$

Se $k = 6$ teremos $4a = 5b \implies a = 5, b = 4 \longrightarrow 54$

Se $k = 7$ teremos $3a = 6b \implies \begin{cases} a = 2, b = 1 \longrightarrow 21 \\ a = 4, b = 2 \longrightarrow 42 \\ a = 6, b = 3 \longrightarrow 63 \\ a = 8, b = 4 \longrightarrow 84 \end{cases}$

Se $k = 8$ teremos $2a = 7b \implies a = 7, b = 2 \longrightarrow 72$

Se $k = 9$ teremos $a = 8b \implies a = 8, b = 1 \longrightarrow 81$

Se $k = 10$ teremos $b = 0 \implies \begin{cases} a = 1 \longrightarrow 10 \\ a = 2 \longrightarrow 20 \\ a = 3 \longrightarrow 30 \\ a = 4 \longrightarrow 40 \\ a = 5 \longrightarrow 50 \\ a = 6 \longrightarrow 60 \\ a = 7 \longrightarrow 70 \\ a = 8 \longrightarrow 80 \\ a = 9 \longrightarrow 90 \end{cases}$

Portanto são 23 números: 18, 27, 12, 24, 36, 48, 45, 54, 21, 42, 63, 84, 72, 81, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 e 90.

Gabarito Nível 3

1. Vamos primeiramente tomar $y = 1$, então:

$$\begin{aligned} f(x \cdot f(1)) &= x \cdot f(f(1)) \\ \Rightarrow f(7x) &= x \cdot f(7), \quad \forall x \in \mathbb{Q}_+^* \end{aligned}$$

Tomando agora $x = \frac{1}{7}$ obtemos:

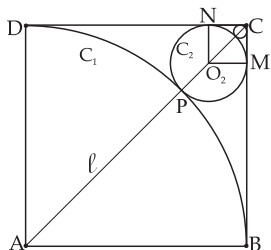
$$\begin{aligned} f\left(7 \cdot \frac{1}{7}\right) &= \frac{1}{7}f(7) \\ \Rightarrow 7 &= f(1) = \frac{1}{7}f(7) \\ \Rightarrow f(7) &= 49 \end{aligned}$$

Fazendo agora $x = \frac{2007}{7}$ obtemos:

$$\begin{aligned} f\left(7 \cdot \frac{2007}{7}\right) &= \frac{2007}{7}f(7) \\ f(2007) &= \frac{2007}{7} \cdot 49 = 2007 \cdot 7 \end{aligned}$$

Portanto, $f(2007) = 14049$.

- 2.



Vamos calcular, inicialmente, o raio da circunferência C_2 , ao qual chamaremos de R_2 . Observe que o raio R_1 da circunferência C_1 é igual ao lado do quadrado $ABCD$, ou seja, $R_1 = l$. Além disso, os centros das circunferências C_1, C_2, \dots, C_n estão sobre a diagonal \overline{AC} .

Seja O_2 o centro de C_2 e P o ponto de tangência de C_1 e C_2 . Então:

$$\begin{aligned} AP = R_1 = l, \quad AC = l\sqrt{2}, \quad PO_2 = R_2 \quad \text{e} \\ O_2C = R_2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

pois O_2 e C são vértices opostos de um quadrado O_2MCN de lado R_2 .

Assim:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= PO_2 \\
 R_2 &= AC - AP - O_2C \\
 R_2 &= l\sqrt{2} - l - R_2\sqrt{2} \\
 R_2 + R_2\sqrt{2} &= l\sqrt{2} - l \\
 R_2(\sqrt{2} + 1) &= l(\sqrt{2} - 1) \\
 R_2 &= l \frac{(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)} \\
 R_2 &= l(\sqrt{2} - 1)^2
 \end{aligned}$$

Lembrando que $R_1 = l$, podemos escrever $R_2 = R_1(\sqrt{2} - 1)^2$.

Para calcularmos R_3 procedemos de forma análoga, considerando agora o quadrado O_2MCN de lado R_2 , obtendo assim:

$$R_3 = R_2(\sqrt{2} - 1)^2 = l(\sqrt{2} - 1)^4$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= l \\
 R_2 &= l(\sqrt{2} - 1)^2 \\
 R_3 &= l(\sqrt{2} - 1)^4 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Note que os raios das circunferências C_1, C_2, \dots, C_n formam uma progressão geométrica de razão $(\sqrt{2} - 1)^2$. Usando a fórmula do termo geral da P.G. para calcular R_n obtemos:

$$\begin{aligned}
 R_n &= R_1((\sqrt{2} - 1)^2)^{n-1} \\
 R_n &= l(\sqrt{2} - 1)^{2n-2} \text{ para } C_n.
 \end{aligned}$$

Segue-se que a área A_n de C_n é:

$$A_n = \pi l^2 (\sqrt{2} - 1)^{4n-4}$$

3. Sejam $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ duas frações vizinhas quaisquer da sequência da Farey. Seja **ps - qr = x**. Por definição, sabemos que na próxima etapa a fração que estará entre $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ será $\frac{p+r}{q+s}$. Note que, se $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, então $\frac{p}{q} < p+rq+s < \frac{r}{s}$.

Daí teremos: $\dots, \frac{p}{q}, \frac{p+r}{q+s}, \frac{r}{s}, \dots$

Se fizermos o produto dos meios menos o produtos dos extremos para a primeira e a segunda frações e depois para a segunda e terceira obtemos:

$$p(q+s) - q(p+r) = pq + ps - qp - qr = \mathbf{ps - qr = x}$$

e

$$s(p+r) - r(q+s) = ps + rs - qr - sr = \mathbf{ps - qr = x}$$

Observe que na próxima etapa obteremos a sequência

$$\dots, \frac{p}{q}, \frac{2p+r}{2q+s}, \frac{p+r}{q+s}, \frac{p+2r}{q+2s}, \frac{r}{s}, \dots$$

e quando fizermos o produto dos meios menos o produto dos extremos para cada par de frações consecutivas, o resultado será sempre **ps - qr = x**, ou seja, podemos perceber que esta diferença depende apenas das duas frações iniciais.

Como a sequência de Farey inicia com as frações $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$, temos que

$$\mathbf{x = 0 \cdot (-1) \cdot 1 = -1.}$$

Observação: A rigor, o fato de que, em qualquer etapa de sua construção, os termos da sequência de Farey estão ordenados, da esquerda para a direita, em ordem crescente, deve ser demonstrado por indução.

4. Suponhamos que exista de fato um triângulo equilátero $\triangle PMN$ inscrito no quadrado. Embora o desenho sugira a inclinação do lado PM em relação ao lado AB do quadrado, não sabemos se esta é a posição real do triângulo. De qualquer forma, admitiremos que o triângulo $\triangle PMN$ tenha vértice M no lado BC e o vértice N no lado CD do quadrado.

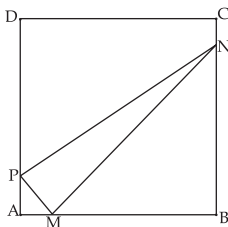
Seja Q o ponto médio do lado PM do triângulo, e seja QR perpendicular ao lado CD do quadrado, com R em CD (ver figura).

Daí,

$$l = \frac{1}{4} \sqrt{113 - 56\sqrt{3}}.$$

Outra configuração não é possível, pois se M estivesse em AB :

- (a) N não poderia estar em BC , pois para que isso acontecesse $AM < \frac{1}{8}$ (note que N está na mediatriz de PM) e, neste caso, PM seria menor que a distância de P ao lado BC .



- (b) Se N permanecesse em CD então, no caso limítrofe em que M fosse B , teríamos após calcular PN , que $PN > PM$ e, para $PM < PB$ teríamos PN maior ainda.

Portanto só há uma configuração possível para o triângulo com P dado tal que $AP = \frac{1}{8}$.

5. Existem $9!$ números de nove algarismos distintos formados apenas por algarismos de 1 a 9.

Fixemos o dígito 1 na casa da unidade. Permutando os outros oito algarismos temos $8!$ números dessa forma. Analogamente, para cada casa há $8!$ números em o dígito 1 aparece na casa fixada.

Em uma casa estabelecida, para cada algarismo de 1 a 9 temos $8!$ números. Ou seja, a soma dos algarismos, de todos os números, que ocupam uma mesma casa é

$$8! \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 8! \cdot 45$$

Observando que um número $abcdefghi$ de 9 algarismos pode ser escrito da forma

$$a \cdot 10^8 + b \cdot 10^7 + c \cdot 10^6 + d \cdot 10^5 + e \cdot 10^4 + f \cdot 10^3 + g \cdot 10^2 + h \cdot 10 + i \cdot 1$$

podemos concluir que a soma de todos os números é

$$\begin{aligned} &8! \cdot 45 \cdot 10^8 + 8! \cdot 45 \cdot 10^7 + 8! \cdot 45 \cdot 10^6 + 8! \cdot 45 \cdot 10^5 + 8! \cdot 45 \cdot 10^4 + \\ &\quad + 8! \cdot 45 \cdot 10^3 + 8! \cdot 45 \cdot 10^2 + 8! \cdot 45 \cdot 10 + 8! \cdot 45 \cdot 1 \\ &= 8! \cdot 45 \cdot (10^8 + 10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 8! \cdot 45 \cdot 111111111 \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos números de nove algarismos distintos formados apenas por algarismos de 1 a 9 é um múltiplo de 111111111.

Premiados

(em ordem alfabética por nível e por medalha)

Nível 1

Ouro

- Pedro Lufiego da Luz (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Rafael de Melo Boerger (Escola Municipal Governador Pedro Ivo Campos)

Prata

- Aluizio Cidral Junior (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Bruno Toshio Ogava (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- George Lodygensky (Colégio Energia - Jurerê)
- Lucas M. Michels (E. M. Governador Pedro Ivo Campos)

Bronze

- Isabella Giusti Hernandes (Centro Educacional Menino Jesus)
- Gabriela Marques De Almeida (Centro Educacional Menino Jesus)
- Leonardo Caldeira Fagundes (Escola Dinâmica)
- Nicolas Fernandez Leitão (Escola Vivência)
- Nicole Braga De Medeiros Nicolak (E. M. P. Anna Maria Harger)
- Paulo Vinícius Lisboa Girardi (Colégio Catarinense)
- Vinícius Wiggers (Escola Municipal Professora Anna Maria Harger)

Menção Honrosa

- Amanda Tasca Petroski (Colégio Alpha Objetivo)
- Ana Paula Alves Da Silva (Centro Educacional SATC)

- Bianca Paola Frattini (Cefrai - Centro Educacional Fraiburgo)
- Camila Passos De Souza (Colégio Alpha Objetivo)
- Camila Slongo Gonzalez (Educandário Imaculada Conceição)
- Gustavo Somavilla Nunes (Colégio Superação)
- Igor M. M. Cruz (Colégio Cruz e Souza)
- Josiane Bueno Gress (Colégio Da Lagoa)
- Júlia Ceccon Ortolan (Colégio De Aplicação UFSC)
- Leonardo Abreu Ramlow (Sistema de Ensino Energia - Santo Amaro Da Imperatriz)
- Luana Andreia Monje (E. M. Professora Anna Maria Harger)
- Luiz Gustavo de Oliveira (Sociedade Educacional Posiville)
- Matheus Maciel Tavares (Colégio Alpha Objetivo)
- Miryan Yumi Sakamoto (Colégio da Lagoa)
- Natan Votre (Centro Educacional SATC)

Nível 2

Ouro

- Gustavo Lisbôa Empinotti (Escola Dinâmica)

Prata

- Aline Amorin Graf (Colégio Cenecista São José)
- Guilherme Vitor Wendhausen Rothbarth (Colégio Tupy)
- Kaio Gabriel da Silveira Rosa (Colégio Alpha Objetivo)
- Marcei Fernandes da Rosa Pereira (Colégio dos Santos Anjos)

- Marina Demaria Venâncio (Colégio Catarinense)

Bronze

- Jean Carlos Lamin (E. M. E. F. Maria Nilda Salai Stahelin)
- Jéssica Göedert Pereira (Colégio Catarinense)
- Leonardo Gonçalves Fischer (Centro Educacional Fraiburgo)
- Lucas Pereira Zarbato Colégio (Bom Jesus Coração de Jesus)

Menção Honrosa

- Analiz Hüntemann Garcia (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Beatriz Anselmo Pereira (Colégio Dehon)
- Chaiene de Conto de Oliveira (Centro Educacional Menino Jesus)
- Elisa Cordeiro Nauck (Centro Educacional Menino Jesus)
- Gabriel Luiz Weihermann Woeltje (Sociedade Educacional Posiville)
- Lettícia Carina Novicki (Centro Educacional Fraiburgo)
- Lucas Eda (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Lucas Tadeu Krüger Poffo (Sociedade Educacional Posiville)
- Maria Alice dos Santos Duz (Colégio Murialdo)
- Matheus Domingos da Silva e Silva (Colégio Catarinense)
- Nathália Pereira (Colégio de Aplicação Univali)
- Philipe Müller (Centro Educacional Fraiburgo)
- Sacha Orberg Temer (Escola Sarapiquá)
- Tânia Kelvia Barros de Castro (E.M. Presidente Castello Branco)
- Thiago Zanivan Felisberto (Centro Educacional SATC)
- Tiago Luiz Tambosi (Colégio Catarinense)

Nível 3**Ouro**

- André Ginklings Froes da Cruz (CEFET - Florianópolis)

Prata

- Giuliana Sardi Venter (Barão do Rio Branco)
- Lenon Schmitz (Madre Francisca Lampel)
- Luiz Renato Tomelin (Colégio Catarinense)
- Marcelo Adriano Nunes Filho (Colégio Cenecista São José)
- Tiago Madeira (Salesiano Itajaí)

Bronze

- Caio Andrezzo (Senai - Jaraguá do Sul)
- Cintya Kazue Sakamoto (CEFET - Florianópolis)
- Danilo Nunes do Carmo (Colégio Aplicação UFSC)
- Evaldo Pereira de Carvalho Neto (Colégio Tupy)
- Samuel da Silva Lunardi (Colégio Dehon)
- Wagner Daufenbach do Amaral (Colégio São Bento)

Menção Honrosa

- Adriano Oliveira Pires (E. E. B. Profissional Professora Adelia Cabral Varejão)
- André Akio Saito do Nascimento (Colégio São Bento)
- Angelo Teixeira Rodrigues (Colégio São Bento)
- Eduardo Machado Capaverde (Energia - Florianópolis)
- Filipe Eduardo Moecke (Escola Autonomia)

-
- Heloísa Helena Rodrigues (Colégio Dom Jaime Câmara)
 - Leonardo de Bortoli (Colégio Catarinense)
 - Natan Cardozo Leal (E. E. M. Professor Robreto Grant)
 - Nivaldo Stankiewicz Júnior (Sociedade Educacional Posiville)
 - Olav Philipp Henschel (Sociesc)
 - Philippi Farias Rachadel (Educandário Imaculada Conceição)
 - Renato Augusto Conte (Cefrai)

Escolas Participantes

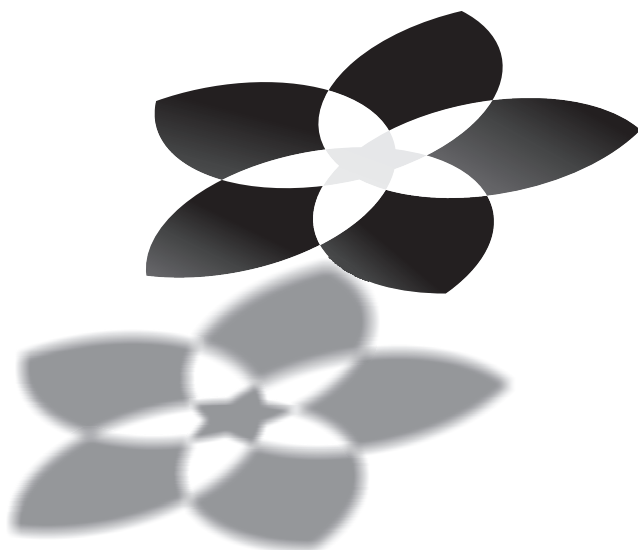
Alcuino Gonçalo Vieira (Anita Garibaldi); Associação Beneficente da Industria Carbonifera de Santa Catarina- SATC (Criciúma); Bom Jesus Coração de Jesus (Florianópolis); CAIC - Professor Desembargador Francisco José Rodrigues de Oliveira (Joinville); CEDUP - Renato Ramos da Silva (Lages); CEJA - Centro de Educação de Jovens e Adultos (Criciúma); Centro de Educação do Município de Mafra - CEMMA (Mafra); Centro de Educação e Tecnologia de Tubarão (Tubarão); Centro de Educação Profissional Renato Ramos da Silva (Lages); Centro de Educação Tangaraense (Tangará); Centro Educacional Canguru (Jaraguá do Sul); Centro Educacional Fraiburgo Ltda (Fraiburgo); Centro Educacional Gotas do Conhecimento (Seara); Centro Educacional Jardim Zanellato (São José); Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis); Centro Educacional Potencial (Campos Novos); Centro Educacional Proffessora Maria de Lourdes Couto Cabral (Navegantes); Centro Educacional Universo do Saber (Maravilha); Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina (Florianópolis); CETISA - Centro Educacional Timbó SA (Timbó); Colégio Alpha Objetivo (São José); Colégio Ana Luíza (Porto Belo); Colégio Bom Jesus Diocesano (Lages); Colégio Catarinense (Florianópolis); Colégio Cenecista São José (Rio Negrinho); Colégio Criativo (Florianópolis); Colégio Cristo Rei (Içara); Colégio Cruz e Sousa (Lages); Colégio da Lagoa (Florianópolis); Colégio de Aplicação da UFSC (Florianópolis); Colégio de Ensino Médio Univille (São Bento do Sul); Colégio dom Jaime Câmara (São José); Colégio dos Santos Anjos (Joinville); Colégio Energia - Balneário Camboriu (Balneário Camboriú); Colégio Estimoarte Ltda. (Florianópolis); Colégio Global (São Bento do Sul); Colégio Global (São Bento do Sul); Colégio Madre Francisca Lampel (Gaspar); Colégio Murialdo (Araranguá); Colégio Policial Militar Feliciano Nunes Pires (Florianópolis); Colegio Rogacionista Pio XII (Criciúma); Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí); Colégio São Bento (Criciúma); Colégio São José (Itajaí); Colégio Sinodal Ruy Barbosa (Rio do Sul); Colégio Superação (Videira); Colégio Tendência (Florianópolis); Colégio Tradição (Florianópolis); Colégio Trans-

formação (Florianópolis); Colégio Tupy - SOCIESC (Joinville); Colégio Tupy (São Bento do Sul); Colégio Universitário (Gaspar); Colégio Visão (São José); Conjunto Educacional Dr. Blumenau (Pomerode); E. B. Basileu José da Silva (Imbituba); E. B. M. Ana Lucia Hiendlmayer (Indaial); E. B. M. Anita Bernardes Ganancini (Camboriú); E. B. M. Annemarie Techetin (Blumenau); E. B. M. Deputado Joaquim Ramos (Imbituba); E. B. M. Diogo Alves da Silva (Chapecó); E. B. M. Doutor Rogério Zattar (São Francisco do Sul); E. B. M. Elizabetha Andreazzo Pavan (Concórdia); E. B. M. Emílio Engel (São Bento do Sul); E. B. M. Gal Lúcio Esteves (Blumenau); E. B. M. José Vanderlei Mayer (Imbituba); E. B. M. Lucinira Melo Rebelo (Camburiú); E. B. M. Luiz Cândido da Luz (Florianópolis); E. B. M. Majorca (São Francisco do Sul); E. B. M. Melvin Jones (Concordia); E. B. M. Padre Germano Brandt (Guabiruba); E. B. M. Rio do Pinho (Canoinhas); E. B. M. Waldemar da Costa (São Francisco do Sul); E. B. Padre Dr. Itamar Luís da Costa (Imbituba); E. B. Padre José de Anchieta (Itajaí); E. E. B. Adolfo Antonio Cabral (Piçarras); E. E. B. Alexandre Guilherme Figueredo (Piçarras); E. E. B. Almirante Boiteux (Araquari); E. E. B. Aloysius Back (Forquilha); E. E. B. Anita Garibaldi (Itapema); E. E. B. Antônio Gonzaga (Porto União); E. E. B. Antônio Milanez Netto (Criciúma); E. E. B. Barão de Antonia (Mafra); E. E. B. Bom Pastor (Chapecó); E. E. B. Campos Verdes (Jaguaruna); E. E. B. Celestino José do Nascimento (Ouro Verde); E. E. B. Conselheiro Mafra (Joinville); E. E. B. Coronel Lara Ribas (Chapecó); E. E. B. Costa Carneiro (Orleans); E. E. B. Deputado Augusto Bresola (Vargem); E. E. B. Dom Gregório Warmeling (Balneário Barra do Sul); E. E. B. Dom Jaime de Barros Câmara (Florianópolis); E. E. B. Doutor Frederico Rolla (Atalanta); E. E. B. Doutor Serafin Enoss Bertaso (Nova Itaberaba); E. E. B. E. M. B. Edmundo da Luz Pinto (Curitibanos); E. E. B. Edith Gama Ramos (Florianópolis); E. E. B. Emb. Edmundo da Luz Pinto (Curitibanos); E. E. B. Emílio Garastazu Médici (Campo Erê); E. E. B. Eremeta Souza (Araranguá); E. E. B. Esther Crema Marmenitini (Videira); E. E. B. Euclides da Cunha (Jaraguá do Sul); E. E. B. Francisco Mael Bageston (Paial); E. E. B. Francisco Molgero (Jacinto Machado); E. E. B. Frei

Crespim (Ouro);E. E. B. General Osvaldo Pinto da Veiga (Capivari de Baixo);E. E. B. Governador Aderbal Ramos da Silva (Tubarão);E. E. B. Hélio Lentz Puerta (Bom Jesus);E. E. B. Hercílio Deeke (Blumenau);E. E. B. Heriberto Hulse (Ibiam);E. E. B. Holando Marcellino Gonçalves (Jaraguá do Sul);E. E. B. Inspetor Eurico Rauen (Videira);E. E. B. Irai Zilio (Joaçaba);E. E. B. Irmã Maria Teresa (Palhoça);E. E. B. Irmão Joaquim (Ibicaré);E. E. B. João Colin (Joinville);E. E. B. João Winckler (Xanxerê);E. E. B. José Antunes Mattos (Orleans);E. E. B. José Cesário Brasil (Celso Ramos);E. E. B. José do Patrocínio (Siderópolis);E. E. B. La Salle (Serra Alta);E. E. B. M. Aurora Péterle (Siderópolis);E. E. B. Manoel Cruz São Joaquim (São Joaquim);E. E. B. Manoel Henrique de Assis (Penha);E. E. B. Marechal Bormann (Chapecó);E. E. B. Nilo Peçanha (Porto União);E. E. B. Normelio Cunha (Sombrio);E. E. B. Orestes Guimarães (São Bento do Sul);E. E. B. Padre Antônio Trivellin (Painel);E. E. B. Padre Antônio Trivilin (Lages);E. E. B. Padre Antônio Vieira (Ipuacu);E. E. B. Pedro Américo (Agrolândia);E. E. B. Porto do Rio Tavares (Florianópolis);E. E. B. Presidente Prudente de Moraes (Pomerode);E. E. B. Professor Geni Comel (Chapecó);E. E. B. Professor José Duarte Magalhães (Jaraguá do Sul);E. E. B. Professor José Rodrigues Lopes (Garopaba);E. E. B. Professora Adelina Regis (Videira);E. E. B. Professora Dilma Grimes Evaristo (Santa Cecília);E. E. B. Professora Gertrudes Benta Costa (Joinville);E. E. B. Professora Luiza Santin (Chapecó);E. E. B. Rocha Pombo (São Joaquim);E. E. B. Roland Harold Dornbusch (Jaraguá do Sul);E. E. B. Santa Rita (São Miguel do Oeste);E. E. B. Santos Anjos (Rio das Antas);E. E. B. São Caetano (Xanxerê);E. E. B. São Luiz (União do Oeste);E. E. B. Sete de Setembro (Águas Frias);E. E. B. Silva Jardim (Alfredo Wagner);E. E. B. Tenente Ary Rauen (Mafra);E. E. B. Vargem dos Bugres (Leoberto Leal);E. E. B. Vereadora Ruth Nóbrega Martinez (São Francisco do Sul);E. E. B. Victor Hering (Blumenau);E. E. B. Vidal Ramos Júnior (Concórdia);E. E. B. Visconde de Cairu (Lages);E. E. B. Vitório Búrigo (Morro da Fumaça);E. E. B. Willy Hering (Rio do Sul);E. E. B. Doutor Jorge Lacerda (Joinville);E. E. F. Alberto Pretti (Brusque);E. E.

F. Angelo Dognini (Brusque);E. E. F. Angelo Dognini (Brusque);E. E. F. Bento Eloi Garcia (Itapema);E. E. F. Clara Donner (Timbó);E. E. F. Cristo Rei (São José);E. E. F. Doutor Carlos Moritz (Brusque);E. E. F. Freya Hoffmann Wettengel (Concórdia);E. E. F. Marechal Rondon (Criciúma);E. E. F. Monsenhor Sebastião Scarzello (Joinville);E. E. F. Padre Bruno Linden (Massaranduba);E. E. F. Padre Hermenegildo Bortolato (Rio das Antas);E. E. F. Padre Luiz Gonzaga Steiner (Brusque);E. E. F. Poço Fundo (Brusque);E. E. F. Prefeita Erna Heidrich (Taió);E. E. F. Professor Emir Ropelato (Timbó);E. E. F. Professor Emir Ropelato (Timbó);E. E. F. Professor José Vieira Côrte (Brusque);E. E. F. Professora Augusta Knorring (Brusque);E. E. F. Professora Isaura Gouvêa Gevaerd (Brusque);E. E. F. Rio Branco (Brusque);E. E. F. Sede Figueira (Chapécó);E. E. F. Senador Rodrigo Lobo (Joinville);E. E. F. Toldo Velho (Ipuçu);E. E. F. Visconde de Taunay;E. E. M. Alberto Bauer (Jaraguá do Sul);E. E. M. Professora Daci Frake Welk;E. E. M. São Francisco (Gurujá do Sul);E. E. M. Victor Meirelles (Itajaí);E. M. Anaburgo (Joinville);E. M. de Ed. Infantil e Ens. Fundamental Filho do Mineiro.(Criciúma);E. M. Deputado Lauro Carneiro de Loyola (Joinville);E. M. E. B. Dom Daniel Hostin (Lages);E. M. E. B. Padre Germano (Guabiruba);E. M. E. B. Valentin Bernardi (Itá);E. M. E. F. Adolfo Back (Criciúma);E. M. E. F. Albano Kanzler (Jaraguá do Sul);E. M. E. F. Atayde Machado Dadi (Jaraguá do Sul);E. M. E. F. Educar (Itapema);E. M. E. F. Maria Nilda Salai Stähelin (Jaraguá do Sul);E. M. E. F. Max Schubert (Jaraguá do Sul);E. M. E. F. Professora Clotildes Maria Martins Lalau (Criciúma);E. M. E. F. Ricieri Marcatto (Jaraguá do Sul);E. M. E. F. Waldemar Schmitz (Jaraguá do Sul);E. M. Erwin Prade (Timbó);E. M. Governador Pedro Ivo Campos (Joinville);E. M. João Costa (Joinville);E. M. Monteiro Lobato (Piçarras);E. M. Mulde Baixa (Indaial);E. M. Padre Martinho Stein (Timbó);E. M. Padre Martinho Stein (Timbó);E. M. Pauline Parucker (Joinville);E. M. Presidente Castello Branco (Joinville);E. M. Presidente Médici (Balneário Camboriú);E. M. Primeiro Grau Santa Terezinha (Faxinal dos Guedes);E. M. Professor Edgar Monteiro Castanheira (Joinville);E. M. Professora Ada Santanna Da Silveira (Joinville);E.

M. Professora Anna Maria Harger (Joinville);E. M. Professora Eladir Skibinski (Joinville);E. M. Professora Zuma do Rosário Miranda (Joinville);E. M. Tereza Migliorini (Faxinal dos Guedes);E. M. Tirolese (Timbó);E. M. Vereador Curt Alvino Monich (Joinville);E. M. Viver e Conhecer (Capinzal);E.B. Morretes II (Palhoça);Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis);Escola Agrotécnica Federal de Concórdia (Concórdia);Escola Agrotécnica Federal de Sombrio (Santa Rosa do Sul);Escola Autonomia (Florianópolis);Escola Dinâmica (Florianópolis);Escola Eugênio Pozzo (Concórdia);Escola Sarapiquá (Florianópolis);Escola Técnica de Comércio de Tubarão (Tubarão);Escola Técnica do Vale do Itajaí (Blumenau);Escola Vivência (Florianópolis);Escola Zenildo Carbonera (Marema);Exathum Curso e Colégio (Joinville);Fundação Bradesco (Laguna);G.E.M. Professora Clotilde Ramos Chaves (Camboriú);Gennius - Ensino Fundamental (Videira);Instituto Maria Auxiliadora (Rio do Sul);Liceu Catarinense de Ensino (Balneário Camboriú);N. E. M. Avelino Alves Triches (Palmitos);N. E. M. João Pedro Alberti (Bela Vista do Toldo);N. E. M. João Pedro Alberti (Bela Vista do Toldo);N. E. M. Juliana Tomporoski Krull (Bela Vista do Toldo);N. E. Presidente Adolfo Konder (Irineópolis);Raul Pompéia (Campo Erê);SENAI - Centro de Tecnologia em Eletroeletrônica de Jaraguá do Sul (Jaraguá do Sul);SENAI de Itajaí (Itajaí);SENAI de Joinville (Joinville);SENAI de Lages (Lages);Sistema de Ensino Energia - Jurerê (Florianópolis);Sistema de Ensino Energia (Florianópolis);Sistema de Ensino Energia (Santo Amaro da Imperatriz);Sociedade Educacional Posiville (Joinville);Sociedade Educacional Verde Vale Ltda (Blumenau);Unidade São Bento do Sul - KUMON (São Bento do Sul);



Evento

III Encontro de Professores da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

Cláudia Dal Pont Rocha¹, Edson Valmórbida², José Luiz Rosas Pinho³

No dia 26 de abril de 2008 ocorreu na UFSC o *III Encontro de Professores da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina*. Em 10 anos de Olimpíada Regional (ORM) realizamos somente dois Encontros, e já se fazia necessário um terceiro.

Os objetivos desse evento foram: divulgar, informar e discutir os vários aspectos das Olimpíadas de Matemática (ORM, OBM e OBMEP), promover o contato entre os professores das escolas e a Comissão das Olimpíadas na UFSC (professores e alunos do Curso de Matemática - bolsistas do PET Matemática, bolsistas de extensão e voluntários), apresentar palestras de conteúdo matemático (diretamente ou não ligados a problemas olímpicos) e discutir problemas olímpicos.

O III Encontro realizou-se conforme a seguinte programação:

8:00 - Recepção

9:00 - Mesa Redonda: Exposição dos objetivos das Olimpíadas de Matemática, da estrutura da ORM, da importância da atuação dos professores e diretores das escolas e dos treinamentos, dúvidas e esclarecimentos.

10:00 - Café

10:30 - Minicurso: Uma Introdução à Teoria dos Jogos - Graduandos Mateus Teixeira e Viviam Giacomelli Pedroso

12:00/14:00 - Intervalo para Almoço (a cargo do participante)

14:00/14:55 - Minicurso: Uma Introdução à Teoria dos Jogos

15:00/15:55 - Palestra - Conjecturas que Trazem Fermat à História - Graduando Asteroide Santana

15:55/16:20 - Café

16:20/18:00 - Oficina de Problemas Olímpicos com os professores da comissão regional das Olimpíadas de Matemática.

¹Aluna com bolsa permanência

²Bolsista de extensão

³Coordenador da ORM

Participaram da *Mesa Redonda* os seguintes professores do projeto: José Luiz Rosas Pinho (Coordenador da ORM), Carmem Suzane Comitre Gimenez (Coordenadora do Curso de Matemática da UFSC) e Eliézer Batista, além dos professores das escolas. Nesta Mesa Redonda foram expostos os objetivos da ORM e OBM, o processo de treinamento dos estudantes das escolas, as listas de treinamento, os procedimentos de cadastramento e os procedimentos de envio de relatórios, o procedimento de correção das provas e a cerimônia de premiação.

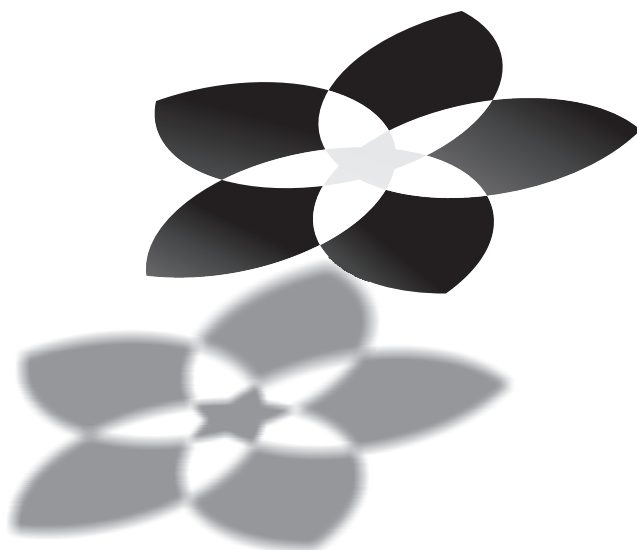
O minicurso versou sobre o tema *Teoria de Jogos*. A Teoria de Jogos é uma teoria que estuda situações de conflito. Ela pode ser vista como um ramo da Matemática Aplicada que estuda situações estratégicas em que jogadores escolhem diferentes ações na tentativa de melhorar seu ganho. A escolha de estratégia do jogador depende tanto das suas opções quanto das opções de estratégia de seu adversário. No minicurso foi apresentada a história dessa teoria, desde sua origem em 1713 com James Waldegrave, até os tempos atuais (século XX), passando por grandes nomes como John Nash, prêmio Nobel de Economia. Foi estudada um pouco da matemática dessa teoria e suas aplicações, que podem referir-se a simples jogos de entretenimento ou a aspectos significativos da vida em sociedade como, por exemplo, jogo de pôquer, leilão, sistema de votação, análise do senso comum e evolução de animais.

A palestra *Conjecturas que trazem Fermat à História* constou de uma abordagem histórica, os primos de Fermat, o pequeno teorema de Fermat, o ponto de Fermat, uma classificação dos primos por Fermat, e o último teorema de Fermat.

Na *Oficina de Problemas* foi distribuída uma lista de nove problemas olímpicos para serem discutidos em sala. Houve uma breve interrupção desta oficina em que o coordenador convidou o professor Lício Hernanes Bezerra, Coordenador da OBMEP, para falar dessa olimpíada.

Participaram 82 professores de diversas escolas, públicas e particulares, do estado de Santa Catarina. Um certificado de participação foi entregue aos professores presentes.

Uma crítica feita, a posteriori, foi que o Encontro poderia ter se dedicado mais à parte da Oficina, com a discussão sobre tipos de problemas olímpicos e métodos de resolução e apresentação aos estudantes das escolas. Tal crítica foi recebida e anotada e, para o próximo Encontro, que deverá ser realizado em 2009, deveremos dar uma atenção maior a esses pontos.



Artigo

Por que compomos música com apenas 12 notas musicais?

Licio Hernanes Bezerra

Departamento de Matemática - UFSC
Florianópolis - SC

Por que compomos música com apenas 12 notas musicais?

Filósofos gregos, na época de Pitágoras, consideravam a música como parte da matemática. Pitágoras percebeu que, ao se vibrar uma corda esticada, seqüências de ondas se formam. Começando com a corda formando uma só onda, a seqüência de ondas seguinte é formada por duas ondas de menor altura, mas duas vezes mais rápida; a seqüência seguinte é formada por três ondas de menor altura que a da seqüência anterior, mas três vezes mais rápida que a primeira onda solitária e, assim, por diante. Os primeiros modos de oscilação de uma corda vibrando podem ser vistos na figura 1.

Os gregos logo perceberam que as ondas da segunda seqüência passam por pontos que dividem a corda em duas partes iguais, as da terceira seqüência, em pontos que a dividem em três partes iguais e, assim, sucessivamente. Se a corda for longa o bastante, estes pontos e as ondas são visíveis. Todas as ondas se sobrepõem, ao mesmo tempo, gerando um desenho complexo. Isso pode ser visualizado em um violão que tem trastes, que são aquelas divisões transversais ao braço do violão. O 12º traste divide as seis cordas do violão pela metade. Se pousarmos levemente o dedo médio na corda mais grossa sobre esse traste e dedilharmos a corda, a onda solitária maior é abafada e podemos ver, claramente, a seqüência de duas ondas vibrando.

Definimos que a **freqüência** de um movimento periódico é o número de ciclos (aquilo que se repete) do movimento por segundo. Por exemplo, no primeiro modo temos que a corda fez $1/2$ ciclo no mesmo tempo que no segundo modo a corda fez 1 ciclo. Se chamarmos a freqüência do primeiro modo de f (a freqüência **fundamental** do movimento oscilatório), a freqüência do segundo modo é $2f$; do terceiro, $3f$ e, assim, por diante. Chamamos de **Hertz** (abreviadamente, Hz) à unidade de freqüência

correspondente a $1/(1 \text{ segundo})$.

Um movimento oscilatório, como o de uma corda de violão vibrando, pressiona o ar em ondas, como aquelas que são causadas na água por uma pedra jogada em um lago. Essas ondas chegam até os nossos ouvidos e fazem vibrar os nossos tímpanos, o que o cérebro interpreta como som. Quanto maior a frequência do movimento, mais agudo é o som. Segundo os especialistas, nossos ouvidos captam sons cujas frequências variam de 17 Hz a 17.000 Hz.

Voltando ao violão, o som causado por um dedilhar de uma corda é o resultado da soma de vários sons simultâneos: o da frequência fundamental f e os de todas as suas frequências múltiplas inteiras ($2f$, $3f$ etc). Cada uma dessas frequências é dita um harmônico. O primeiro harmônico soa com muito mais intensidade (volume mais alto) que os posteriores, e a gente o percebe como uma nota musical. As outras frequências, que vão ficando inaudíveis conforme a frequência aumenta e a energia da onda associada diminui, não são percebidas como notas distintas. O resultado da sobreposição desses harmônicos é o que dá o **timbre** característico da corda, se é de violão, de violino, de violoncelo etc.

Suponhamos, agora, que temos presilhas que podem fixar a corda em um ponto qualquer dela. Se fixarmos uma presilha (pode ser o dedo médio fortemente apoiado) no meio da corda e vibrarmos o pedaço (nesse caso, a metade) da corda à direita da presilha (ou do dedo médio), obtemos a oitava acima do som que obtemos quando tocamos a corda completamente solta (experimentem!). Assim, os harmônicos seguintes ao som da corda solta poderiam ser analogamente reproduzidos se a presilha (ou o dedo médio) fosse colocada em pontos que dividissem o braço do violão de tal modo que dedilhássemos as cordas nos segmentos que seguissem a sequência $1/2$, $2/3$, $3/4$, $4/5$, $5/6$ etc. Ao dedilhar a nota, em cada um desses casos, formaríamos uma onda solitária de forma análoga a cada um dos ventres formado no modo respectivo. A forma vai depender da força que eu dedilho a corda. O que é surpreendente (pelo menos, foi para mim antes de estudar a física do movimento oscilatório) é que a frequência fundamental não muda, não importa a força que você usa para dedilhar a corda (desde que não ultrapasse a elasticidade da corda, ou seja, desde que não a arrebente). Objetos que vibram de modo puro, como os copos de cristal, as flautas e os instrumentos de corda, produzem sons fundamentais de frequências específicas. Por exemplo, se você percute um copo de cristal, ele vai emitir um mesmo som fundamental, talvez mais intenso se você percuti-lo mais forte, mas ele emite **um** mesmo som fundamental.

Entretanto, parece que os gregos não se entusiasmaram pelo aspecto físico do som, interessaram-se mais pelos aspectos matemáticos envolvidos na geração de sons. Por

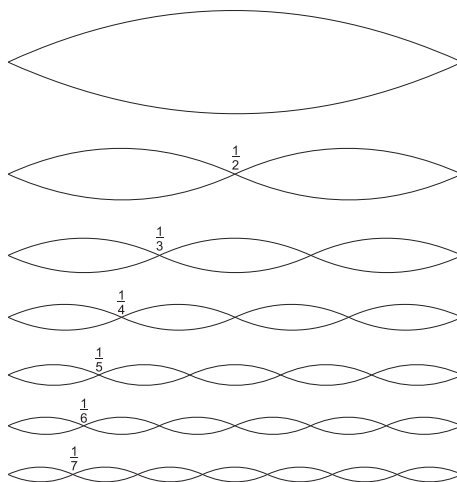


Figura 1: Harmônicos

exemplo, eles logo perceberam que sons, cujas frequências f_1 e f_2 estão relacionadas pela equação $f_2 = 2^k f_1$, em que k é inteiro, são equivalentes: f_2 é uma versão aguda de f_1 , se k for positivo, e dizemos que o som de frequência f_2 é k oitavas acima do som de frequência f_1 ; se k for negativo, f_2 é uma versão grave de f_1 , e dizemos que o som de frequência f_2 é k oitavas abaixo do som de frequência f_1 .

Não sabemos se eles pensavam em frequência, com certeza eles pensavam de forma semelhante, em divisões em potências de 2: o som produzido pela corda solta era uma versão mais grave do som produzido quando se dedilhava a corda com o dedo médio apoiado no meio da corda e, assim, por diante. Outra coisa monumental que eles observaram foi que a razão entre frequências (ou de comprimentos) é que caracteriza um intervalo sonoro. Vamos fazer um desenho de uma corda de extremidades R e S . Vamos dividir a corda em 3 pedaços iguais, em que o primeiro terço vai de R até R_1 , o segundo vai de R_1 até S_1 e o último, de S_1 a S . Chame de M o ponto que divide RS ao meio. Divida, agora, MS em 3 pedaços: o primeiro terço vai de M a R_2 , o segundo vai de R_2 a S_2 e o último, de S_2 a S . Pois bem, o som produzido pelo dedilhar do trecho da corda R_1S , com o dedo médio apoiado sobre R_1 , é uma versão mais grave do som produzido dedilhando-se R_2S , quando o dedo médio está apoiado sobre R_2 . Observe que $RS/R_1S = MS/R_2S = 3/2$ (ver figura 2).

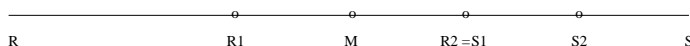


Figura 2: Intervalo sonoro e razão

Outra coisa que acharam significante foi o fato de que sons harmoniosos pudessem ser obtidos ao se dedilhar, simultaneamente, cordas dispostas segundo razões do tipo $(n+1)/n$, $n = 1, 2, 3$. Se fixarmos uma corda de comprimento igual a 1 m e fixarmos paralelamente a ela outras cordas de tamanho $3/4$ m, $2/3$ m e $1/2$ m, as razões entre o comprimento da primeira corda e os comprimentos das outras 3 cordas serão $4/3$, $3/2$ e $2/1$. Os gregos ficaram mesmerizados com o seguinte fato: se utilizarmos a corda de razão $4/3$ (ou seja, de tamanho $3/4$) como padrão e agora construirmos uma corda cujo tamanho seja $2/3$ dela, o resultado será uma corda de tamanho $1/2$ m. Nós, que estamos acostumados a multiplicar frações, achamos isso óbvio. Mas eles não estavam pensando em números, os elementos em jogo eram sons. Entre o som da corda maior e o som da corda $4/3$, que era mais agudo, havia um intervalo sonoro x ; entre o som da corda $4/3$ e o da corda $2/1$ havia um intervalo sonoro y . Os gregos entenderam que, na matemática do som, y era também o intervalo entre o som da corda maior e o som da corda $3/2$. Assim, a soma dos dois intervalos x e y era uma oitava e isso era demonstrado pelo produto das razões associadas aos sons:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{1}.$$

Suponhamos, agora, que eu queira dividir uma oitava em 12 intervalos sonoros iguais. Matematicamente falando, definindo $f_1 = f$, procuro frequências f_2, \dots, f_{12} tais que $f : f_2 : f_3 : \dots : f_{12} : 2f$, pois uma oitava está na razão $2:1$. Denotando $r = f_{i+1}/f_i$, $i = 1, \dots, 11$, qual o valor de r ? É essa razão r , $r = \sqrt[12]{2} \simeq 21/12$, que os fabricantes de instrumentos utilizam para que as 12 notas soem com intervalos consecutivos iguais, ditos *semitons*. Em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Metro>, vemos que ... *o metro é definido como sendo o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo, durante um intervalo de tempo de 1/299792458 de segundo.* ... *A adoção desta definição corresponde a fixar a velocidade da luz no vácuo em 299.792.458 m/s.* Em música, a nota padrão, a partir da qual todas são definidas, é a nota **lá**, do centro do piano, denotada por **A4**, que corresponde a uma frequência de 440 Hertz, ou seja, 440 ciclos por segundo. Um diapasão, que pode ser comprado em qualquer loja de instrumentos musicais, é uma forquilha de metal que é utilizada para afinar instrumentos (em inglês, *tuning fork*). Quando você percute o diapasão, ele emite um

som de 440 Hz, ou seja, um A4.

Na música ocidental, as 12 notas em cada oitava são: A (lá), Bb (si bemol), B (si), C (dó), C# (dó sustenido), D (ré), Eb (mi bemol), E (mi), F (fá), F# (fá sustenido), G (sol), Ab (lá bemol). Essa escala de notas é dita uma escala cromática. Os intervalos entre essas notas são classificados a seguir:

- Primeira justa ou uníssono: sem intervalos entre os dois sons.
- Segunda
 - menor: distância de um semitom entre os sons.
 - maior: distância de dois semitons entre os sons.
- Terça
 - menor: distância de três semitons entre os sons.
 - maior: distância de quatro semitons entre os sons.
- Quarta: distância de cinco semitons entre os sons.
 - Quarta aumentada ou quinta diminuta: distância de seis semitons entre os sons.
- Quinta: distância de sete semitons entre os sons.
- Sexta
 - menor: distância de oito semitons entre os sons.
 - maior: distância de nove semitons entre os sons.
- Sétima
 - menor: distância de dez semitons entre os sons.
 - maior: distância de onze semitons entre os sons.
- Oitava: distância de doze semitons entre os sons.

Por exemplo, o intervalo de A4 até E5, que é no sentido ascendente, é um intervalo de quinta, composto de 7 semitons: A4 Bb4 B4 C5 C#5 D5 Eb5 E5. Como a frequência de A4 é 440 Hz, a frequência de E5 será $440 \times (\sqrt[12]{2})^7$. Note que $(\sqrt[12]{2})^7 \simeq 1.4983$, que é próximo de 3/2.

No piano, se eu saio da nota lá mais grave do piano (A0, 27.5 Hz), eu chego, por uma escala de quintas, ao lá mais agudo (A7, 3520 Hz) - um intervalo de 7 oitavas:

A0 E1 B1 F#2 C#3 Ab3 Eb4 Bb4 F5 C6 G6 D7 A7.

Os gregos (na verdade, desde o início do texto, quando escrevo gregos me refiro aos discípulos de Pitágoras) construíram a escala dodecafônica de um modo diferente ao nosso modo artificial (o artifício, no caso, foi gerar intervalos sonoros iguais, a partir da razão $\sqrt[12]{2}$). A escala pitagórica foi bastante utilizada pelo ocidente até o início do século XIX (não se sabe qual temperamento Bach utilizou na sua célebre obra *O cravo bem temperado*, mas os historiadores afirmam que, certamente, não foi o temperamento em 12 intervalos iguais). Pitágoras utilizou para temperamento o processo de obtenção de quintas ditas pitagóricas, em que a razão entre as frequências é 3/2, e não $(\sqrt[12]{2})^7$. Por esse processo, a escala começando em A0 não chega a A7 e, sim, a uma nota muito próxima dela.

A seguir, veremos que há uma razão matemática para a música ocidental ter escolhido dividir uma oitava em 12 intervalos musicais. Essa razão poderia, no lugar de 12, ter levado a escolher 41, 53, 306, 665, 15601, ou outros números maiores de uma certa sequência que começa com esses números. O interesse pelo número de intervalos sonoros em uma oitava é muito antigo. Historiadores creditam a Ching Fang (78-37 AC), um teórico de música chinês, o cálculo da aproximação de 31 oitavas por uma série de 53 quintas pitagóricas. Em 1713, a escala de 53 notas em uma oitava foi confirmada como a escala oficial da China ([1]). Embora haja referências a antigos instrumentos chineses de sopro e de cordas que usavam esse temperamento, os instrumentos de corda conhecidos no ocidente, como o guzheng e os instrumentos qin (por exemplo, o guqin), são afinados e tocados no temperamento ocidental usual de 12 intervalos, pelo menos é o que eu sei até agora (se alguém tem informação desses instrumentos serem tocados no sistema de 53 notas, por favor, mande-me um e-mail). O inglês Robert Holford Macdowall Bosanquet idealizou um instrumento com um teclado nesse sistema, cujo protótipo foi construído em 1872-3 e está exposto ainda hoje no South Kensington Museum, em Londres. Recentemente, uma guitarra nesse sistema - a dinarra - foi inventada pelo uruguaio Eduardo Sábat-Garibaldi.

A sequência pitagórica de quintas

Vamos apresentar, a seguir, um modo de geração de sons que os gregos utilizaram - a escala pitagórica de quintas. Primeiramente, vamos dividir a corda PQ em 3 partes iguais, originando, assim, os pontos P_1 e Q_1 . Fixe P_1 e vibre a parte maior da corda, relativa a 2/3 da corda. O intervalo sonoro entre o som produzido com a corda livre e o

som produzido no trecho P_1Q , com a corda apertada em P_1 , é o que chamamos de um intervalo de quinta pitagórica. Observe que a razão entre a frequência de uma onda produzida no segmento P_1Q e a frequência de uma produzida em PQ é $3/2$. Vamos gerar, a seguir, uma sequência de quintas pitagóricas, chamada de escala pitagórica: divida P_1Q em 3 partes, originando os pontos P_2 e Q_2 . Conclui-se que P_2Q é $4/9$ de PQ . Novamente, o som produzido vibrando-se o trecho P_2Q , com o dedo apertando a corda em P_2 , corresponde a uma quinta exata do som emitido vibrando-se P_1Q .

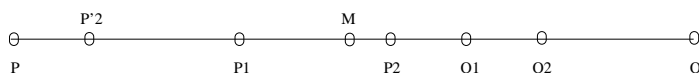


Figura 3: Quinta pitagórica

Observação: como $P_2Q < PQ/2$, o som produzido por P_2Q está em outro intervalo de oitava. Agora, $1/2 - 4/9 = 1/2 \cdot 1/9$. Ou seja, o som produzido por P_2Q corresponde a uma oitava acima do som produzido em P'_2Q , cujo comprimento é $8/9$. Ou seja, toda vez que o processo gerar um ponto à direita do ponto médio da corda, que gera um som uma oitava acima, pode-se sempre tomar um ponto correspondente ao som uma oitava abaixo. Isso é importante para o procedimento porque na divisão física por 3 o segmento de corda vai ficando cada vez menor, dificultando a geração de som. As 7 primeiras frequências relativas obtidas pelo procedimento grego são 1, $3/2$, $9/8$, $27/16$, $81/64$, $243/128$, $729/512$.

Se continuássemos esse processo sem nos preocuparmos em deslocar a nota de alguma oitava para outra, obteríamos a sequência de frações (a_k) , em que $a_k = 2^k/3^k$, que é a relação entre o tamanho de P_kQ e PQ . A razão entre a frequência da onda produzida em P_kQ e a frequência da onda produzida em PQ é, então, $3^k/2^k$. É claro que esse processo nunca levará a alguma oitava do som original, produzida quando dividimos a corda em potências de 2. O problema é: quando devemos parar esse processo infinito de obtenção de sons? Ou seja, quando k quintas serão aproximadamente n oitavas? Ou, matematicamente, quais os termos da sequência $3^k/2^k$ que estão *suficientemente* próximos de 2^n ? $3^k = 2^{k \log 3 / \log 2}$, em que \log é o logaritmo neperiano. A pergunta então se torna: para que valores de k o número $k(\log 3 / \log 2 - 1)$ fica próximo de um número inteiro n ?

Frações contínuas

Uma forma de expressar o número irracional $\log 3 / \log 2$ é através da sua representação em frações contínuas regulares. Uma **fração contínua regular** é uma fração contínua em que o numerador da parte não inteira é sempre igual a 1. Por exemplo, a fração contínua regular de $9/7$ é

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}.$$

Representamos então $9/7$ por $[1,3,2]$ (observe que $[1,3,3]=[1,3,2,1]$). Não é difícil mostrar que um número racional tem uma representação finita como uma fração contínua regular. A recíproca é obviamente verdadeira. Se exigirmos que a representação de um número racional, diferente de 1, não pode terminar em 1, essa representação é única.

Um teorema nos diz que dada a representação de um número irracional x em frações contínuas regulares, que é infinita, a seqüência de racionais resultantes dos truncamentos da fração contínua, que chamamos de **convergentes**, converge para x (ver [2], [4]). Por exemplo, a expansão em frações contínuas regulares de $\log 3 / \log 2$ é $[1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, \dots]$. Isto quer dizer que os convergentes da representação de $(\log 3 / \log 2 - 1)$, que é $[0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, \dots]$, serão aproximações para n/k , em que n é o número de oitavas e k é o número de quintas.

$$[0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, \dots] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

e a seqüência de seus convergentes é a seguinte:

$$\begin{aligned} [0] &= 0 \\ [0, 1] &= 0 + \frac{1}{1} = 1 \\ [0, 1, 1] &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2} \\ [0, 1, 1, 2] &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$[0, 1, 1, 2, 2] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{7}{12}$$

$$[0, 1, 1, 2, 2, 3] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}} = \frac{24}{41}$$

$$[0, 1, 1, 2, 2, 3, 1] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}}}} = \frac{31}{53}$$

etc. Os convergentes são aproximações bastante interessantes, como veremos no teorema a seguir, cuja demonstração pode ser acompanhada em [2] (Teorema 2).

Teorema 1 *Se x é um número irracional então todo convergente A_n/B_n de x é uma aproximação ótima de x , no sentido que*

$$\frac{a}{b} \neq \frac{A_n}{B_n} \text{ e } 0 < b \leq B_n \Rightarrow |B_n x - A_n| < |bx - a|.$$

Note que, se A_n/B_n é um convergente de x , então

$$B_n \left| x - \frac{A_n}{B_n} \right| < b \left| x - \frac{a}{b} \right|,$$

e isto implica que

$$\left| x - \frac{A_n}{B_n} \right| < \left| x - \frac{a}{b} \right|,$$

pois $0 < b \leq B_n$. Assim, para qualquer fração diferente de $7/12$ (que é o quinto convergente de $(\log 3 / \log 2 - 1)$), com denominador b entre 1 e 12, e com qualquer numerador a , temos que

$$\left| \left(\frac{\log 3}{\log 2} - 1 \right) - \frac{7}{12} \right| < \left| \left(\frac{\log 3}{\log 2} - 1 \right) - \frac{a}{b} \right|.$$

Vamos comparar, agora, as aproximações dadas pelos convergentes com os intervalos gerados pelos instrumentos de hoje em dia, que têm temperamento igual. O segundo convergente é $1/1$, ou seja, estaríamos aproximando a oitava de A0 a A1 pelo intervalo de quinta pitagórica de A0 a um som pouco mais agudo que E1 (lembrando

que $(\sqrt[12]{2})^7 < 3/2$. Essa aproximação é péssima. O terceiro convergente é $1/2$, ou seja, estaríamos aproximando o intervalo de A0 a A1 pelo intervalo de A0 a um som pouco mais agudo que B1 (de A0 a B1 são duas quintas normais: A0 E1 B1), que ainda é muito ruim. O quarto convergente é $3/5$, ou seja, o intervalo de A0 a A3 é aproximado pelo intervalo de A0 a um som entre Ab3 e A3 (A0 E1 B1 F#2 C#3 Ab3 são 5 quintas normais).

O quinto convergente significa aproximar 7 oitavas por 12 quintas pitagóricas. Veremos que, nesse caso, a estimativa para o intervalo entre A7 e a aproximação de A7 é muito razoável:

$$\frac{27.5 \times [(3/2)^{1/2}]^2}{27.5 \times (\sqrt[12]{2})^{12}} \simeq 1.0136 < (\sqrt[12]{2})^{1/4} = 0.0145.$$

Notemos que o intervalo é menor que $1/4$ de um semitom atual, que é um intervalo quase impossível de ser detectado pelo ouvido humano. Transladando as 12 quintas pitagóricas para um intervalo de uma oitava (veja observação acima), obtemos uma divisão de uma oitava em 12 partes desiguais - o temperamento pitagórico.

O sexto convergente implicaria em criarmos uma escala de 41 notas. Embora existam alguns teóricos de música que defendem esse temperamento, poucos se aventuraram pela composição nesse sistema. O pianista e engenheiro húngaro Paul von Jankó, que foi aluno do célebre compositor austríaco Anton Brückner, construiu em 1882 um piano com essa afinação, que está em exposição permanente no Gemeentemuseum, na cidade holandesa de Haia.

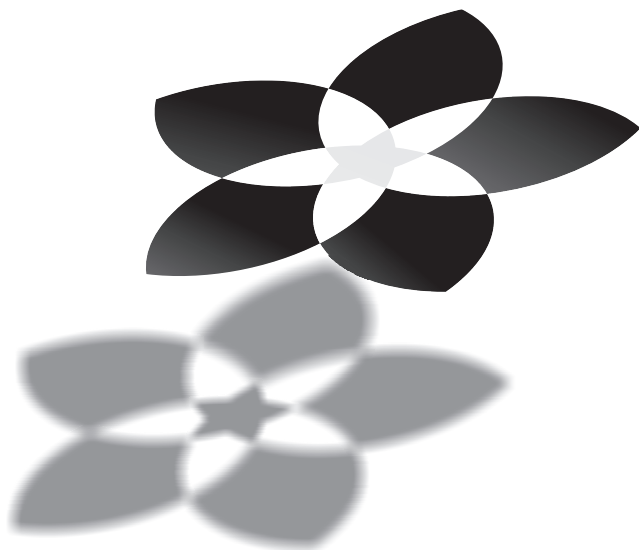
Finalmente, o sétimo convergente ($31/53$) é o que deu origem a um sistema bastante abrangente. A teoria musical turca moderna utiliza esse sistema, mais do ponto de vista teórico do que prático, pois tem que contemplar tanto a música tradicional turca, com seus diversos microtonalismos, como a música árabe, cujo sistema utiliza, predominantemente, 17 notas dentro de uma oitava.

A música do século XXI tem a seu dispor uma tecnologia de áudio que avança dia a dia a passos largos. O microtonalismo, que é como se chama a criação de música com escalas com mais de 12 notas por oitava, é uma escola de composição com muitos adeptos hoje em dia, que dispõem de diversos instrumentos, eletrônicos em sua maioria, para gerar sons com frequências especificadas pelo usuário. A matemática é uma ferramenta cotidiana para esses compositores. Por exemplo, há o problema de transcrição melódica nesses sistemas microtonais, que é resolvido a partir de operações com matrizes. Entre os compositores que utilizaram o sistema de 53 notas, destaca-se o americano Ben Johnston, nascido em 1926, que compôs música de câmara no sistema de 53 notas (por exemplo, os String Quartet No. 2 e No. 3). Em 2006, o ucrâ-

niano Mykhaylo Khramov lançou o cd Another Tuning, onde há composições para o teclado de 53 notas de Bosanquet (as músicas do CD estão disponíveis na rede). Há diversos outros sistemas microtonais, modernos e antigos. Entre os antigos, há o indiano, utilizado nas composições de ragas, com 22 notas. Há outras razões matemáticas, além de frações contínuas, para a adoção desses sistemas. Mas vamos ficar por aqui, pois precisaríamos de mais técnica de Teoria Musical para falar mais sobre isso (veja, por exemplo, [1]).

Referências

- [1] J. Murray Barbour; Tuning and temperament: a historical survey, Michigan State College Press, 1951.
- [2] C. G. Moreira; Frações contínuas, representações de números e aproximações. Disponível em <http://www.obm.org.br/eureka/artigos/fracoes.pdf>
- [3] Miguel Ratton; Escalas musicais - quando a matemática rege a música. Disponível em <http://www.music-center.com.br/escalas.htm>
- [4] A. M. Rockett e P. Szűsz; Continued Fractions, Singapore: World Scientific, 1992.
- [5] M. Schechter; Tempered Scales and Continued Fractions, American Mathematical Monthly 87 (1), 40-42, 1980.



Artigo

O Princípio da Indução e Aplicações

Paulo Ricardo Boff

Graduando em Matemática e Computação Científica da UFSC - Universidade
Federal de Santa Catarina
Florianópolis - SC

O Princípio da Indução e Aplicações

Algumas vezes em Matemática nos defrontamos com afirmações envolvendo os números naturais e a questão que surge é: será tal afirmação verdadeira sempre, ou seja, vale para qualquer número natural? E freqüentemente surge a tentação de se passar da observação de vários casos particulares para uma conclusão geral. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Se $n \in \mathbb{N}$, então $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Isto é o mesmo que dizer que se tem

$$1) \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2};$$

$$2) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3};$$

$$3) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4};$$

e assim sucessivamente. É fácil verificar que aquilo que se afirma no exemplo 1 é verdade para pequenos valores de $n \in \mathbb{N}$. Mas será que é sempre verdade?

Exemplo 2. Se $n \in \mathbb{N}$, então $n^2 + n + 41$ é primo.

Pode-se verificar facilmente que esta afirmação é verdadeira para valores pequenos de n . Se tomarmos n igual a 1, 2, 3, 4 ou 5, teremos $n^2 + n + 41$ igual a 43, 47, 53, 61 ou 71 respectivamente, que são números primos. Agora, isso continuará a ocorrer à medida que n cresce?

Exemplo 3. Qualquer número natural par maior do que 2 pode ser escrito como soma de dois primos.

Novamente é facilmente verificável que esta afirmação é verdadeira para valores pequenos de n ($4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$,...), mas continuará verdadeira para qualquer valor de n ?

Estes três exemplos podem ser vistos como afirmações que pretendem ser válidas para todos os números naturais. Entretanto, a pergunta que fica é: serão afirmações verdadeiras ou falsas?

Vamos analisar esses exemplos um a um:

Exemplo 1

Neste caso a afirmação é verdadeira. Basta notar que, independentemente do valor de n , tem-se

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

logo,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \\ & = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Utilizando a lei associativa da adição e cancelando todos os termos que podem ser cancelados, resta apenas

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Exemplo 2

Neste exemplo, a afirmação é falsa. Para $n = 1, 2, 3, 4, \dots, 40$, temos que $n^2 + n + 41$ é primo. Porém, para $n = 41$, temos que $41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$, que não é número primo.

Exemplo 3

Neste caso, não sabe-se se a afirmação é verdadeira ou falsa. Até o momento não foi descoberto nenhum número inteiro par maior que 2 que não possa ser escrito como soma de dois números primos. Este problema é conhecido por *Conjectura de Goldbach*⁴.

Até agora, podemos perceber que, para solucionarmos problemas desta natureza, não basta testarmos a veracidade da afirmação em questão substituindo valores específicos para n pois, mesmo que a afirmação ganhe credibilidade, nunca poderemos estar garantindo sua validade para algum valor de n que não tenha sido testado.

Para solucionarmos, rigorosamente, problemas dessa espécie, introduziremos o conceito de indução. O termo “indução” tem origem na Filosofia. No *Dicionário de Filosofia* de Simon Blackburn⁵, indução tem o seguinte significado:

Indução: termo usado sobretudo para designar qualquer processo de raciocínio que nos conduza de premissas empíricas a conclusões empíricas, que, apesar de apoiadas pelas premissas, não são dedutivamente deriváveis delas.

Assim, induzir é passar de algum conjunto de hipóteses para uma conclusão que é compatível com essas hipóteses mas não pode ser deduzida delas.

Enunciaremos os *Axiomas de Peano*⁶ e daremos ênfase a um destes axiomas, conhecido como *Axioma da indução*. Veremos o Primeiro Princípio da Indução e

⁴Christian Goldbach (1690 - 1764)

⁵Simon Blackburn é Professor de Filosofia na Universidade de Cambridge e um dos mais reputados filósofos contemporâneos.

⁶O matemático *Giussepe Peano* (1858-1932) constatou que se pode elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, conhecidos atualmente como os *axiomas de Peano*.

mostraremos sua equivalência com o Princípio da Boa Ordenação no âmbito do conjunto dos números naturais. Por fim, mostraremos alguns exemplos e aplicações.

Axiomas de Peano

Antes de enunciarmos os axiomas, deixemos claro que um axioma é uma sentença que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia, ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Na matemática, um axioma pode ser visto como uma hipótese inicial da qual outros enunciados são logicamente derivados.

Axioma 1. Existe a função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$ chamada sucessor de n ;

Axioma 2. Existe um único elemento $1 \in \mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

Axioma 3. A função s é injetiva;

Axioma 4. Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in \mathbb{N}$ e para todo $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Para entendermos melhor o significado destes axiomas vamos reescrevê-los numa linguagem menos técnica.

Axioma 1. Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.

Axioma 2. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de “um”.

Axioma 3. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. (Ou ainda: números que têm o mesmo sucessor são iguais.)

Axioma 4. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com \mathbb{N} , isto é, contém todos os números naturais.

Dessa forma, podemos dizer que o conjunto \mathbb{N} dos números naturais é formado pelo 1, pelo sucessor de 1 (representado pelo símbolo 2 e chamado de “dois”), pelo sucessor de 2 (representado pelo símbolo 3 e chamado de “três”), etc.

Desses axiomas, o que possui redação certamente mais elaborada que os demais é o axioma 4, denominado *Axioma da Indução*. O papel fundamental do Axioma da Indução na teoria dos números naturais resulta do fato de que ele pode ser visto como um método de demonstração, que explicaremos a seguir.

Não é nosso objetivo construir operações e relações de maneira formal. Basta observar que $n + 1 = s(n)$ e $n - 1$ é um número natural tal que $s(n - 1) = n$. Ainda, temos uma relação de ordem em \mathbb{N} da seguinte maneira: dados $n, m \in \mathbb{N}$, n é dito ser menor ou igual a m ($n \leq m$) se, e somente se existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n + x = m$.

Agora vamos definir dois conceitos que utilizaremos para provar que o Princípio da Indução é verdadeiro.

Definição 1 *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não-vazio de \mathbb{N} . Dizemos que $n_0 \in X$ é elemento mínimo de X quando n_0 é menor ou igual a n , para todo $n \in X$.*

Definição 2 (Princípio da Boa Ordenação) *Todo subconjunto não-vazio de \mathbb{N} possui elemento mínimo.*

O Princípio da Boa Ordenação e o Princípio da Indução são afirmações totalmente equivalentes dentro do âmbito dos números naturais. No sentido de que, se assumirmos a validade de um deles o outro resultará como consequência. Na demonstração do teorema 1 vamos supor válido o Princípio da Boa Ordenação; já para provar o teorema 2 admitiremos válido o Princípio da Indução.

Teorema 1 (Primeiro Princípio da Indução⁷) *Suponha que o Princípio da Boa Ordenação valha para \mathbb{N} e que para um subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{N}$ valham:*

(i) $1 \in X$;

(ii) $n \in X$ implica em $n + 1 \in X$.

Então, $X = \mathbb{N}$.

⁷Existe obviamente o Segundo Princípio da Indução, porém não trataremos dele aqui.

Prova Suponhamos, por contradição, que $X \neq \mathbb{N}$. Então $\mathbb{N} - X \neq \emptyset$, o que pelo Princípio da Boa Ordenação, implica a existência de um mínimo a para $\mathbb{N} - X$. Como, por hipótese, $1 \in X$, temos que 1 não está em $\mathbb{N} - X$, logo $a \neq 1$. Dessa forma, existe $a - 1$ que está em X pois, caso contrário, a minimalidade de a seria quebrada. Porém, por hipótese, $(a - 1) + 1 = a \in X$, o que é um absurdo. Portanto, não pode ocorrer $X \neq \mathbb{N}$, logo $X = \mathbb{N}$. □

Teorema 2(Princípio da Boa Ordenação) *Suponha que o Princípio da Indução valha para \mathbb{N} . Então, todo subconjunto não-vazio de \mathbb{N} possui elemento mínimo.*

Prova Sejam X um subconjunto não-vazio de \mathbb{N} e Y o conjunto dos números naturais que são menores ou iguais a todos os elementos de X , isto é,

$$Y = \{y \in \mathbb{N} | y \leq x, \forall x \in X\}.$$

Primeiramente, observemos que $Y \neq \emptyset$, pois $1 \in Y$. Agora, como $Y \neq \mathbb{N}$, utilizaremos a contrapositiva do Princípio da Indução para continuar. Assim, teremos que 1 não está em Y ou que existe b em Y tal que $b + 1$ não está em Y . A primeira possibilidade é falsa; portanto, existe o tal b . Desta maneira:

(i) $b \leq x$ para todo $x \in X$. O que é óbvio, desde que $b \in Y$.

(ii) $b \in X$. Pois, supondo que b não está em X teremos que $b < x$, para qualquer $x \in X$. No entanto, isso implica que $b + 1 \leq x$, para todo $x \in X$, ou seja, $b + 1 \in Y$ (absurdo).

Portanto, b é o elemento mínimo de X . □

O Princípio da Indução, intuitivamente, nos garante que se tivermos um conjunto de, por exemplo, peças de dominó dispostas verticalmente, de tal modo que quando uma cai, a seguinte cai - e sendo dado que a primeira cai - concluímos que todas caem. Evidentemente, não importa quantas peças tenhamos em nosso conjunto. Provar a veracidade de uma dada afirmação, utilizando o Princípio da Indução, significa, em

comparação à situação das peças do dominó, mostrar que todas as peças caem. Para tanto, pelo Teorema 1, basta mostrar que a primeira cai e que, quando uma qualquer cai, a seguinte cai.

Vejamos como fazer isto no caso do exemplo 1.

Para $n = 1$ temos que,

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1 \times 2},$$

que é claramente verdadeira;

Agora, seja k um número natural qualquer. Queremos provar que se

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1} \quad (1)$$

for verdade, isto é, se assumirmos (1) como hipótese, então

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

é verdade.

De fato, assumindo (1)

$$\begin{aligned} & \overbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)}}^{\frac{k}{k+1}} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{1}{k+1} \left(k + \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{k+1} \left(\frac{k^2 + 2k + 1}{k+2} \right) = \frac{(k+1)^2}{k+2} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 4. Se $n \in \mathbb{N}$, então $n^3 - n$ é múltiplo de 3.

Primeiro analisemos o caso $n = 1$.

Quando $n = 1$, obviamente $1^3 - 1 = 0$ é um múltiplo de 3.

Seja, então, $k \in \mathbb{N}$ e suponha que $k^3 - k$ é um múltiplo de 3 (hipótese de indução). Queremos provar, portanto, que $(k + 1)^3 - (k + 1)$ também é um múltiplo de 3. Mas

$$(k + 1)^3 - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 - k + 3(k^2 + k).$$

Então $(k + 1)^3 - (k + 1)$ é a soma de $k^3 - k$, que por hipótese é um múltiplo de 3, com $3(k^2 + k)$, que também é múltiplo de 3. Logo, $(k + 1)^3 - (k + 1)$ é múltiplo de 3.

Assim, podemos afirmar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ é múltiplo de 3.

Exemplo 5. Se $n \in \mathbb{N}$, então

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \quad (2)$$

Quando $n = 1$, $1 = 1^2$, coisa que não oferece dúvidas.

Tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$. Precisamos mostrar, então, que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2. \quad (3)$$

Mas a soma das primeiras k parcelas do membro à esquerda da igualdade (3) é, por hipótese, igual a k^2 . Logo,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que a igualdade (2) é verdadeira.

Dessa forma, podemos perceber que o Princípio da Indução é uma ferramenta de grande utilidade na demonstração de proposições envolvendo o conjunto dos números naturais. Poderíamos nos perguntar se o conceito de indução também poderia ser aplicado ao conjunto \mathbb{Q} dos números racionais, ou até mesmo ao conjunto \mathbb{R} dos números reais. Mostraremos, por fim, um exemplo que nos permite verificar que não se pode usar o Princípio da Indução para se demonstrar propriedades relativas a \mathbb{Q} ou \mathbb{R} .

Exemplo 6. Se $x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, então $\sin(x\pi) = 0$

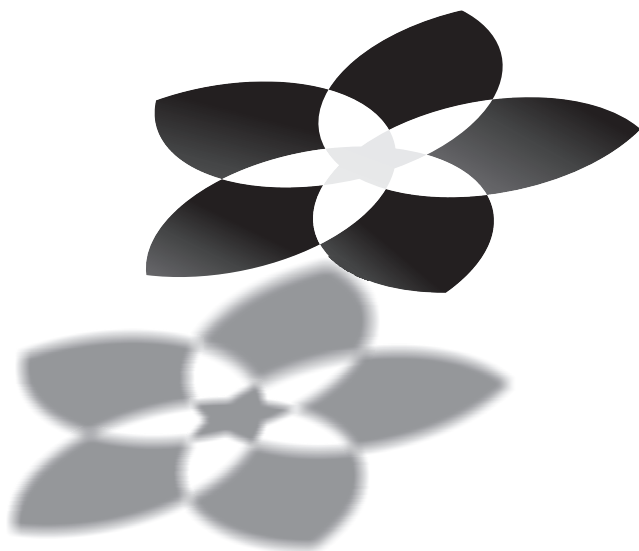
Se $n = 1$, temos que $\sin(1 \cdot \pi) = 0$

Seja $k \in \mathbb{Q}$ tal que $\sin(k\pi) = 0$, então $\sin((k+1)\pi) = \sin(k\pi)\cos(\pi) + \cos(k\pi)\sin(\pi) = 0$.

Mas, no entanto, a proposição não é verdadeira. Uma vez que x pode assumir valores racionais, o enunciado é falso, por exemplo, para $x = \frac{1}{2}$.

Referências

[1] Elon Lages Lima. Princípio da Indução. Olimpíada Brasileira de Matemática. Revista Eureka nº3(1998)



Artigo

Uma fórmula para a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$

Helena Martins ⁸ e Dr. João Luiz Martins ⁹

helenam@pet.mtm.ufsc.br

jmartins@reitoria.ufop.br

Uma fórmula para a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$

A **Sequência de Fibonacci**, $\{F_n\}_{n=0}^{+\infty}$ com $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 2$, foi idealizada primeiramente por Leonardo de Pisa (1200 d.C.), também conhecido como Fibonacci. Tudo indica que esta sequência teve origem a partir da observação do crescimento de uma população de coelhos. Os números da sequência representavam os casais em uma população de coelhos depois de n meses, supondo apenas algumas condições, como o fato de no primeiro mês nascerem apenas um casal.

Apesar do simples aspecto lúdico previsto originalmente nos trabalhos de Leonardo de Pisa, por ocasião do aparecimento da sequência de Fibonacci, a sua combinação com outras funções ou estruturas matemáticas produzindo funções geradoras tem sido objeto de muitas investigações.

A série

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k F_n x^n \quad (4)$$

é chamada de Fibonacci-Geométrica. Este trabalho é destinado a análise da convergência da série Fibonacci-Geométrica no caso em que $k = 0$, ou seja:

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \quad (5)$$

⁸Graduanda do curso de Matemática Licenciatura (UFSC) e bolsista do PET

⁹Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Apresentaremos primeiramente seu domínio e especificaremos uma fórmula fechada para a sua soma.

1. Sobre a convergência da sequência $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$

É fácil perceber que a sequência de Fibonacci (F_n) diverge, pois é uma sequência crescente e ilimitada. O fato importante é que a sequência $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ converge e converge para um famoso e enigmático número da matemática. Para demonstrarmos isto necessitaremos dos seguintes resultados auxiliares:

Lema 1.1. Para todo natural n vale a identidade $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Prova. Vamos fazer a prova por indução. De fato, para $n = 1$ temos que

$$F_1F_3 - F_2^2 = 1 \cdot 2 - 1^2 = 1 = 1^2.$$

Suponha que a identidade valha para um $n = k$. Agora,

$$\begin{aligned} F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_k(F_{k+1} + F_k) - F_{k+1}(F_k + F_{k-1}) \\ &= F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1} = -1(F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2) = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Logo a identidade vale para $n = k + 1$. Portanto, pelo princípio da indução a identidade vale para todo n natural.

Lema 1.2. (*Método das aproximações sucessivas*) Seja $0 \leq \lambda < 1$. Suponhamos que uma sequência (x_n) seja tal que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda|x_{n+1} - x_n|$ para todo natural n . Então (x_n) converge.

Prova. De fato, $|x_3 - x_2| \leq \lambda|x_2 - x_1|$, $|x_4 - x_3| \leq \lambda|x_3 - x_2|$, e, em geral, $|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^{n-1}|x_2 - x_1|$, para todo n . Segue-se que para n, p arbitrários, temos sucessivamente

$$\begin{aligned}
 |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\
 &\leq (\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-3} + \dots + \lambda^{n-1})|x_2 - x_1| \\
 &= \lambda^{n-1}(\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2} + \dots + \lambda + 1)|x_2 - x_1| \\
 &= \lambda^{n-1} \left(\frac{1 - \lambda^p}{1 - \lambda} \right) |x_2 - x_1| \leq \frac{\lambda^{n-1}}{1 - \lambda} |x_2 - x_1|.
 \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{1 - \lambda} |x_2 - x_1| = 0$, segue-se que, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{\lambda^{n-1}}{1 - \lambda} |x_2 - x_1| < \varepsilon.$$

Daí resulta que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$ (pois podemos sempre supor que $m \geq n$ e escrever $m = n + p$). Portanto a sequência (x_n) é de Cauchy e logo converge.

Estamos agora em condições de apresentar o seguinte resultado:

Teorema 1.3. A sequência $(x_n) = \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right)$ é convergente e converge para o número áureo (número de ouro) $\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

Prova. Lembrando o Lema 1.1 temos sucessivamente que

$$\begin{aligned}
 |x_{n+1} - x_n| &= \left| \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} \right| \\
 &= \left| \frac{F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2}{F_{n+1} F_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{F_{n+1} F_n} \right|.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{F_{n+1}F_n}.$$

De modo análogo,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{F_{n+2}F_{n+1}}.$$

Segue-se de (1.1) e (1.2) que

$$\left| \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \right| = \frac{F_n}{F_{n+2}} < \frac{1}{2}.$$

Portanto, pelo Lema 1.2 concluímos que a sequência converge. Vamos agora calcular seu limite. De fato,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}.$$

Portanto,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}.$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow +\infty$ na igualdade acima obtemos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

É fácil ver que o limite da sequência $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ é a solução positiva da equação acima, isto é, $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Como vimos na introdução, a sequência de Fibonacci é definida de forma recursiva, isto é, são dadas duas “condições iniciais” $F_1 = 0$ e $F_2 = 1$ e a partir do terceiro termo existe uma lei de formação que diz que cada termo é a soma dos dois anteriores. Sequências recursivas estão intimamente ligadas com as chamadas equações de

diferenças que por sua vez estão relacionadas com as equações diferenciais. Grosso modo podemos resolver a equação $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ como se fosse uma equação diferencial linear de 2a. ordem, associando-a ao polinômio

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ e tentando escrever a sequência como uma combinação linear de potências das raízes λ_1 e λ_2 do polinômio $P(\lambda)$:

$$F_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n.$$

As constantes c_1 e c_2 são calculadas a partir das condições iniciais F_1 e F_2 . Vamos tentar então achar uma forma analítica para F_n . Primeiro precisamos achar as raízes de $P(\lambda)$. É fácil verificar que tais raízes são $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\bar{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Logo

$$F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para encontrar c_1 e c_2 basta fazer $n = 0$ e $n = 1$ na equação acima e utilizar as condições iniciais $F_1 = 0$ e $F_2 = 1$. Neste caso obtemos um sistema de equações para c_1 e c_2 na seguinte forma:

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 = 1,$$

cuja solução é $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Portanto podemos escrever

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \phi^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \bar{\phi}^n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Notemos que, como $\left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| < 1$, então, para n “grande” podemos tomar a aproximação

$$F_n \approx \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (6)$$

2. Sobre a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n$

Vamos analisar a convergência da série

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n,$$

isto é, vamos encontrar os valores de x para os quais a série converge. Para isto utilizaremos o critério da razão. De fato, se $a_n = F_n x^n$ então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{F_{n+1} x^{n+1}}{F_n x^n} \right| = \frac{F_{n+1}}{F_n} |x|.$$

Logo, lembrando que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$, em que $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é o número áureo, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \phi |x|$$

Portanto, pelo critério da razão, a série (2) converge se $|x| < \frac{1}{\phi}$ e diverge se $|x| > \frac{1}{\phi}$, em que $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. O caso em que $|x| = \frac{1}{\phi}$ deve ser analisado separadamente. De fato, se $x = \frac{1}{\phi}$ então a série fica sendo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} F_n \left(\frac{1}{\phi} \right)^n,$$

e lembrando (3) temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \phi^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \bar{\phi}^n \right) \left(\frac{1}{\phi} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{5}}{5} \left(1 - \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Como $\left| \frac{\bar{\phi}}{\phi} \right| < 1$ é fácil ver que o termo geral da série tende a infinito e pelo critério do termo geral a série diverge. De modo análogo, se $x = -\frac{1}{\phi}$ então obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{5}}{5} \left(1 - \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right)^n \right) (-1)^n,$$

e também é fácil verificar que o limite do termo geral não existe e portanto a série diverge. Concluimos então que a série só converge para $|x| < \frac{1}{\phi}$ e daqui por diante vamos supor que x está neste intervalo.

3. Cálculo da soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n$

1º. modo. Usando o fato de que $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ temos sucessivamente que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^n \\ &= x + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n + x \sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n. \end{aligned}$$

Logo $S_0(x)(1 - x - x^2) = x$, isto é,

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

2º. modo. Podemos obter a soma de modo análogo ao caso da série geométrica obtendo uma fórmula para a soma parcial e depois tomando o limite quando n vai para infinito:

$$S_0^n(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots + F_{n-2}x^{n-2} + F_{n-1}x^{n-1} + F_n x^n.$$

Multiplicando a equação acima por $-x$ obtemos

$$\begin{aligned} -xS_0^n(x) &= -x^2 - x^3 - 2x^4 - 3x^5 - 5x^6 - \dots \\ &\dots - F_{n-2}x^{n-1} - F_{n-1}x^n - F_nx^{n+1}. \end{aligned}$$

Multiplicando novamente por $-x$ obtemos

$$\begin{aligned} -x^2S_0^n(x) &= -x^3 - x^4 - 2x^5 - 3x^6 - 5x^7 - \dots \\ &\dots - F_{n-2}x^n - F_{n-1}x^{n+1} - F_nx^{n+2}. \end{aligned}$$

Agora, somando as equações acima e sempre lembrando que $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ obtemos

$$S_0^n(x)(1 - x - x^2) = x - F_nx^{n+1} - F_{n-1}x^{n+1} - F_nx^{n+2},$$

isto é,

$$S_0^n(x) = \frac{x - F_nx^{n+1} - F_{n-1}x^{n+1} - F_nx^{n+2}}{(1 - x - x^2)},$$

o qual é a soma da *Progressão de Fibonacci*. Fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (2.6) e lembrando que $F_nx^n \rightarrow 0$ pois (2.1) converge, concluímos que

$$S_0(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_0^n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_nx^n = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Teorema 3.1.

$$\sum_{n=r}^{\infty} F_nx^n = \frac{F_rx^r + F_{r-1}x^{r+1}}{1 - x - x^2} \quad (7)$$

Demonstração. Vamos demonstrar a identidade acima através do princípio da indução finita. De fato, para $r = 1$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{F_1 x^1 + F_0 x^2}{1 - x - x^2} = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

o que é verdadeiro conforme vimos anteriormente. Suponha agora que (4) seja válida para $r = k$ e vamos mostrar que esta identidade também é válida para $r = k + 1$. De fato,

$$\sum_{n=k}^{\infty} F_n x^n = F_k x^k + \sum_{n=k+1}^{\infty} F_n x^n,$$

ou seja,

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} F_n x^n = \frac{F_k x^k + F_{k-1} x^{k+1}}{1 - x - x^2} - F_k x^k.$$

É fácil verificar, após algumas manipulações algébricas, que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} F_n x^n = \frac{F_{k+1} x^{k+1} + F_k x^{k+2}}{1 - x - x^2},$$

e desta forma, pelo princípio da indução finita concluímos que (4) verdadeira para todo r natural.

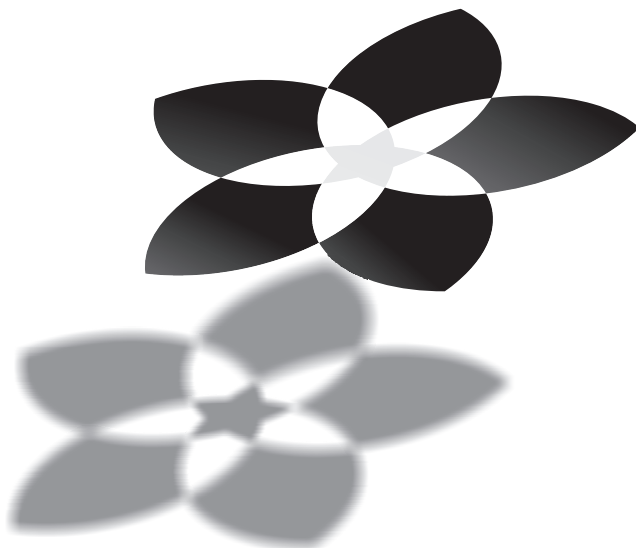
4. Considerações Finais

A busca pela soma de séries sempre foi um desafio para os matemáticos, desde a época da construção das ciências exatas, quando figuravam Leibniz, os membros da família Bernoulli, Euler e tantos outros. O presente trabalho apresenta uma maneira engenhosa para o estabelecimento de uma fórmula recursiva para soma da série Fibonacci-Geométrica, porém, deixa aberto uma quantidade de possibilidades de obtenção de fórmulas fechadas para soma de séries em que os coeficientes sejam sequências semelhantes. Outras idéias podem ser trabalhadas facilmente com as sequências generalizadas, principalmente, as de Pell, Tribonacci e Tetraonacci. Além do caráter lúdico da sequência de Fibonacci, ou de outras similares, da forma engenhosa de obtenção da fórmula fechada (recursiva) para soma da série apresentada neste trabalho, um outro aspecto muito relevante enaltece esta idéia, que é a maneira otimizada de obtenção de somas de séries, sem o uso de derivadas sucessivas. Na verdade, o processo de obtenção da soma de série pelas derivadas sucessivas é caro e envolve cálculos enfadonhos. Porém, o estabelecimento de uma fórmula recursiva em que a obtenção dos resultados sejam especificados através de somas é computacionalmente mais barato e mais eficaz. Respeitadas as devidas proporções é possível juntar no desenvolvimento destas idéias inseridas no presente trabalho algo muito interessante sobre as competências da pesquisa: o resgate histórico a partir de situações da vida real (sequência de Fibonacci e outras), o cuidado com o rigor matemático, as estratégias engenhosas das fórmulas recursivas e as implementações numéricas (otimizadas) auxiliando na obtenção de somas de séries especiais.

Referências

- [1] R. C. Bassanezi e W. C. Ferreira, Equações Diferenciais com Aplicações, Editora Harbra Ltda, 1988.
- [2] R. A. Dunlap, The Golden Ration and Fibonacci Numbers, World Scientific, 1997.
- [3] P. Filipponi, Evaluation of Certain Infinites Series Involving Terms of Generalized Sequences. The Fibonacci Quarterly 38.4 (2000): 310-316.

-
- [4] K. Knopp, Theory and Application of Infinite Series, Dover Publications Inc, New York, 1990.
 - [5] E. L. Lima, Curso de Análise, IMPA (Projeto Euclides), 1976.
 - [6] J.L. Martins e A. J . V. Brandão, Fórmula de recorrência para a soma de séries infinitas, Lecturas Matemáticas, 2004.



Artigo

Isometrias no Plano

Viviam Giacomelli Pedroso¹⁰

viviam.giacomelli@gmail.com

Isometrias no Plano

A computação gráfica faz parte de nossas vidas há algum tempo. Você assiste filmes de animação, acessa a internet e navega num site com figuras animadas, entre outros. Mas como é possível fazer com que esse processo de animação pareça tão real?

Primeiramente, para fazer as figuras é necessário usar pequenos polígonos, em geral, triângulos tão pequenos que quando vemos o objeto final, não conseguimos vê-los, enxergamos apenas uma superfície suave.

No processo de animação em si, para movimentar o objeto, basta saber como movimentar os polígonos que o formam. E essa tarefa de manipular e transformar os objetos podemos atribuir à geometria. Mas como a geometria faz isso?

Os desenhos animados de antigamente são feitos utilizando uma sequência de quadros que passados com um pouco de velocidade geram a ilusão de movimento. Para automatizar esse processo, o computador precisa ser capaz de automaticamente atualizar a posição dos polígonos em movimento a cada quadro. Em termos práticos, o computador precisa de uma fórmula para computar a nova localização de cada vértice, pois o polígono é formado a partir da ligação de vértices feita por segmentos. É preciso um tipo especial de função que tira o ponto de suas coordenadas originais e leva-o para novas coordenadas. Matematicamente, tais funções são chamadas de **transformações**. Mas existem transformações especialmente úteis, chamadas **isometrias**¹¹, que não causam distorções de formas e tamanhos.

Idealmente para seu auxílio, um animador deve ter uma lista completa de isometrias e suas fórmulas à sua disposição (mais provavelmente construída em software). Filmes como Toy Story apresentam cenas produzidas a partir desse processo.

¹⁰Graduanda do curso de Matemática Licenciatura UFSC.

¹¹Palavra que vem do grego; *ison* = igual e *metron* = medida.

Além disso, as isometrias geram padrões de repetição que estão presentes na arte de variadas culturas, como a islâmica. Como não podem fazer uso de figuras humanas em manifestações artísticas, os árabes desenvolveram a arte abstrata das figuras simétricas.

Artistas como M. C. Escher¹² também fizeram uso das isometrias. Inspirado na arte islâmica que conheceu no palácio de Alhambra, criou gravuras mundialmente conhecidas. Tais gravuras eram elaboradas a partir de preenchimento regular do plano utilizando como unidade figuras de lagartos, anjos, pássaros, entre outros. Mas Escher não se contentou em fazer seus desenhos por tentativa e erro, ele procurou estudar matematicamente esses padrões para entender como funciona o preenchimento do plano que tanto o fascinava.



Nesse artigo, através da Geometria, faremos um estudo das isometrias em \mathbb{R}^2 para entender melhor seu funcionamento e sua classificação.

Definição 1 Uma isometria em \mathbb{R}^2 é uma bijeção $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva distâncias. Isto significa que, para quaisquer pontos $X, Y \in \mathbb{R}^2$, pondo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, tem-se $d(X', Y') = d(X, Y)$.

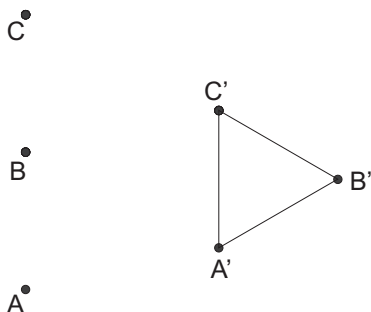
Teorema 2 Uma isometria preserva colinearidade e ordenação dos pontos.

Demonstração: Primeiramente, provaremos que a colinearidade é preservada. Sejam A, B, C pontos colineares e A', B', C' suas respectivas imagens pela isometria T . Anotaremos $A * B * C$ para indicar que B está entre A e C , isto é, para indicar a ordenação dos pontos.

Suponha que A', B' e C' não são colineares. Assim, esses pontos determinam um triângulo e, pela desigualdade triangular,

$$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} > \overline{A'C'}. \quad (\text{I})$$

¹²Maurits Cornelis Escher (1898-1972) é um dos artistas gráficos mais famosos do mundo. Ficou conhecido por suas obras de preenchimento regular dos planos e pelas gravuras impossíveis que produziu.



Pelo fato de A , B e C serem colineares e $A * B * C$ (os outros dois casos são análogos), temos que

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \quad (\text{II})$$

Como uma isometria preserva distâncias, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$. Por substituição,

$$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}, \quad (\text{III})$$

o que contradiz (I). Então A' , B' e C' são colineares.

Para provar que a ordenação dos pontos é preservada, devemos mostrar que B' está entre A' e C' .

Suponha que B' não está entre A' e C' . Então, pelo fato de preservar colinearidade, ou A' está entre os outros dois pontos ou C' está entre eles.

Se $B' * A' * C'$, então

$$\overline{A'B'} + \overline{A'C'} = \overline{B'C'}. \quad (\text{IV})$$

Como $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$ por (III),

$$\overline{A'B'} + (\overline{A'B'} + \overline{B'C'}) = \overline{B'C'}.$$

Assim,

$$2\overline{A'B'} = 0,$$

$$\overline{A'B'} = 0.$$

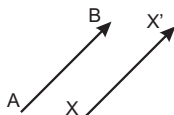
Isso contradiz o fato da distância entre dois pontos distintos ser um número positivo.

O caso $B' * C' * A'$ pode ser eliminado da mesma maneira, e então a demonstração está completa. ■

Translação

O caso mais óbvio de isometria é chamado translação: é como se apenas “puxássemos” um objeto ao longo de uma reta.

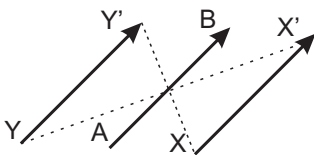
Definição 2 Sejam $A, B \in \mathbb{R}^2$ pontos distintos. A translação por $v = \overrightarrow{AB}$, $T_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, é a aplicação que faz corresponder a cada ponto $X \in \mathbb{R}^2$ o ponto $X' \in \mathbb{R}^2$ em que $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$ ¹³, ou seja, $d(X, X') = d(A, B)$, o segmento XX' é paralelo ao segmento AB e o sentido de percurso $X \rightarrow X'$ coincide com o sentido $A \rightarrow B$.



Proposição 1 Toda translação em \mathbb{R}^2 é uma isometria.

Demonstração: Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $T_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma translação por v . Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^2$ com $X' = T_v(X)$ e $Y' = T_v(Y)$.

Pela igualdade de vetores $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{YY'}$, temos que XX' e YY' são paralelos e têm a mesma medida. Seja XY' o segmento transversal a XX' e a YY' . Assim, $\widehat{X'XY'}$ e $\widehat{XY'Y}$ são alternos internos. Logo, $\widehat{X'XY'} = \widehat{XY'Y}$. Temos também que, XY' é o lado comum aos triângulos $X'XY'$ e $XY'Y$. Logo, há o caso lado-ângulo-lado de congruência. Assim, $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ o que implica em $d(X, Y) = d(X', Y')$, como queríamos. ■



Exemplo de translação: o movimento que o elevador faz ao partir de um andar para outro.

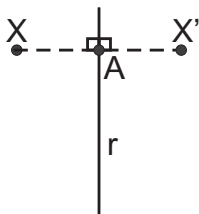
¹³Segmentos orientados, com origens em pontos diferentes, podem representar o mesmo vetor, basta possuírem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Reflexão em torno de uma reta

Definição 3 Seja $r \subset \mathbb{R}^2$ uma reta. A reflexão em torno de r é a aplicação $R_r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que associa a cada ponto $X \in \mathbb{R}^2$ o seu simétrico X' em relação a r em \mathbb{R}^2 , isto é:

(i) se $X \in r$, então $X = X'$;

(ii) se $X \notin r$, então r é a reta mediatriz do segmento XX' . Logo, XX' é perpendicular a r e, sendo A o ponto de intersecção do segmento XX' com a reta r , temos $d(X,A) = d(A,X')$.

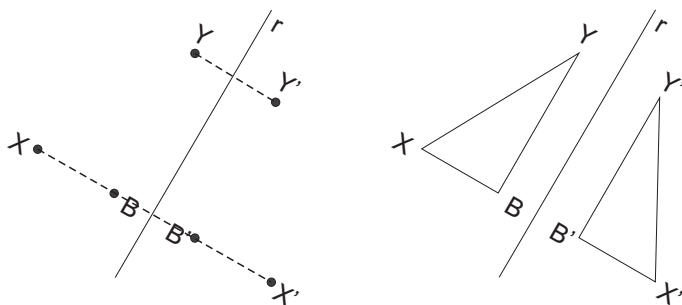


Proposição 2 Toda reflexão em \mathbb{R}^2 é uma isometria.

Demonstração: Seja $R_r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma reflexão em torno de uma reta $r \subset \mathbb{R}^2$. Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^2$ com $X' = R_r(X)$ e $Y' = R_r(Y)$. Queremos provar que $d(X, Y) = d(X', Y')$, mas para isso temos que analisar dois casos:

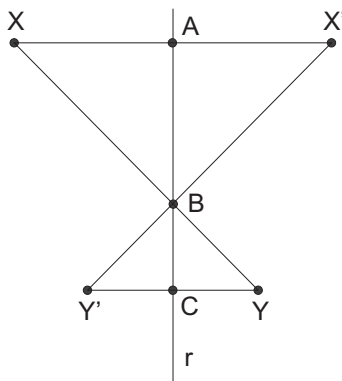
1º caso: X e Y estão do mesmo lado de r em \mathbb{R}^2 .

Sejam os segmentos BY e $B'Y'$ paralelos a r de tal modo que $B, B' \in XX'$. Os triângulos retângulos $XB Y$ e $X'B'Y'$ têm os catetos homólogos com mesma medida, logo o mesmo ocorre com suas hipotenusas, ou seja, $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$.



2º caso: X e Y estão em lados opostos de r .

Sejam A e B os pontos de intersecção de XX' e XY com a reta r , respectivamente. Logo, os triângulos retângulos BAX e BAX' têm o cateto AB em comum, $\overline{XA} = \overline{X'A}$. Logo, os triângulos BAX e BAX' são congruentes e, consequentemente, suas hipotenusas têm a mesma medida: $\overline{BX} = \overline{BX'}$. Seja $C \in r \cap YY'$. De modo análogo, concluímos que o triângulo $Y'CB$ é congruente ao triângulo YCB . Assim, $\widehat{X'BA} = \widehat{ABX}$ e $\widehat{YBC} = \widehat{Y'BC}$. Sabemos também que $\widehat{X'BA} = \widehat{Y'BC}$, pois são ângulos opostos pelo vértice.



Então $\widehat{X'BA} + \widehat{ABX} = \widehat{YBC} + \widehat{Y'BC}$. Como $\widehat{Y'BC} + \widehat{YBC}$ é o suplemento do ângulo $\widehat{XBY'}$, segue-se que $\widehat{X'BA} + \widehat{ABX}$ também é suplemento de $\widehat{XBY'}$, isto é, $\widehat{X'BA} + \widehat{ABX} + \widehat{XBY'} = 180^\circ$. Logo X' , B e Y' são colineares. Portanto

$$\overline{X'Y'} = \overline{X'B} + \overline{BY'} = \overline{XB} + \overline{BY} = \overline{XY}.$$



Exemplo: A imagem obtida através de um espelho.

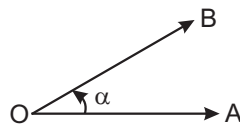
Rotação

Antes de definirmos uma rotação no plano, precisamos falar sobre orientação para os ângulos do plano. Seja um ângulo \widehat{AOB} . Diremos que o mesmo é orientado quando dados três pontos A , O e B , \widehat{AOB} é o ângulo definido por \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , a que se atribui além disso um sentido, escolhendo OA para lado-origem do ângulo e OB para lado-extremidade. Supõe-se definido um sentido positivo (o sentido anti-horário, como é habitual) no plano em que está definido o ângulo. Se α é um ângulo orientado, $-\alpha$ será por definição o ângulo orientado obtido a partir de α pela troca dos lados origem e extremidade.

Definição 4 *Sejam $O \in \mathbb{R}^2$ e α a medida de um ângulo \widehat{AOB} (\widehat{AOB} é orientado). A rotação de um ângulo α em torno de O é a aplicação $\rho_{O,\alpha} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada ponto $X \in \mathbb{R}^2$, $X \neq O$, ao ponto $X' \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo as seguintes condições:*

- $d(O, X) = d(O, X')$;
- O ângulo orientado $\widehat{XOX'}$ mede α ;

Se $X = O$, $\rho_{O,\alpha}(O) = O$.



Observação 1 A rotação inversa de $\rho_{O,\alpha}$ é a rotação de centro O e ângulo $-\alpha$.

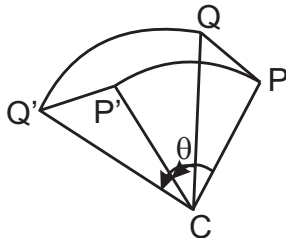
Teorema 1 Uma rotação em \mathbb{R}^2 é uma isometria.

Demonstração: Seja $\rho_{O,\theta}$ uma rotação de θ em torno de $O \in \mathbb{R}^2$. Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^2$ com $X, Y \neq O$. Sejam $X' = \rho_{O,\theta}(X)$ e $Y' = \rho_{O,\theta}(Y)$.

Como \widehat{XOY} possui a mesma orientação de $\widehat{X'OY'}$, temos que as bissetrizes de $\widehat{X'OY'}$ e \widehat{XOY} coincidem. Segue que $\widehat{XOY} = \widehat{X'OY'}$.

Como $\overline{OX} = \overline{OX'}$ e $\overline{OY} = \overline{OY'}$, temos que os triângulos XOY e $X'OY'$ são congruentes (caso lado-ângulo-lado). Logo, $XY = X'Y'$, como queríamos.

Se $X = O$, da definição, temos que $\overline{OY} = \overline{OY'}$. ■



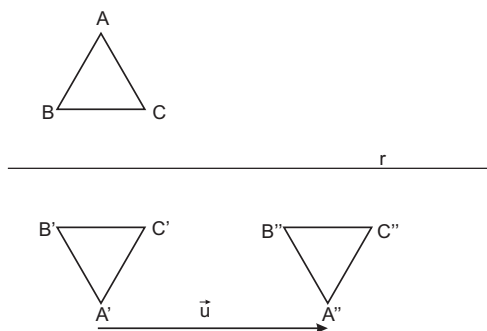
Observação 2 $\rho_{O,\pi}$ é também chamada de reflexão em torno do ponto P .

Exemplo: movimento de um ponteiro do relógio analógico.

Reflexão deslizante

Definição 5 Seja r uma reta do \mathbb{R}^2 e \vec{u} um vetor paralelo a r . À aplicação $GR_{r,u} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $GR_{r,u}(X) = T_u \circ R_r(X)$, $\forall X \in \mathbb{R}^2$, denominamos reflexão deslizante pela reta $r \subset \mathbb{R}^2$ e pelo vetor u em \mathbb{R}^2 .

Ou seja, a reflexão deslizante é a composição de uma reflexão com uma translação paralela ao eixo de reflexão. Não fazemos distinção da ordem em que ocorrem a reflexão e a translação, pois levando em conta que u é paralelo a r , mostra-se facilmente que $T_u \circ R_r = R_r \circ T_u$.



Proposição 3 *Toda reflexão deslizante em \mathbb{R}^2 é uma isometria.*

Demonstração: Já que a reflexão deslizante é a composição de uma reflexão com uma translação paralela ao eixo de reflexão, basta mostrar que a composição de isometrias é uma isometria.

De fato, sejam $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ isometrias de \mathbb{R}^2 . Dados os pontos arbitrários $X, Y \in \mathbb{R}^2$ e seja $S \circ T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $S \circ T(X) = S(T(X))$.

Como,

$$d(S \circ T(X), S \circ T(Y)) = d(S(T(X)), S(T(Y)))$$

(por hipótese, S é isometria)

$$= d(T(X), T(Y))$$

(por hipótese, T é isometria)

$$= d(X, Y).$$

Então $S \circ T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria. ■

Exemplo: marcas de pegadas.

Proposições gerais sobre isometrias

Nesta seção, veremos algumas proposições que nos auxiliarão na classificação das isometrias no plano. Algumas serão demonstradas, outras indicamos as referências.

Teorema 2 *A aplicação identidade I em \mathbb{R}^2 é uma isometria e se T é isometria, então T^{-1} também é isometria.*

Demonstração: A aplicação $I : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $I(X) = X$ é uma isometria pela própria definição, pois dados $X, Y \in \mathbb{R}^2$, temos $d(I(X), I(Y)) = d(X, Y)$.

Mostraremos que dada a isometria $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, sua inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ também é uma isometria. Dados $X', Y' \in \mathbb{R}^2$, $\exists X, Y \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(X) = X'$ e $T(Y) = Y'$, pois T é bijetora. Como a aplicação I em \mathbb{R}^2 é uma isometria, então $T^{-1}(X') = X$ e $T^{-1}(Y') = Y$.

Segue que

$$d(T^{-1}(X'), T^{-1}(Y')) = d(X, Y)$$

(por hipótese, T é uma isometria)

$$= d(T(X), T(Y)) = d(X', Y').$$

Assim, T^{-1} é uma isometria. ■

Proposição 4 *Se uma isometria $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mantém fixos três pontos não colineares, então T é a identidade.*

Demonstração: Referência [1].

Proposição 5 *Toda isometria $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transforma retas em retas.*

Demonstração: Referência [1].

Proposição 6 *prop Sejam $S, T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ isometrias. Se existirem em \mathbb{R}^2 três pontos não-colineares A, B e C tais que $S(A) = T(A)$, $S(B) = T(B)$ e $S(C) = T(C)$, tem-se $S = T$, isto é, $S(X) = T(X)$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$.*

Demonstração: Como S é uma isometria, sabemos que S^{-1} existe. Sabemos também que $S^{-1} \circ T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ deixa fixos os pontos A, B e C , pois $S^{-1} \circ T(A) = S^{-1}(T(A)) = S^{-1}(S(A)) = (S^{-1} \circ S)(A) = A$ (o mesmo vale para B e para C). Logo, pela proposição 0.0.5, $S^{-1} \circ T$ é a identidade. Assim, $S = T$. ■

Classificação das isometrias no plano

Já apresentamos quatro tipos de isometrias no plano, mas quantas mais será que existem? O teorema a seguir responde essa pergunta.

Teorema 3 *Existem somente quatro tipos de isometrias diferentes da identidade no plano: translações, reflexões, rotações e reflexões deslizantes.*

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria, onde f é diferente da identidade. Logo, $\exists A \in \mathbb{R}^2$ tal que $A' = f(A) \neq A$. Consideremos $A'' = f(A')$.

Temos $A'' \neq A'$, pois $d(A, A') = d(f(A), f(A')) = d(A', A'')$. Como $d(A, A') \neq 0 \Rightarrow d(A', A'') \neq 0 \Rightarrow A' \neq A''$. Note que $A \neq A'$ e $A' \neq A''$ não implica $A \neq A''$.

Então nos resta analisar três casos:

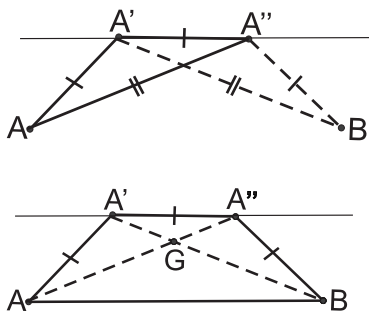
1º **caso** Suponha que $A \neq A''$ e que A, A' e A'' não sejam colineares. Logo, temos um triângulo $AA'A''$. A imagem desse triângulo pela isometria f é um triângulo que tem A' e A'' como vértices. Logo, existem duas posições possíveis para $f(A'') = B$ em relação à reta r que contém A' e A'' :

- Suponha que B está no mesmo semiplano (determinado pela reta r) que contém A .

Sabemos que $B = f(A'')$ forma com A, A' e A'' o quadrilátero convexo $AA'A''B$, no qual, como podemos ver na figura abaixo, três dos lados têm a mesma medida (por causa da aplicação da isometria) e os ângulos $\widehat{AA'A''}$ e $\widehat{A'A''B}$ são iguais (devido à congruência entre os triângulos $AA'A''$ e $A'A''B$ justificada pela aplicação da isometria).

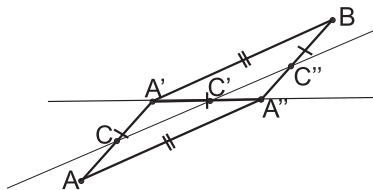
Temos também que o triângulo $A'AB$ é congruente ao triângulo $A''BA$ (verificação fica a cargo do leitor), assim $\widehat{A'AB} = \widehat{A''BA}$.

Logo, $2\widehat{A'AB} + 2\widehat{A'A''B} = 360^\circ$ e, conseqüentemente $\widehat{A'AB} + \widehat{A'A''B} = 180^\circ$, isto é, os ângulos opostos do quadrilátero quando somados resultam em 180° . Assim, o quadrilátero pode ser inscrito numa circunferência de raio \overline{OA} , cujo centro O é o ponto de encontro das mediatrizes dos segmentos AA' , $A'A''$ e $A''B$. Seja $O' = f(O)$. Então, como $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''}$, temos $\overline{O'A'} = \overline{O'A''} = \overline{O'B}$, logo O' pertence às mediatrizes dos segmentos $A'A''$ e $A''B$, donde $O' = O$.



Assim, se considerarmos a rotação ρ de centro O e ângulo $\widehat{AOA'}$, teremos $\rho(A) = A' = f(A)$, $\rho(A') = A'' = f(A')$ e $\rho(A'') = B = f(A'')$. Segue-se então da proposição 0.0.7 que $f = \rho$ é uma rotação.

- b. Suponhamos que B está no semiplano (determinado por r) oposto ao que contém A . Temos que $AA'BA''$ é um paralelogramo, AA' e $A''B$ são seus lados opostos e $A'A''$ é uma de suas diagonais (a demonstração desse fato fica a cargo do leitor. Basta supor que a reta que passa AA' é concorrente à reta que passa por BA'' e utilizar o fato que os triângulos $AA'A''$ e $A'A''B$ são congruentes e a definição de ângulo externo a um desses triângulos). Segue-se que os pontos médios C de AA' , C' de $A'A''$ e C'' de $A''B$, estão sobre uma reta s .



Consideremos a reflexão deslizante $GR_{s,u}$ sendo $u = \overrightarrow{CC'}$.

Temos que $GR_{s,u}(A) = A'$, $GR_{s,u}(A') = A''$ e $GR_{s,u}(A'') = B$. Mas $f(A) = A'$, $f(A') = A''$ e $f(A'') = B$. Logo, pela proposição 0.0.7, $f = GR_{s,u}$, isto é, f é uma reflexão deslizante.

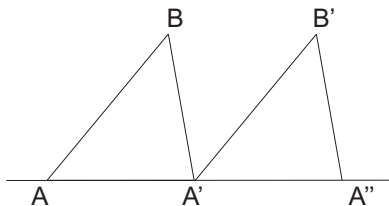
2º caso Sejam A , A' e A'' pontos distintos e colineares. Sabemos que $\overline{AA'} = \overline{A'A''}$ e que os três pontos são colineares. Assim A' é o ponto médio do segmento

AA'' . A reta r que contém os três pontos citados acima, é transformada em si mesma pela isometria f , pois $f(A) = A'$, $f(A') = A''$ e uma isometria transforma reta em reta. Além disso, f coincide, nos pontos A e A' com a translação $T_{AA'} : r \rightarrow r$. Segue-se que, em todos os pontos de r , f coincide com esta translação (demonstração a cargo do leitor).

Seja $B \notin r$. A isometria f transforma o triângulo $AA'B$ em outro triângulo no qual A' e A'' são vértices e seus lados têm as mesmas medidas que os de $AA'B$. Assim, há duas possibilidades para a imagem de B :

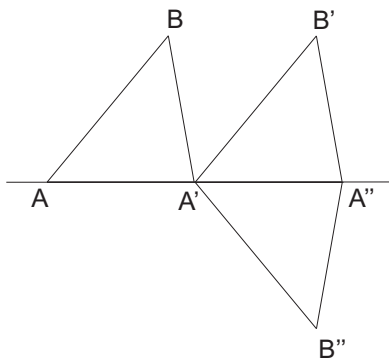
- a. $B' = f(B)$ no mesmo semiplano (determinado por r) que contém B .

AB e $A'B'$ são lados opostos de um paralelogramo (devido à distância entre os pontos A , A' e B e à distância entre as imagens). Logo, considerando a translação $T_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde $u = \overrightarrow{AA'}$ vemos que ela coincide com a isometria f nos pontos não colineares A , A' , e B . Segue-se da proposição 0.0.7 que $f = T_u$, logo f é uma translação.



- b. $B'' = f(B)$ no semiplano (determinado por r) oposto ao que contém B .

Temos que B'' é o simétrico de B' em relação à reta r . Consideremos a reflexão deslizante $GR_{r,u}$, $u = \overrightarrow{AA'}$. Temos que $GR_{r,u}(A) = A'$, $GR_{r,u}(A') = A''$ e $GR_{r,u}(B) = B''$ (pois $AA'B$ é congruente a $A'A''B''$). Portanto, pela proposição 0.0.7, $f = GR_{r,u}$. figura



3º caso Suponhamos que $A = A''$.

Seja P o ponto médio de $AA' = A''A'$ e $P' = f(P)$, temos que $d(P, A) = d(P, A') \Rightarrow d(P', A') = d(P', A'') \Rightarrow P'$ é ponto médio de $A''A'$. Logo, $P = P'$.

Consideremos a mediatriz s do segmento AA' . Seja B um ponto de s tal que $B \neq P$ e $B' = f(B)$. Assim, $d(B, A) = d(B, A') \Rightarrow d(B', A') = d(B', A'') \Rightarrow B' \in s$.

Temos duas possibilidades para a imagem de B :

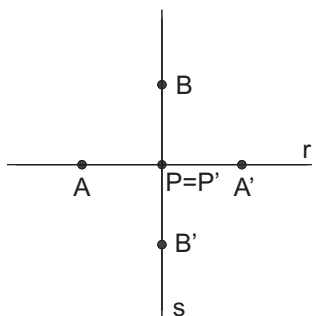
a. $B' = B$.

Consideremos a reflexão R_s . Desta forma, $R_s(A) = A'$, $R_s(P) = P = P'$ e $R_s(B) = B = B'$. Mas $f(A) = A'$; $f(P) = P'$ e $f(B) = B'$. Logo, pela proposição 0.0.7, temos que $f = R_s$.

b. Se $B' \neq B$.

Como $d(B, P) = d(B'P') = d(B', P)$ e $B' \in s$, temos que B' é o ponto simétrico de B relativamente à reta que contém os pontos A e A' .

Consideremos a rotação $\rho_{P,\pi}$. Temos que $\rho_{P,\pi}(A) = A'$, $\rho_{P,\pi}(P) = P = P'$ e $\rho_{P,\pi}(B) = B'$. Mas $f(A) = A'$; $f(P) = P'$ e $f(B) = B'$. Logo, pela proposição 0.0.7, temos que $f = \rho_{P,\pi}$.



Como queríamos mostrar, temos que existem somente quatro tipos de isometrias diferentes da identidade no plano. ■

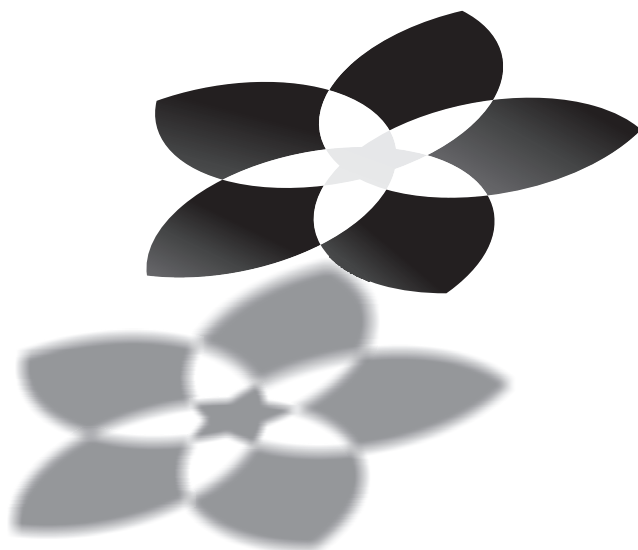
Além desse tipo de análise das isometrias em \mathbb{R}^2 , é possível analisá-las quanto a sua orientação, ao número de pontos fixos e às suas equações.

Para conhecer um pouco sobre problemas de desenho geométrico envolvendo isometrias, vide o livro da Coleção do Professor de Matemática *Construções Geométricas* do autor Eduardo Wagner.

Além do estudo das isometrias em \mathbb{R}^2 , podemos também realizar o estudo das isometrias em \mathbb{R}^3 sob o ponto de vista geométrico.

Referências

- [1] LIMA, Elon L. - *Isometrias*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1996.
- [2] SCIENCE U - *Introduction to Isometries*. Disponível em <http://www.scienceu.com/library/articles/isometries>. Acessado em 08 de julho de 2008.
- [3] SOUZA, Jairo M.; GONÇALVES, Maria Luiza V.; AGUSTINI, Edson - *Classificação de Isometrias em \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$* . IN: FAMAT em Revista, Universidade Federal de Uberlândia - UFU, V. 1, 2003, P. 43-61.
- [4] ROHDE, Geraldo M. - *Simetria*. Hemus - São Paulo, 1982.
- [5] THE OFFICIAL M. C. ESCHER WEBSITE - Disponível em <http://www.mcescher.com>. Acessado em 03 de julho de 2008.



Soluções dos Problemas Propostos

1. (*Proposto por Edson Luiz Valmorbida, UFSC*) A série harmônica é definida como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Sabe-se que esta é uma série divergente (verifique!), ou seja, não existe número real M tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq M$. Mostre que se retirarmos todas as frações que possuem o algarismo 9 então a série torna-se convergente.

SOLUÇÃO: (apresentada pelo proponente)

Começamos considerando a seguinte soma parcial:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

e notamos que:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \leq 8.$$

Agora consideramos:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{18} \leq \frac{9}{10} \\ \vdots \\ \frac{1}{80} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{88} \leq \frac{9}{10} \end{array}$$

Note que cada uma das linhas será menor que $\frac{9}{10}$ e como temos oito linhas, a soma de todas ficará menor que $8 \cdot \frac{9}{10}$. Sendo assim, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{18} \leq \frac{9}{10} \\ \vdots \\ \frac{1}{80} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{88} \leq \frac{9}{10} \end{array} \right\} \leq 8 \cdot \frac{9}{10}$$

De forma análoga, se considerarmos as frações com três algarismos no denominador, obtemos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{108} \leq 9 \cdot \frac{9}{100} \\ \vdots \\ \frac{1}{800} + \frac{1}{801} + \dots + \frac{1}{808} \leq 9 \cdot \frac{9}{100} \end{array} \right\} \leq 8 \cdot \frac{9^2}{10^2}$$

$$\vdots$$

Procedendo assim indefinidamente obteremos:

$$0 < S \leq 8 + 8 \cdot \frac{9}{10} + 8 \cdot \frac{9^2}{10^2} + 8 \cdot \frac{9^3}{10^3} + \dots = 8 \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \frac{9^2}{10^2} + \frac{9^3}{10^3} + \dots \right) =$$

$$8 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n, \text{ em que } S \text{ é a soma das somas parciais apresentadas acima, ou}$$

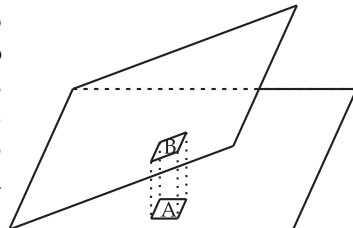
seja, $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$ sem as frações que possuem o algarismo 9 (se analisarmos as somas parciais apresentadas acima podemos notar que as frações que possuem o algarismo 9 são desconsideradas). Notemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n$ é uma *série geométrica* onde $\frac{9}{10}$ é positivo e menor que 1, portanto ela converge. Logo,

$$8 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n = 8 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{9}{10}} \right) = 80$$

ou seja, $0 < S \leq 8 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n = 80$. Portanto S converge.

2. (Proposto por Antônio Vladimir Martins, UFSC)

Na figura os planos formam um ângulo agudo α . B é retângulo, A é quadrado e este quadrilátero tem um par de lados paralelos à reta comum aos planos. Se o quadrado A é a projeção ortogonal do retângulo B , achar uma relação entre a área de A e a área de B .



SOLUÇÃO: (apresentada pelo proponente)

Do enunciado, podemos construir as seguintes figuras:

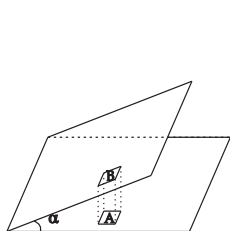


Fig.1

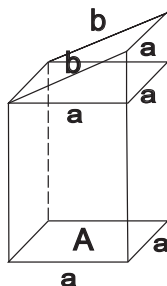


Fig.2

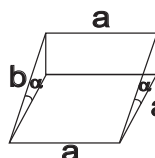


Fig.3

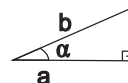


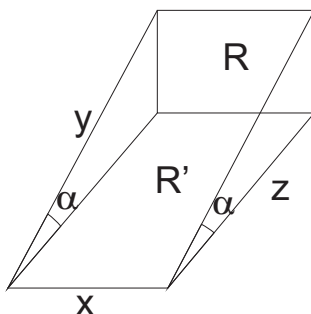
Fig.4

E então, da figura 4 temos a relação: $\cos \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\cos \alpha} = a \cdot \sec \alpha$

Portanto, $\text{área}(B) = a \cdot b = a \cdot a \cdot \sec \alpha = a^2 \cdot \sec \alpha = \text{área}(A) \cdot \sec \alpha$

$\text{área}(B) = \text{área}(A) \cdot \sec \alpha$

Esta relação pode ser usada para deduzir a fórmula da área de uma superfície do espaço, em termos de integral dupla. Neste contexto, o plano de cima é tangente à superfície e o outro plano é paralelo ao plano coordenado $0xy$. Um exercício mais geral é encontrado em “Medida e Forma em Geometria” (SBM) de Elon Lages Lima e cujo enunciado (um pouco modificado) é: “Sejam Π e Π' planos não paralelos, F uma figura em Π e F' a projeção de F sobre Π' (F' é o conjunto dos pontos X' , cada um dos quais é o pé da perpendicular baixada de um ponto X em F). Então, $\text{área}(F') = c \cdot \text{área}(F)$, em que $c = \text{constante} > 0$ ”
A idéia da resolução do exercício é decompor F em pequenos retângulos:



$$\cos \alpha = \frac{z}{y} \text{ ou } z = y \cdot \cos \alpha$$

$$\text{área}(R) = x \cdot y \text{ e } \text{área}(R') = x \cdot z$$

$$\text{área}(R') = x \cdot z = x \cdot y \cdot \cos \alpha = (\text{área}(R)) \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{área}(R') &= c \cdot \text{área}(R) \\ \text{onde } c &= \cos \alpha = \text{constante} \end{aligned}$$

$$\text{área}(F') \cong \text{soma das áreas}(R') = c \cdot (\text{soma das áreas}(R)) \cong c \cdot \text{área}(F)$$



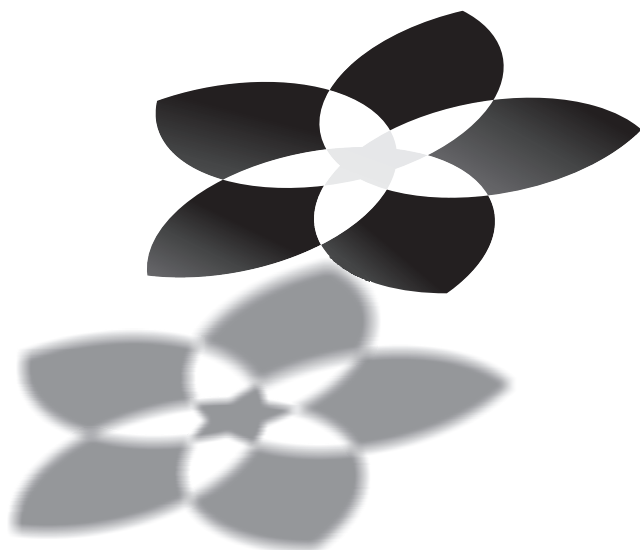
Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão um exemplar da mesma (Veja “Informações Gerais”).

1. (Proposto pelo professor Marcelo Ferreira Lima Carvalho, UFSC) Considere as frações $\frac{1000000001}{1000000002}$ e $\frac{2000000001}{2000000002}$. Qual delas é maior?
2. (Proposto pelo professor Marcelo Ferreira Lima Carvalho, UFSC) Joana e Pedro foram a uma papelaria. Ela comprou dois lápis e três canetas e ele três lápis e duas canetas. Suas compras custaram, respectivamente, 78 e 72 reais. Quanto custa um lápis nessa papelaria? *OBS: Resolva o problema sem utilizar sistema de equações lineares.*
3. (Proposto pela Revista: retirado do livro “A Caixa de Pandora da Matemática” de Brian Bolt) Os algarismos 1, 2, 3, ..., 8, 9 podem ser dispostos de muitas maneiras de modo a formar um número de quatro algarismos e outro de cinco algarismos. Contudo, apenas uma dessas maneiras maximiza o seu produto. Consegue descobri-la?
4. (Proposto pela Revista: adaptado do livro “100 Jogos Lógicos” de Pierre Berloquin) Um general tenta escolher um cozinheiro dentre 625 voluntários. Manda-os formar um quadrado com 25 linhas e 25 colunas. Manda sair o mais alto de cada linha e escolhe o mais baixo dentre eles. Depois, muda de idéia. Após regressarem aos seus respectivos lugares, manda sair o mais baixo de cada coluna e escolhe o mais alto dentre eles. Sendo diferentes os dois cozinheiros escolhidos, qual deles é o mais alto?
5. (Proposto pela graduanda Thiane Pereira P. Coliboro, UFSC) Um problema bastante conhecido no meio matemático é o “Problema dos Quatro Quatros”, que consiste em formar uma expressão que seja igual a um número inteiro dado utilizando apenas quatro algarismos 4 e sinais matemáticos. Além disso, a expressão não pode conter nenhum símbolo algébrico que envolva letra, tais como *log*, *lim*, etc. Por exemplo, o número zero pode ser escrito como $44 - 44$ e o número 5 como $\frac{4 \times 4 + 4}{4}$.

Este problema pode ser encontrado no livro “O Homem que Calculava” de Malba Tahan, pseudônimo do professor carioca Júlio César de Mello e Souza.

Agora, pensemos em uma interessante variação: escrever um número natural dado utilizando apenas os algarismos de um determinado ano e as operações $+$, $-$, \times , \div e raiz quadrada, além de parênteses. Será que você consegue escrever os números de 0 a 30 utilizando os algarismo do ano 1998, ano de criação da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina? Uma dica pra começar: existem números que podem ser escritos de várias formas, por exemplo, $36 = 19 + 9 + 8$ e $36 = (1 + 8 + \sqrt{9}) \times \sqrt{9}$.



Outras Olimpíadas

Resultados de participantes da ORM em outras olimpíadas - 2006/2008

Gustavo Lisbôa Empinotti - Florianópolis

Medalha de Ouro na Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 2)
Medalha de Prata na Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 2)
Medalha de Bronze na Olimpíada de Matemática do Cone Sul em 2008 - Temuco, Chile

Hugo Diehl de Souza - Criciúma

Menção Honrosa na Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 1)

Leonardo Gonçalves Fischer - Fraiburgo

Medalha de Bronze na Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 1)

Lucas Finger Roman - Florianópolis

Medalha de Prata na Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 1)

Natan Cardozo Leal - São Bento do Sul

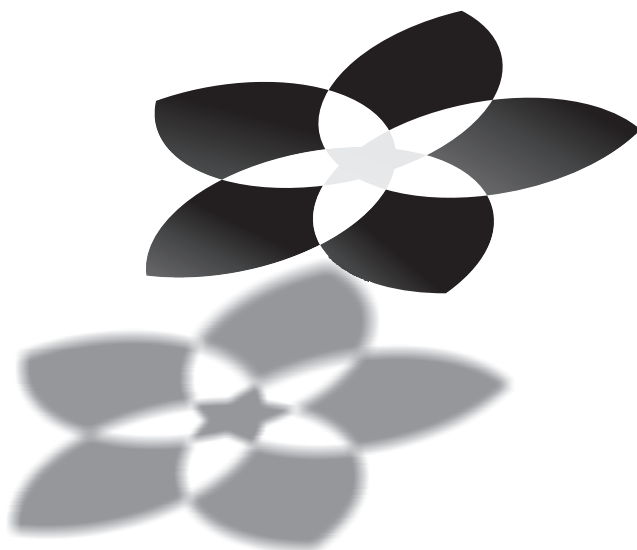
Menção Honrosa na Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 3)
Medalha de Prata na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (Nível 3)
Medalha de Ouro na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Nível 2)

Nicolas Fernandez Leitão - Florianópolis

Medalha de Bronze na Olimpíada Regional de Matemática em 2007 (Nível 1)
Medalha de Bronze na Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 1)

Renan Henrique Finder - Joinville

Medalha de Ouro na Olimpíada Regional de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Bronze na Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na Olimpíada Paulista de Matemática em 2007 (Nível Gama)
Medalha de Ouro na Olimpíada de Matemática do Cone Sul em 2007
Medalha de Prata na Olimpíada Internacional de Matemática - Madri, Espanha



Informações Gerais

Envio de Problemas e Soluções

A seção de problemas propostos e soluções é uma seção dinâmica. Contribua propondo problemas ou enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o \LaTeX , então o artigo poderá ser submetido neste formato.

Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) devem cadastrar suas escolas. Existe um período em cada ano para cadastramento na OBM. Escolas cadastradas nos anos anteriores permanecem cadastradas na OBM nos anos subseqüentes, exceto se for feita uma chamada para recadastramento. Já para a ORM é preciso fazer um recadastramento todo ano, havendo também para isso um período em cada ano (ver a nossa página).

Alunos interessados em participar das olimpíadas devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberam a revista podem

nos solicitar o envio da mesma.

Além disso, a revista é enviada às universidades federais brasileiras (um exemplar por IES), por intermédio da Biblioteca Universitária da UFSC.

Erramos

Na Revista nº5, devem ser observadas as seguintes alterações:

- Página 31: Devemos ter,

$$S = 2(n - 1)(n + 1) + 4(n + 1) = 2(n + 1)^2$$

Em vez de,

$$S = 2(n - 1)(n + 1) + 4(n + 1) = 2(n + 1)(3n + 1)$$

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

- Nosso site: www.orm.mtm.ufsc.br
- Telefone/Fax: (48) 37216809 (PET - Matemática)
- e-mail: orm@pet.mtm.ufsc.br
- Endereço: PET - Matemática

Departamento de Matemática - CFM

UFSC

Campus Universitário - Trindade

88040-900 – Florianópolis/SC