

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina

Nº4, 2007



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Reitor: Lúcio José Botelho

Vice-Reitor: Ariovaldo Bozan

PRÓ-REITORIA DE CULTURA E EXTENSÃO - PRCE

Pró-Reitora: Eunice Sueli Nodari

DEPARTAMENTO DE APOIO À EXTENSÃO - DAEx

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO - PREG

Pró-Reitor: Marcos Laffin

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM

Diretor: Mércles Thadeu Moretti

Vice-Diretor: Tarciso Antônio Grandi

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Chefe: Nereu Estanislau Burin

Sub-Chefe: Rosimary Pereira

Apoio:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

**CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DE SANTA CATARINA**

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina/
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],
2004 -

v.: 4 (2007) 23 cm

Anual
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas,
exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas.

Comissão da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:

Coordenador: José Luiz Rosas Pinho.

Professores: Carmem Suzane Comitre Gimenez, Eliezer Batista, Licio Hernanes Bezerra, Nereu Estanislau Burin e Waldir Quandt.

Bolsistas da olimpíada: Ana Paula Bertoldi Oberziner, Andressa Sampaio de Freitas Barbosa, Mateus Medeiros Teixeira e Tatiana Sprandel.

Bolsistas do PET - Matemática: Ana Beatriz Michels, Anny Madruga da Silva, Asteroide Santana, Carla Mörschbacher, Cauê Roratto, Cinthia Marques Vieira Andretti, Ecila de Almeida Waltrick, Graciele Amorim, Heloísa Cristina da Silva, Leonardo Koller Sacht, Marcos Teixeira Alves, Monique Müller Lopes Rocha, Paulo Ricardo Boff, Thiane Pereira Poncetta Coliboro, Tiara Martini e Viviam Giacomeli Pedroso.

Comitê Editorial da Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina:

Anny Madruga da Silva
Felipe Vieira
José Luiz Rosas Pinho
Leonardo Koller Sacht
Licio Hernanes Bezerra
Louise Reips
Marcos Teixeira Alves
Thiane Pereira Poncetta Coliboro

Editoração Eletrônica:

Alda Dayana Mattos
Ana Beatriz Michels
Anny Madruga da Silva
Marcos Teixeira Alves
Rodrigo Maciel Rosa
Thiane Pereira Poncetta Coliboro

Tiragem:

1500 exemplares

Arte da Capa:

Renata Leandro Becker

Postagem:

Segundo semestre de 2006.

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina N.º4, 2007

ISSN 1679-7612

Sumário

Apresentação	7
---------------------	----------

William Glenn Whitley (In Memoriam)	9
--	----------

VIII ORM (2005)	11
------------------------	-----------

Problemas	13
Nível 1	13
Nível 2	14
Nível 3	16
Soluções	18
Nível 1	18
Nível 2	21
Nível 3	28
Premiados	34
Nível 1	34
Nível 2	36
Nível 3	40
Escolas Participantes	43

Artigo	51
---------------	-----------

Seqüências Recorrentes	
Carlos Gustavo Moreira	53

Artigo	71
---------------	-----------

O Teorema de Menelau, um Exemplo de Aplicação de Áreas em Problemas Geométricos	
Eliezer Batista	73

Artigo	77
O Cone e as Cônicas	
Gustavo A. T. F. da Costa	79
Artigo	89
Onde sentar no cinema?	
Felipe Vieira	91
Artigo	99
Os Números Irracionais	
Leonardo Koller Sacht	101
Soluções de problemas propostos	113
Problemas propostos	121
Outras olimpíadas	125
Informações gerais	129
Envio de Problemas e Soluções	131
Envio de Artigos	131
Cadastramento	131
Como adquirir a revista	131
Fale Conosco	132

Apresentação

Esta revista é o resultado de um projeto de extensão do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), inteiramente realizado por alunos com bolsas de extensão, bolsistas do Programa de Educação Tutorial (PET) do Curso de Matemática, e com a participação de professores daquele departamento. Foi financiada (bolsas e parte dos custos de edição) pelo programa PROEXTENSÃO 2006 da Pró-reitoria de Cultura e Extensão (PRCE) da UFSC, através de seu Departamento de Apoio à Extensão (DAEx), e pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) do Rio de Janeiro, através do projeto da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

Neste quarto número, são discutidas as provas da 2ª fase da *VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina* (ORM), realizada em 2005, com suas respectivas soluções. Desta vez foram incluídas algumas soluções originais de alunos participantes naquele ano. Cinco artigos são também aqui apresentados: dois deles escritos por integrantes do PET, dois artigos escritos por professores do Departamento de Matemática da UFSC, e um artigo escrito pelo professor Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira, pesquisador do IMPA e membro da Comissão Nacional das Olimpíadas de Matemática. Além disso, a revista continua com suas seções de problemas propostos e de soluções de problemas propostos anteriormente.

Como sempre esta revista é distribuída gratuitamente às escolas participantes e interessadas em participar da ORM. Nossa expectativa é que, através das bibliotecas dessas escolas, um grande número de estudantes possa ser atingido, divulgando assim não somente as olimpíadas, mas principalmente a matemática em sua forma mais atraente e divertida: a de resolução de problemas pouco convencionais e que envolvem criatividade e imaginação por parte dos alunos.

Este número é inteiramente dedicado ao nosso colega, Prof. William Glenn Whitley, falecido neste ano, e integrante da Comissão da ORM (veja a página seguinte). Seu trabalho na criação de problemas originais foi de fundamental importância para a ORM desde o seu início em 1998. Sua partida precoce foi para a ORM a perda de um grande profissional. Para nós, professores e alunos da Comissão da ORM, significou a perda de um colega, um professor e um amigo.

Florianópolis, 1 de novembro de 2006.

José Luiz Rosas Pinho
Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

William Glenn Whitley

(In Memoriam)

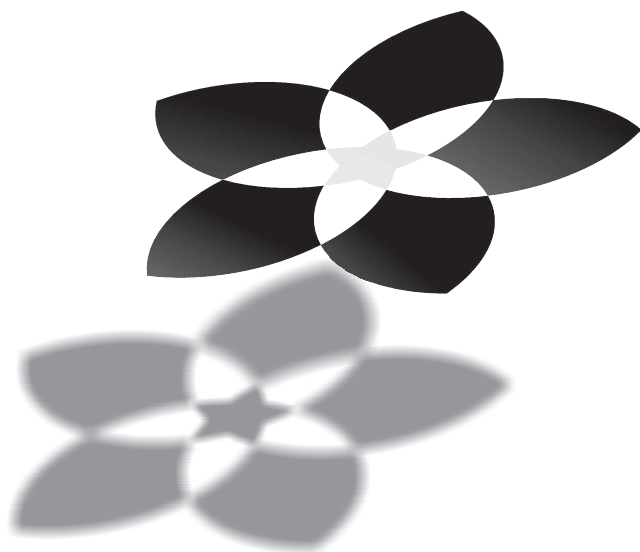
William Glenn Whitley nasceu na cidade de Houston, Texas, nos Estados Unidos da América, em 1946. Graduou-se em 1967 como bacharel em matemática na University of Houston System, onde também obteve os títulos de Msc, em 1969, e PhD, em 1973. Naquela mesma universidade, durante o seu doutorado, atuou como professor assistente, de 1969 a 1973. Em 1974 veio para o Brasil como professor visitante no IMPA, lá ficando até 1977, quando então passou a trabalhar como professor visitante, e depois adjunto, na Universidade Federal de Santa Catarina. Bill, como era chamado por seus colegas, aposentou-se nesta universidade em 2002, não por que assim o desejasse, pois exercia diversas atividades com grande entusiasmo, mas por motivos de saúde.

Na pesquisa, Bill se interessava por geometria e topologia, sendo a topologia algébrica sua especialidade. Publicou artigos nessas áreas mas, nos últimos anos de sua vida, dedicou-se principalmente à formação de alunos. Orientou na UFSC 11 dissertações de mestrado e participou de 26 bancas de mestrado, tendo sido coordenador da pós-graduação do Departamento de Matemática de 1977 a 1990. Bill preocupou-se também com o curso de graduação, tendo orientado diversos alunos em iniciação científica e em trabalhos de conclusão de curso. Participou ativamente, de 1992 a 1994, da reforma curricular do curso de matemática, e atuou intensamente no novo curso implantado em 1994. Com o surgimento dos computadores pessoais (PC) a partir da segunda metade da década de 1980, Bill passou a se interessar pelo ensino da matemática usando o computador como ferramenta. Desenvolveu então diversos softwares educacionais, apresentados em congressos e feiras computacionais.

Em 1998, quando iniciamos o projeto da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina, Bill juntou-se a nós em todas as atividades, realizando treinamentos (ou discussões) com os alunos das escolas na UFSC, e corrigindo as provas da segunda fase. Sua participação foi fundamental na elaboração das provas da segunda fase, tendo criado a grande maioria dos problemas originais (mais da metade seguramente) nos três níveis, problemas esses que vêm sendo apresentados nesta revista até o presente número. Mesmo depois de aposentado, Bill continuou seu trabalho com as olimpíadas e, a partir de 2003, participou também da comissão editorial desta revista, tendo contribuído ainda para a mesma com dois interessantes artigos (nos números 2 e 3).

Apesar de seu estado de saúde não permitir que ele se ausentasse por muito tempo de casa, Bill mantinha seu bom humor e otimismo perante a vida. Era uma pessoa de fácil relacionamento e adorava receber em sua casa os estudantes que continuava a orientar em trabalhos de conclusão de curso, bem como aqueles que participavam da comissão da ORM, que lá iam para discutir com ele as correções das provas da segunda fase. Alguns daqueles estudantes puderam tê-lo como professor e mestre, outros apenas o viram naquelas oportunidades. De uma forma ou de outra, para todos nós, seus colegas e alunos, foi um privilégio poder conhecê-lo em vida e é, e será sempre um privilégio guardar sua memória.

José Luiz Rosas Pinho
Pela Comissão da ORM e todos aqueles que conheceram Bill



VIII ORM (2005)

Problemas

Nível 1

1. Um professor resolveu distribuir 200 moedas de igual valor entre os melhores alunos de sua turma. José recebeu 34 moedas, João recebeu 22% do total de moedas e Ricardo recebeu $\frac{1}{4}$ daquele total. Se Maria ficou com o resto das moedas, quantas ela recebeu?
2. Quatro números primos são separados em dois grupos de dois números cada. As somas dos números de cada grupo são 76 e 84, respectivamente. Uma pessoa seleciona, ao acaso, três dos quatro números e observa que sua soma é 107. Outra pessoa seleciona, também ao acaso, três dos quatro números e observa que sua soma é 149. Quais são esses quatro números?
3. Alice visita o País das Maravilhas e, ao chegar a uma bifurcação na estrada, não sabe qual caminho leva ao palácio do Rei. Quatro habitantes do país se oferecem para ajudá-la, mas Alice sabe que os habitantes têm uma curiosa maneira de brincar com os turistas. Deste grupo de quatro habitantes, um sempre diz a verdade ao responder perguntas; um sempre mente; outro alternadamente diz a verdade e mente, respondendo a verdade na primeira pergunta; e o outro, alternadamente, diz a verdade e mente, respondendo uma mentira na primeira pergunta. Além disso, feita uma pergunta, todos os quatro respondem à essa pergunta.

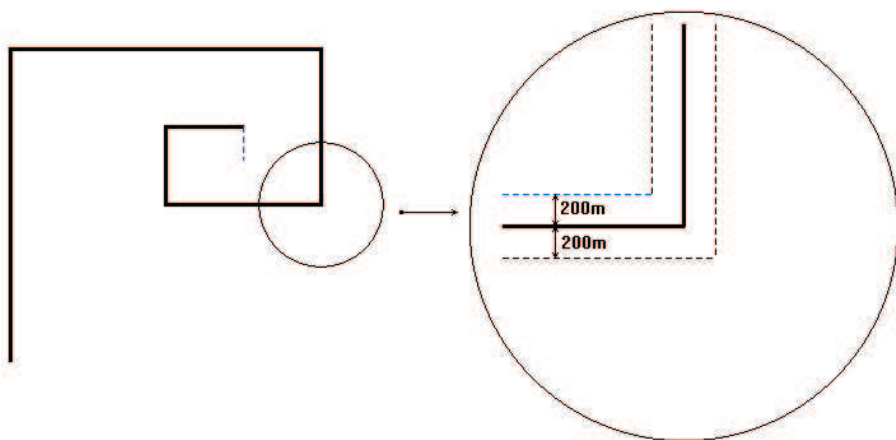
Alice consegue identificar quem é quem, dentro do grupo de quatro habitantes, e o caminho correto para o palácio fazendo três perguntas. Quais podem ser essas perguntas?
4. Construa uma seqüência de seis números naturais que satisfaça as seguintes condições:
 - (i) A soma de quaisquer três elementos consecutivos da seqüência é par.
 - (ii) A soma de quaisquer cinco elementos consecutivos da seqüência é ímpar.
5. O sistema de numeração do planeta Alfabemagata é igual ao nosso e seus veículos possuem placas com três algarismos. Os habitantes do planeta são muito supersticiosos e não utilizam placas cuja soma dos algarismos é igual a 18. Quantas placas não são usadas no planeta?

Nível 2

1. Numa sala, há três vasos de mesmo volume: A, B e C. Inicialmente, o vaso A está cheio de água e os vasos B e C estão vazios. Uma pessoa entra na sala e transfere 50% da água do vaso A para o vaso B. Em seguida, ela transfere 50% da água que resta no vaso A para o C. Uma segunda pessoa entra na sala e transfere 50% da água que encontra no vaso A para o vaso B e, em seguida, transfere 50% da água que ainda resta no vaso A para o C. Se este procedimento pudesse ser repetido indefinidamente até o completo esvaziamento do vaso A, que parte do volume total de água ficaria no vaso B e que parte ficaria no vaso C?
2. Quatro números primos são separados em dois grupos de dois números cada. As somas dos números de cada grupo são 76 e 84, respectivamente. Uma pessoa seleciona, ao acaso, três dos quatro números e observa que sua soma é 107. Outra pessoa seleciona, também ao acaso, três dos quatro números e observa que sua soma é 149. Quais são esses quatro números?
3. Quantos são os pares de números palíndromos (distintos em cada par) de três algarismos cujas somas são números palíndromos?
Observação: Um número é dito palíndromo se ele não se modifica ao ser lido “ao contrário”. Exemplo: 373, 444 e 909 são palíndromos de três algarismos.
4. Um milionário, em visita à sua pequena cidade natal, resolveu oferecer R\$100,00 para cada menino e R\$60,00 para cada menina dessa cidade. Todas as meninas aceitaram a oferta, mas 40% dos meninos recusaram. Sabendo-se que há um total de 3520 meninos e meninas na cidade, quanto dinheiro o milionário gastará no total? Se o milionário gastou R\$80.000,00 a menos do que pretendia, quantos meninos e quantas meninas há na cidade?
5. Uma pessoa resolve demarcar terras, durante vários dias, através de um curioso procedimento. No primeiro dia ela caminha em linha reta por 10km mandando cercar todo o terreno em uma faixa com 200m de largura de cada lado dessa reta. No segundo dia, ela muda a direção em 90° para a direita e repete o processo. No terceiro dia, ela muda novamente a direção em 90° para a direita, caminha metade do que caminhou no primeiro ou no segundo dia, e cerca o terreno em uma faixa nas mesmas dimensões dos dias anteriores. No quarto dia, ela muda novamente a direção como anteriormente, e repete o que foi feito no terceiro dia. No quinto e sexto dia, ela repete o procedimento, mas caminha a metade

da distância do terceiro ou quarto dia. Repetindo este processo, a partir de que dia ela não demarcará novas terras não importando quanto caminhe? Qual o comprimento total da cerca utilizada? Qual a área total cercada?

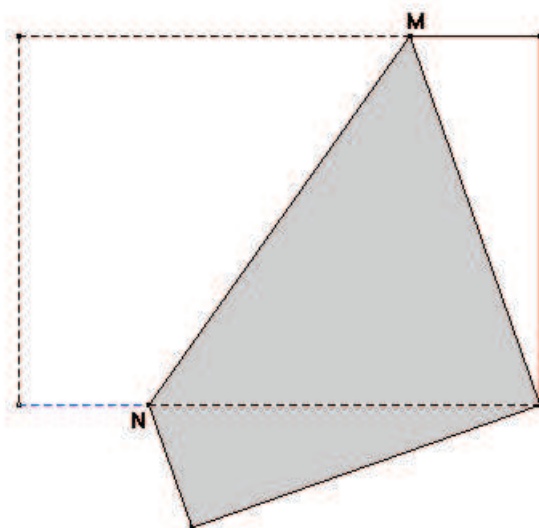
Observação: A cerca é colocada somente nas laterais, ou seja, paralelamente às linhas retas percorridas pela pessoa; onde há ângulos retos, ela é feita conforme o detalhe da figura.



Você Sabia? Pitágoras descobriu que existe outra forma de calcular quadrados de números: através da soma de números ímpares. Ele descobriu que n^2 é igual a soma dos n primeiros números naturais ímpares. Exemplo: $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

Nível 3

1. Qual o número máximo de termos de uma seqüência que satisfaz as seguintes condições:
 - (i) A soma de quaisquer três termos consecutivos da seqüência é par.
 - (ii) A soma de quaisquer cinco termos consecutivos da seqüência é ímpar.
2. Uma folha retangular, de comprimento a e largura b , é dobrada de modo que dois vértices opostos coincidam.

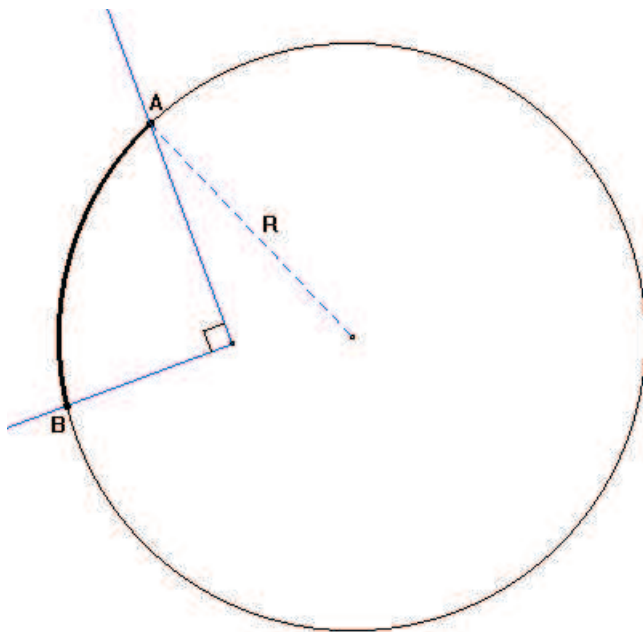


Calcule o comprimento da dobra MN em função de a e de b .

3. Numa sala, há três vasos de mesmo volume: A, B e C. Inicialmente, o vaso A está cheio de água, e os vasos B e C estão vazios. Uma pessoa entra na sala e transfere 50% da água do vaso A para o vaso B. Em seguida ela transfere 50% da água que resta no vaso A para o C. Uma segunda pessoa entra na sala e transfere 50% da água que encontra no vaso A para o vaso B e, em seguida, transfere 50% da água que ainda resta no vaso A para o C. Se este procedimento

pudesse ser repetido indefinidamente até o completo esvaziamento do vaso A, que parte do volume total de água ficaria no vaso B e que parte ficaria no vaso C?

4. São dados um círculo, de raio R , e um arco AB , de 60° , em sua circunferência. Deseja-se retirar um pedaço do círculo recortando-o por duas perpendiculares, uma passando por A e a outra por B . Como deve ser feito esse recorte de modo que a área retirada seja máxima? Qual é esta área em função do raio R ? (A figura representa um recorte nas condições descritas, mas não necessariamente o de área máxima).



5. Considere uma função f , dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$, para todo $x > 0$. Qual é o valor mínimo que f pode atingir e por quê?

Soluções

Nível 1

1. José recebeu 34 moedas.

João recebeu $\frac{22}{100} \times 200 = 44$ moedas.

Ricardo recebeu $\frac{1}{4} \times 200 = 50$ moedas.

Maria, então, ficou com $200 - (34 + 44 + 50) = 200 - 128 = 72$ moedas.

2. Observemos as diferenças:

$$107 - 76 = 31.$$

$$107 - 84 = 23.$$

$$149 - 76 = 73.$$

$$149 - 84 = 65.$$

Somente na última obtemos um número composto (65). Isto significa que a soma 84 não faz parte da soma 149 (ou seja, os dois números cuja soma é 84 não fazem ambos parte da soma 149). Mas, então, 76 faz parte da soma 149, ou seja, 73 é um dos números procurados e faz parte da soma 84. Logo, $84 - 73 = 11$, que é outro dos números.

Vamos agora descobrir quais são os dois números primos que, somados, dão 76.

Observe que, da primeira diferença, obtemos 31, que não é nenhum dos dois números que fazem parte da soma 84. Portanto, a soma 76 não faz parte da soma 107. Mas, então, 84 faz parte da soma 107, ou seja, 23 é um dos números procurados e faz parte da soma 76. Logo, o outro número é $76 - 23 = 53$.

Os números são: 23, 53, 73 e 11.

Obs.: $23 + 53 = 76$; $73 + 11 = 84$; $23 + 53 + 73 = 149$ e $73 + 11 + 23 = 107$.

3. A primeira pergunta poderia ser: ***Eu estou no País das Maravilhas?*** (ou qualquer pergunta que Alice saiba a resposta).

Haverá então duas respostas **SIM** e duas respostas **NÃO**: uma resposta **SIM** será daquela pessoa que sempre diz a verdade, e a outra daquela que responde a verdade na primeira pergunta; uma resposta **NÃO** será da pessoa que sempre mente, e a outra daquela pessoa que mente na primeira pergunta.

O problema de Alice então é descobrir, dentre aquelas que responderam **SIM**, qual a que fala sempre a verdade e, dentre aquelas que responderam **NÃO**, qual a que sempre mente (na verdade, isto é irrelevante).

A segunda pergunta de Alice pode ser a mesma feita na primeira (ou qualquer pergunta que Alice novamente saiba a resposta). Ela obterá então uma pessoa respondendo **SIM**, que havia dito **SIM** na primeira pergunta (esta é a que sempre fala a verdade), uma pessoa respondendo **NÃO**, que havia dito **NÃO** na primeira pergunta (esta é a que sempre mente), e duas pessoas mudando de resposta em relação à primeira pergunta (a que tiver dito **SIM** na segunda pergunta é aquela que mentiu na primeira).

A terceira pergunta de Alice será então: *Qual o caminho para o Palácio do Rei?*, e ela seguirá a resposta da pessoa que sempre fala a verdade.

4. Suponha que o primeiro termo da sequência seja par. Então temos duas possibilidades para o segundo termo e, pela condição (i), teríamos:

- (a) P P P P P - Não satisfaz a condição (ii);
(b) P I I P I I - Não satisfaz a condição (ii) com os últimos cinco termos.

Obs.: P - par, I - ímpar.

Suponha agora que o primeiro termo da sequência seja ímpar. Então temos duas possibilidades para o segundo termo e, pela condição (i) teríamos:

- (a) I I I I P - Não satisfaz a condição (ii) com os cinco primeiros termos;
(b) I P I I P I - Satisfaz a condição (ii) para os cinco primeiros termos e para os cinco últimos termos.

Portanto, a sequência deve ser da forma: I P I I P I.

Um exemplo de tal sequência é: 123547.

5. Vamos fazer por árvore de possibilidades, escrevendo, inicialmente, zero, depois 1, 2, ..., até 9 nas centenas; colocando em seguida, o maior algarismo (9) nas dezenas; e seguimos decrescendo, de tal modo que a soma dê 18:

$$\begin{array}{l}
 1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad 9 \quad 9 \\ 1 \quad 9 \quad 8 \\ 1 \quad 8 \quad 9 \end{array} \right. \\
 2 \left\{ \begin{array}{l} 2 \quad 9 \quad 7 \\ 2 \quad 8 \quad 8 \\ 2 \quad 7 \quad 9 \end{array} \right. \\
 3 \left\{ \begin{array}{l} 3 \quad 9 \quad 6 \\ 3 \quad 8 \quad 7 \\ 3 \quad 7 \quad 8 \\ 3 \quad 6 \quad 9 \end{array} \right. \\
 4 \left\{ \begin{array}{l} 4 \quad 9 \quad 5 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 4 \quad 5 \quad 9 \end{array} \right. \\
 5 \left\{ \begin{array}{l} 5 \quad 9 \quad 4 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 5 \quad 4 \quad 9 \end{array} \right. \\
 6 \left\{ \begin{array}{l} 6 \quad 9 \quad 3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 6 \quad 3 \quad 9 \end{array} \right. \\
 7 \left\{ \begin{array}{l} 7 \quad 9 \quad 2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 7 \quad 2 \quad 9 \end{array} \right. \\
 8 \left\{ \begin{array}{l} 8 \quad 9 \quad 1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 8 \quad 1 \quad 9 \end{array} \right. \\
 9 \left\{ \begin{array}{l} 9 \quad 9 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 9 \quad 0 \quad 9 \end{array} \right. \\
 10 \left\{ \begin{array}{l} 9 \quad 9 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 9 \quad 0 \quad 9 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Portanto, teremos $1 + 2 + \dots + 9 + 10$ placas, cuja soma dos algarismos é igual a 18. Ora, tal soma é igual a:

$$\underbrace{(1 + 10)}_{11} + \underbrace{(2 + 9)}_{11} + \underbrace{(3 + 8)}_{11} + \underbrace{(4 + 7)}_{11} + \underbrace{(5 + 6)}_{11} = 5 \times 11 = 55.$$

Nível 2

1. Na primeira transferência, metade da quantidade inicial de água do vaso A vai para o vaso B e metade fica no vaso A. Após a segunda transferência (feita pela segunda pessoa), metade da metade que ficou no vaso A (ou seja, um quarto) vai para o vaso C e um quarto fica no vaso A.

Chamemos essas duas transferências de uma operação de transferência. Assim, após uma operação de transferência, o vaso C fica com a metade da quantidade de água que fica no vaso B:

A	B	C
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Como o processo é repetitivo, na segunda operação de transferência, metade da quantidade de água que estava no vaso A vai para o B, e um quarto da outra quantidade vai para C:

A	B	C
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$

Assim, novamente, a quantidade de água no vaso C é a metade da quantidade de água no vaso B.

Prosseguindo, indefinidamente, até a água do vaso A se esgotar, teremos que a quantidade de água no vaso B será o dobro da quantidade no vaso C, ou seja, B conterà $\frac{2}{3}$ do total de água e C conterà $\frac{1}{3}$ do total.

SOLUÇÃO DE RENAN HENRIQUE FINDER (MEDALHISTA DE OURO)

Da primeira transferência, sobra 50% de água. A quantidade posta no vaso C então seria 50% de 50%, ou seja:

$$\frac{50}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{2500}{10000} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Assim, no vaso B fica o dobro do que está no vaso C. Com o restante repete-se o processo. Assim, a água colocada no vaso C é a metade da colocada no vaso B. Logo, se há $x + y + z + k + w + \dots$ litros no vaso C, há, então, $2x + 2y + 2z + 2k + 2w + \dots$ no vaso B. Seja C a quantidade de água do vaso C e B, a do vaso B. Temos a seguinte equação:

$$B + C = 100\%$$

$$2C + C = 100\%$$

$$3C = 100\%$$

$$C = 33,3333333\ldots\%$$

$$2C = 66,66666\ldots\%$$

$$B = 66,66666\ldots\%$$

Então, depois de toda a água ser retirada de A, B ficaria com $\frac{2}{3}$ do total ou, aproximadamente, 66,67% e C ficaria com $\frac{1}{3}$ do total ou, aproximadamente, 33,33%.

2. Sejam a, b, c e d os quatro números primos tais que: $a + b = 76$ e $c + d = 84$.

Efetuada as diferenças:

$$107 - 76 = 31$$

$$107 - 84 = 23$$

$$149 - 76 = 73$$

$$149 - 84 = 65$$

Notamos que, na última, obtemos um número não primo (65). Isto significa que c e d não são parcelas, ambos, da soma 149. Mas, então, a e b necessariamente serão parcelas daquela soma. Portanto, o número primo 73 é uma das parcelas da soma 84. Seja $c = 73$. Então $d = 84 - 73 = 11$. Falta encontrar a e b . Observando a primeira diferença acima notamos que 31 não é c nem d . Isto significa que a e b não são ambos parcelas da soma 107. Mas então c e d necessariamente são parcelas daquela soma. Ora, da segunda diferença obtemos

23 que faz parte da soma 76. Seja $a = 23$. Então $b = 76 - 23 = 53$. Os números são:

$$a = 23, b = 53, c = 73 \text{ e } d = 11.$$

Obs.: $107 = c + d + a = 73 + 11 + 23$ e $149 = a + b + c = 23 + 53 + 73$.

3. Um número palíndromo de três algarismos é tal que o algarismo da centena (diferente de zero) é igual ao algarismo da unidade, e o algarismo da dezena pode ser qualquer um de 0 a 9.

Queremos saber quantos são os pares de números palíndromos de três algarismos cujas somas são números palíndromos. Alguns exemplos de pares são: (202, 737), cuja soma é 939; (555, 444), cuja soma é 999; (303, 808), cuja soma é 1111 (aqui um palíndromo de 4 algarismos - note que o enunciado não exige que a soma seja um palíndromo de apenas três algarismos).

Para as somas palíndromas de três algarismos, teremos o seguinte:

Considere os pares distintos possíveis para a casa das centenas:

$$\begin{array}{cccc} 1 \text{ e } 2 & 2 \text{ e } 3 & 3 \text{ e } 4 & 4 \text{ e } 5 \\ 1 \text{ e } 3 & 2 \text{ e } 4 & 3 \text{ e } 5 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \underbrace{1 \text{ e } 8}_7 & \underbrace{2 \text{ e } 7}_5 & \underbrace{3 \text{ e } 6}_3 & \underbrace{\quad}_1 \end{array}$$

$$7 + 5 + 3 + 1 = 16.$$

Agora, vamos ver os possíveis pares para as casas das dezenas (e, aqui, podem se repetir, já que as centenas são distintas).

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \text{ e } 0 & 1 \text{ e } 0 & 2 \text{ e } 0 & \dots & 9 \text{ e } 0 \\ 0 \text{ e } 1 & 1 \text{ e } 1 & 2 \text{ e } 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \underbrace{0 \text{ e } 9}_{10} & \underbrace{1 \text{ e } 8}_9 & \underbrace{2 \text{ e } 7}_8 & \dots & \underbrace{\quad}_1 \end{array}$$

$$10 + 9 + 8 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55.$$

Assim, temos 16×55 pares.

Considere agora os pares repetidos na centena:

1 e 1, 2 e 2, 3 e 3, 4 e 4 (não pode ser maior ou igual a 5).

Para cada um desses quatro casos, teremos, para as dezenas (que agora não podem se repetir e nem mudar a ordem):

$$\begin{array}{ccccc}
 0 \text{ e } 1 & 1 \text{ e } 2 & 2 \text{ e } 3 & 3 \text{ e } 4 & 4 \text{ e } 5 \\
 0 \text{ e } 2 & 1 \text{ e } 3 & 2 \text{ e } 4 & 3 \text{ e } 5 & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 0 \text{ e } 9 & 1 \text{ e } 8 & 2 \text{ e } 7 & 3 \text{ e } 6 & \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 \underbrace{\hspace{1cm}}_9 & \underbrace{\hspace{1cm}}_7 & \underbrace{\hspace{1cm}}_5 & \underbrace{\hspace{1cm}}_3 & \underbrace{\hspace{1cm}}_1
 \end{array}$$

$$9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25.$$

Teremos, portanto, mais $4 \times 25 = 100$ pares.

No final, serão $880 + 100 = 980$ pares que, somados, resultam em números palíndromos de três algarismos.

Agora, será necessário acrescentar as somas palíndromas de quatro algarismos. Como devem ser estas somas? Note que para que $aba + cdc$ seja um palíndromo de quatro algarismos, necessariamente, $a + c$ deve ser igual ao algarismo da dezena de $a + c$. Portanto, $a + c = 11$ (já que o valor máximo possível para a soma de dois algarismos é $9 + 9 = 18$, ou seja, com 1 na dezena). Assim, uma soma palíndroma possível é 1111, obtida a partir de 4 pares: $202 + 909$, $303 + 808$, $404 + 707$ e $505 + 606$ (só podemos ter o zero nas dezenas). Será possível mais alguma soma? Sim, o valor 1221 pode ser atingido se a soma dos algarismos das dezenas ($a + b$ acima) for também 11. Por exemplo: $767 + 454 = 1221$. Isto ocorrerá em:

$$\left. \begin{array}{l}
 222 \text{ e } 999 \\
 232 \text{ e } 989 \\
 242 \text{ e } 979 \\
 252 \text{ e } 969 \\
 262 \text{ e } 959 \\
 272 \text{ e } 949 \\
 282 \text{ e } 939 \\
 292 \text{ e } 929
 \end{array} \right\} 8 \text{ pares}$$

Temos mais 8 pares para cada um dos seguintes casos: 3 e 8, 4 e 7, 5 e 6; nas centenas.

Teremos, no final, $4 + 32 = 36$ pares que, somados dão números palíndromos de 4 algarismos. Somando com os pares que dão palíndromos de 3 algarismos,

teremos $980 + 36 = 1016$ pares.

4. Seja x o número de meninos da cidade e seja y o número de meninas da cidade. Então, $x + y = 3520$.

O milionário então gastará:

$$100 \times (100 - 0,4x) + 60y = 60 \times (x + y) = 60 \times 3520 = 211200 \text{ reais.}$$

Agora, o milionário deixou de gastar 80.000 reais correspondentes aos 40% dos meninos que recusaram a oferta, ou seja:

$$100 \times 0,4x = 80000 \Rightarrow x = 2000 \text{ meninos.}$$

Portanto, há $y = 3520 - 2000 = 1520$ meninas.

SOLUÇÃO DE BRUNO MÜLLER STOEBERL (MEDALHISTA DE OURO)

Temos 3520 meninos e meninas.

$$\frac{80000}{100} = 800 \text{ meninos.}$$

$$800 = 40\%$$

$$x = 100\%$$

$$40x = 80000$$

$$x = \frac{80000}{40}$$

$$x = 2000$$

Temos 2000 meninos.

$$3520 - 2000 = 1520$$

Temos 1520 meninas.

$$2000 \times 100 = 200000$$

$$200000 - 80000 = 120000$$

O milionário gastou 120.000 reais para os meninos.

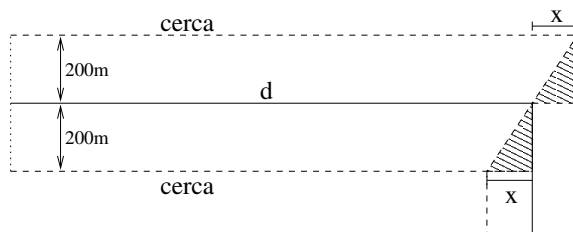
$$1520 \times 60 = 91200$$

O milionário gastou 91.200 reais para as meninas.

$$120000 + 91200 = 211200$$

O milionário gastará no total 211.200 reais.

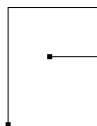
5. Inicialmente, observemos que podemos considerar que a cada dia, a pessoa cerca o terreno em uma área igual à distância percorrida vezes $400m$ (área de um retângulo) e utiliza o dobro da distância percorrida em cerca. Veja a figura a seguir, considerando a “esquina”:



Cerca: $d + x + d - x = 2d$.

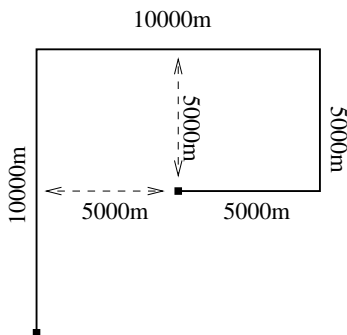
Área: 3×400 .

Vamos considerar um “ciclo” uma trajetória do tipo:

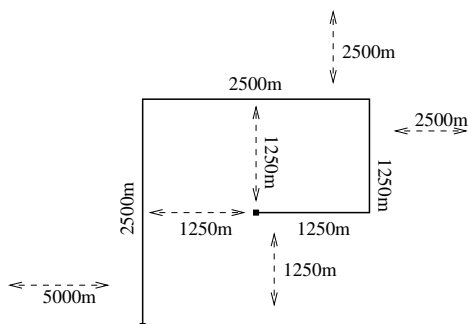


Ao fim de cada ciclo passaram-se 4 dias.

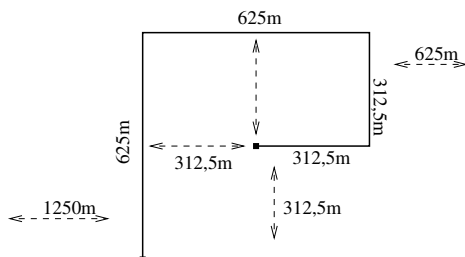
No primeiro ciclo, a pessoa termina em um ponto que está a $500m$ de cada parte do caminho trilhado (este ponto é o centro de um quadrado de lado $10000m$). Isto significa que nenhuma cerca tocará, ou ultrapassará, uma cerca já colocada:



No segundo ciclo, a pessoa termina em um ponto que está a $1250m$ de cada parte do caminho já trilhado. Aqui também não há problemas.



No terceiro ciclo, a pessoa termina em um ponto que está a $312,50m$ de cada parte do caminho já trilhado. Aqui teremos problemas, pois $312,50m < 400m = 200m + 200m$:



Isto significa que, se a pessoa começasse a cercar o terreno no 12º dia (últimos $312,50m$), tal cerca deveria ficar por dentro do terreno já cercado no 10º dia. Vamos, considerar então, a solução até o fim do 11º dia (outras situações poderiam ser consideradas e, de fato, foram levadas em consideração na correção das provas).

Portanto serão:

$$2 \times (10000 + 10000 + 5000 + 5000 + 2500 + 2500 + 1250 + 1250 + 625 + 625 + 312,50) = 2 \times 39062,50m = 78125m \text{ de cerca e } 400 \times 39062,50 = 15625000m^2, \text{ ou seja, } 15,625Km^2 \text{ de área cercada.}$$

Nível 3

1. A letra P representará um número par e a letra I , um número ímpar.

Vamos construir seqüências observando, inicialmente, a condição (i), e depois, as condições (i) e (ii).

A seqüência começa com um número par (P) ou com um número ímpar (I).

(1) Começando com PAR, temos dois casos:

(a) O segundo termo é par. Então, obtemos a seqüência abaixo, obedecendo a condição (i): PPPP (4 termos).

Observe que a seqüência não pode prosseguir sem ferir a condição (i) ou (ii).

(b) O segundo termo é ímpar. Neste caso, temos: PIIPI (5 termos).

E a seqüência pára aí.

(2) Começando por ÍMPAR:

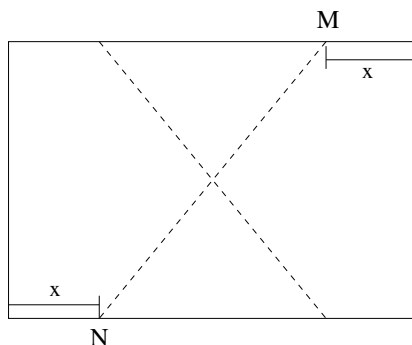
(a) Segundo termo ímpar: IIPPI (4 termos).

(b) Segundo termo par: IPIIPI (6 termos).

Logo, o número máximo de termos que a seqüência pode ter é 6.

2. SOLUÇÃO DE GEHAN DIAS (MEDALHISTA DE PRATA)

Se nós juntarmos os vértices opostos do retângulo, dobrando e desdobrando, ficará a seguinte marca:



Conclui-se, então, que as duas medidas em destaque possuem o mesmo valor: x .

$$\begin{aligned}
(a - 2x)^2 + b^2 &= \overline{MN} \\
a^2 - 4ax + 4x^2 + b^2 &= \overline{MN}^2 \\
a - 4a \left(\frac{a^2 - b^2}{2a} \right) + 4 \left(\frac{a^2 - b^2}{2a} \right) + b^2 &= \overline{MN}^2 \\
a^2 + \frac{(-4a^3 + 4ab^2)}{2a} + 4 \left(\frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{4a^2} \right) + b^2 &= \overline{MN}^2 \\
a^2 + \frac{(-4a^3 + 4ab^2)}{2a} + \frac{(4a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4)}{4a^2} + b^2 &= \overline{MN}^2 \\
\frac{4a^4 - 8a^4 + 8a^2b^2 + 4a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4 + 4a^2b^2}{4a^2} &= \overline{MN}^2 \\
\frac{4b^4 + 4a^2b^2}{4a^2} &= \overline{MN}^2 \\
\frac{4(b^4 + a^2b^2)}{4a^2} &= \overline{MN}^2 \\
\frac{b^4 + a^2b^2}{a^2} &= \overline{MN}^2 \\
\frac{b^2(b^2 + a^2)}{a^2} &= \overline{MN}^2 \\
\overline{MN} &= \sqrt{\frac{b^2(b^2 + a^2)}{a^2}} \\
\overline{MN} &= \frac{b}{a} \sqrt{b^2 + a^2}.
\end{aligned}$$

3. Veja a solução do problema nº1 do Nível 2.

SOLUÇÃO DE GUILHERME ROHDEN ECHELMEIER (MEDALHISTA DE OURO)

Com o decorrer do tempo:

$$A = 1, B = 0, C = 0;$$

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = 0;$$

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{4};$$

$$A = \frac{1}{8}, B = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}, C = \frac{1}{4};$$

$$A = \frac{1}{16}, B = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}, C = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}.$$

Repetindo o processo, indefinidamente, até o vaso A ficar vazio:

$$A = 0; B = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots; C = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \dots$$

Note que ambas as quantidades são somas de progressões geométricas infinitas.

Trabalhando primeiro com o vaso B :

$$a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

E, no vaso C , sobra a quantidade restante: $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Também pode-se chegar a esse resultado usando soma de progressões geométricas, com $a_1 = \frac{1}{4}$.

Logo, $\frac{2}{3}$ do volume total de água ficariam em B e $\frac{1}{3}$ restante ficaria em C .

4. Sejam O o centro da circunferência e C o vértice do ângulo reto.

A área do segmento circular (região compreendida entre o arco \widehat{AB} e a corda \overline{AB}) é fixa. Então, para maximizar o recorte, devemos maximizar a área do triângulo retângulo $\triangle ABC$ de hipotenusa fixada \overline{AB} (corda correspondente a um ângulo central de 60° , ou seja, $AB = R$).

Mas o triângulo retângulo, com hipotenusa fixada, de área máxima, é o triângulo isósceles (o ponto C percorre uma semicircunferência, e a altura h em relação à hipotenusa será máxima quando $h = \frac{AB}{2}$). Observe a figura a seguir:

$x^2 - kx + 1 \geq 0$, na qual a igualdade deve ser atingida.

Mas, então, o polinômio quadrático $x^2 - kx + 1$ deve ter uma raiz dupla, ou seja,

$$\Delta = k^2 - 4 = 0.$$

Segue-se que $k = \pm 2$. Como $k > 0$, temos $k = 2$.

Você Sabia? Ramanujan foi um indiano que gostava muito de matemática. Não conseguiu passar no vestibular, pois só estudava matemática. Obteve resultados fascinantes na teoria de números. Foi descoberto e levado para Cambridge, Inglaterra, e se tornou membro da Royal Society, a famosa instituição científica britânica, mesmo sem ter estudos e uma orientação formal em ciências ou matemática. Em 2005, a ICTP (International Center for Theoretical Physics), da Itália, e o Fundo Niels Abel, da Noruega, estabeleceram o Prêmio Ramanujan, que irá agraciá-lo anualmente jovens talentos matemáticos de países em desenvolvimento. Eles já têm o primeiro ganhador: o brasileiro Marcelo Viana, do IMPA, no Rio de Janeiro.

Premiados

(em ordem alfabética por nível e por medalha)

Nível 1

Ouro

- Letícia Perini (E. E. F. Emir Ropelato)

Prata

- Denise Albertazzi Gonçalves (Centro Educacional Menino Jesus)
- Fábio Murilo Kamer Cristofolini (E. M. E. F. Anna Töwe Nagel)
- Gabriela Letícia Melo de Souza (Kumon - Curso)
- Gustavo Dela Bruna Noronha (Colégio Criativo)
- Igor Hinnig Wolniewicz (Centro Educacional Menino Jesus)
- João Marcelo Bittencourt Lima (Colégio Dehon)
- Lucas Pereira Zarbato (Colégio Coração de Jesus)

Bronze

- Beatriz Anselmo Pereira (Colégio Dehon)
- Bruno Silveira Ferrari (Centro Educacional Menino Jesus)
- Bruna Fischer Dos Santos (Colégio Santo Antônio)
- Bruna Hartmann (E. M. Erwin Prade)
- Eliza Back de Almeida (Colégio Coração de Jesus)
- Gabriel Thom (Colégio Sinodal Ruy Barbosa)
- Isadora Schramm Deschamps (Escola Sarapiquí)
- Jéssica Goedert Pereira (Colégio Catarinense)

- Kaio Gabriel da Silveira Rosa (Alpha Objetivo)
- Lucas Aquino Morem (Sociedade Divina Providência Colégio Sagrada Família)
- Luis Gustavo Longen (Colégio Sinodal Ruy Barbosa)
- Marcei Fernandes da Rosa Pereira (Colégio dos Santos Anjos)
- Mateus Domingos da Silva e Silva (Colégio Catarinense)
- Natsue Eccel Mizubuti (Colégio Santo Antônio)
- Pâmela Ruthes (Centro Educacional Canguru)
- Rogério Hannemann Júnior (E. E. B. Orestes Guimarães)

Menção Honrosa

- Aline Amorim Graf (Colégio Cenecista São José)
- Arthur S. Cordeiro (Escola Barão do Rio Branco)
- Analiz Hüntemann Garcia (Colégio Carrossel)
- Bruno de Brida (Alpha Objetivo)
- Brunela Francine da Cunha (Colégio Visão)
- Cassiano Laurentino Lopes (Colégio Visão)
- Charles Wernke (E. E. B. General Osvaldo Pinto da Veiga)
- Denner Augusto Tinelli (Centro Educacional SATC)
- Eduardo Joaquim Vieira (E. E. B. Conselheiro Mafra)
- Felipe Bernardo Pigari (Alpha Objetivo)
- Filipe Uggioni Pisoni (Centro Educacional SATC)
- Filipe Zorzo (Colégio Catarinense)
- Guilherme Bachmann (E. M. E. F. Anna Töwe Nagel)

- Guilherme Faggion Sponhole (Colégio Catarinense)
- Gustavo Guimarães Gonçalves (Colégio dos Santos Anjos)
- Helena Carolina Rengel Koch (Centro Educacional Canguru)
- Jackson José Lessa (Áster Centro Educacional)
- João Marcos Warmling Dudy (Colégio dos Santos Anjos)
- Jordy Roney Withoeft (E. M. E. F. Santo Antônio)
- José Guilherme de Bem Gouvêa (Centro Educacional Menino Jesus)
- Julia Hoffmann Buratto (Colégio Catarinense)
- Louise Kuchenbecker (Centro Educacional Roda Pião Ltda)
- Lucas André Dos Santos (E. M. E. F. Maria Nilda Salai Stähelin)
- Lucas Rodrigues de Souza (Colégio Santo Antônio)
- Mariana de Oliveira Bortolatto (Colégio de Navegantes Ferreira Piske)
- Matheus Henrique Stofela Sarolli (Colégio Sinodal Ruy Barbosa)
- Pâmela de Lima dos Santos (E. B. M. Beatriz de Souza Brito)
- Pedro Rocha Zacheu (E. B. M. Beatriz de Souza Brito)
- Tiago Luiz Tambosi (Colégio Catarinense)
- Vinícius de Souza Godim de Oliveira (Educandário Imaculada Conceição)

Nível 2

Ouro

- Brenda Schmitt de Araújo de Mattos (E. E. B. Feliciano Pires)
- Bruno Müller Stoeberl (Colégio Cenecista São José)
- Carlos Filipe Klahold (Colégio dos Santos Anjos)

- Filipe Eduardo Moecke (Escola Sarapiquá)
- Natan Cardoso Leal (E. E. B. Orestes Guimarães)
- Paula do Vale Pereira (Educandário Imaculada Conceição)
- Renan Henrique Finder (Colégio dos Santos Anjos)

Prata

- Beatriz S. S. Gonçalves (Colégio Coração de Jesus)
- Camille F. Mattos (Educandário Imaculada Conceição)
- Eduardo Recktenvald Graeff (Colégio Catarinense)
- José Carlos Medeiros (Colégio Santo Antônio)
- Leonardo Bruno Pereira de Moraes (Escola Sarapiquá)
- Luiz Gustavo Cordeiro (Colégio Catarinense)
- Nivaldo Stankiewicz Júnior (Colégio dos Santos Anjos)
- Philippi Farias Rachadel (Educandário Imaculada Conceição)
- Ruana Maíra Schneider (E. M. E. F. Alberto Bauer)
- Sérgio Feldemann de Quadros (Colégio Salesiano Itajaí)
- Thiago B. Moreno (Escola Barão do Rio Branco)
- Vinícius Rios Fuck (Colégio Elisa Andreoli)

Bronze

- Anderson Sbardelatti (E. M. E. F. Anna Töwe Nagel)
- Camila de Oliveira Macedo (Centro Educacional Menino Jesus)
- Guido Quint Tonelli Santos (Educandário Imaculada Conceição)
- Jéssica Jacques (Colégio Coração de Jesus)

- Leonardo Sgnaolin (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Maria Carolina Casa Souza (Colégio Salesiano Itajaí)
- Pedro Henrique Bardini Gonçalves (Colégio Internacional)
- Pietro José Bertuzzi (Colégio Elisa Andreoli)
- Rafael Rogério Santos (Centro Educacional Roda Pião Ltda)
- Theodor - Wilhelm Adler (Colégio da Lagoa)
- Vinicius Benetti Miola (Colégio Cenecista Padre Anchieta)
- Wagner Daufenbach Do Amaral (A. B. P. - Colégio São Bento)

Menção Honrosa

- Acácio Andruczewicz (E. M. Maurício Germer)
- Aline Péterle (E. E. B. M. Aurora Péterle)
- Ana Paula Esnidei Pereira (Colégio Nossa Senhora de Fátima)
- Arthur Gomes Füllgraf (Colégio Catarinense)
- Camila Tormena (Colégio Santo Antônio)
- Caroline Knabben (Colégio Dehon)
- Daiane Lara Nora (Colégio Cenecista Padre Anchieta)
- Danilo Torres Dos Reis (E. E. F. Educar)
- Débora Tomazi Pereira (Sociedade Divina Providência Colégio Sagrada Família)
- Douglas Machado Vieira (Colégio Catarinense)
- Fabrício W. Fernandes (E. E. B. Prefeito Avelino Müller)
- Gabriel Medeiros (Alpha Objetivo)
- Geisla Thamara de Abreu (Colégio Dom Bosco)

- Gilian Araújo Cezário (Escola de Educação Básica Belisário Pena)
- Giovane Bortolato (Colégio de Navegantes Ferreira Piske)
- Gisele Simonetti (E. E. B. Orestes Guimarães)
- Guilherme de Faveri (Escola Barão do Rio Branco)
- Gustavo da Silva Machado (Fundação Bradesco)
- Helene Bianca Burg Cordeiro (Colégio de Aplicação da Univali)
- Hiury Harrisson dos Santos (Colégio Dom Orione)
- Igor Piacentini Coelho da Costa (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Indianara Hugen (E. E. B. Conselheiro Mafra)
- Isadora Thiesen Silva (Centro Educacional Menino Jesus)
- Ismael Rodrigues Silva (E. B. M. Beatriz de Souza Brito)
- Jean Augusto Rengel (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)
- Jéssica Fachinello (E. E. F. Educar)
- João Vitor Bardini Gonçalves (Colégio Internacional)
- Jonathan Heidemann Hoepers (E. M. E. F. Albano Kanzler)
- Júlia Dos Santos Bathke (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Karla Juraci Gulini (E. E. B. João Colin)
- Karolina Pereira Martins (Colégio Carrossel)
- Larissa de Oliveira (Colégio Elisa Andreoli)
- Larissa Miranda Heinisch (Colégio Coração de Jesus)
- Lucas Francisco (E. M. Bento Elói Garcia)
- Marcos Eduardo de Farias (Centro Educacional Roda Pião Ltda)
- Marina Deschamps Silveira (Escola Sarapiquí)

- Martin Vincent Bloedorn (Sociedade Divina Providência Colégio Sagrada Família)
- Mateus Bastian Barbosa Cordeiro (Colégio Dehon)
- Mayra Trierveiler (Conjunto Educacional Dr Blumenau)
- Nathalia A. Ferreira (E. E. B. Professor José Brasilício)
- Nickson Della Giustina (Escola Barão do Rio Branco)
- Patrícia Cristina Ribeiro (Centro Educacional Menino Jesus)
- Regiane Francieli Gonçalves (E. B. M. Prefeito Augusto Althoff)
- Renan de Souza (E. M. E. F. Alberto Bauer)
- Thiago Rubens Vieira Ebel (Sociedade Divina Providência Colégio Sagrada Família)
- Useche dos Santos Inchauspe (Colégio da Lagoa)
- Vitor Costa Fabris (A. B. P. - Colégio São Bento)
- Vitoria Dal - Ri Pagani (Escola Sarapiquí)

Nível 3

Ouro

- Guilherme Rohden Echerlmeier (Colégio de Aplicação da UNIVALI)

Prata

- Gehan Dias (Colégio Santo Antônio)
- Jaqueline Hoffmann (Colégio Henry Ford Ltda)
- José Artur Silveira Teixeira (Colégio Catarinense)

Bronze

- Bruno Bernado Teixeira (Colégio Carrossel)

- Bruno Madeira (Colégio Salesiano Itajaí)
- Carolina Faller Moura (Colégio Dom Bosco)
- Cristine Yohana Ribas (Alpha Objetivo)
- Filipppe Frigo Furtado (Colégio Visão)
- Guilherme Claudino (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Haifang Nehls (Sociedade Educacional de Santa Catarina)
- Ivo Ferreira Da Silva Minikowski (Colégio Salesiano Itajaí)
- José Roberto Cordeiro (Colégio Catarinense)
- Laura Luisa Medeiros de Souza (Kumon - Joaçaba)
- Ricardo Müller (Sociedade Educacional de Santa Catarina)
- Roberta Muriel Longo Roepke (Colégio Henry Ford Ltda)
- Ruan Ricardo Rengel (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)
- Thiago Israel Ramalho Bacic (Colégio Catarinense)
- Thiago Monteiro Zanluca (Sociedade Educacional de Santa Catarina)
- Thomas Eduardt Hafemann (Conjunto Educacional Dr Blumenau)

Menção Honrosa

- Alexandre Fernandes Fossari (Curso e Colégio Lavoisier)
- Ana Carolina Mayr (Colégio Catarinense)
- Ana Paula Alves Monteiro (Colégio Dom Jaime Câmara)
- André Luís Porporatti (A. B. P. - Colégio São Bento)
- Bárbara Dressel (Sociedade Educacional de Santa Catarina)
- Cintya Kazue Sakamoto (CEFET-Florianópolis)

- Giuliana Sardi Venter (Escola Barão do Rio Branco)
- Joel Heron Freitas (Escola Agrotécnica Federal de Sombrio)
- Leonardo Silva Alves (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Nelisa Helena Rocha (Curso e Colégio Energia)
- Paulo Christian Sedrez (Escola Barão do Rio Branco)
- Petrius Paulo Tambosi (Conjunto Educacional Dr Blumenau)
- Rafael Westphal (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Tiago Madeira (Colégio Salesiano Itajaí)
- Victor Rodolfo Pereira Lopes (Colégio Catarinense)

Escolas Participantes

1. Alpha Objetivo (São José)
2. Associação Beneditina da Providência - Colégio São Bento (Criciúma)
3. Associação Religiosa Beneficente Jesus Maria José (São Miguel do Oeste)
4. Áster Centro Educacional (Balneário Camboriú)
5. Centro de Educação Profissional Getúlio Vargas (São Miguel do Oeste)
6. Centro Educacional Canguru (Jaraguá do Sul)
7. Centro Educacional Céu Azul - Colégio Cosmos (Porto União)
8. Centro Educacional Fraiburgo (Fraiburgo)
9. Centro Educacional Interativo Ltda. ME (São José)
10. Centro Educacional Lucaz (Florianópolis)
11. Centro Educacional Margirus (Balneário Camboriú)
12. Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis)
13. Centro Educacional Municipal Jardim Solemar (São José)
14. Centro Educacional Roda Pião Ltda (Palhoça)
15. Centro Educacional SATC (Criciúma)
16. Centro Educacional Timbó S/A (Timbó)
17. Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina (Florianópolis)
18. Centro Municipal de Educação Girassol (São José do Cedro)
19. Colégio Antônio Peixoto (Florianópolis)
20. Colégio Carrossel (Palhoça)
21. Colégio Catarinense (Florianópolis)
22. Colégio Cenecista Padre Anchieta (Capinzal)

23. Colégio Cenecista São José (Rio Negrinho)
24. Colégio Coração de Jesus (Florianópolis)
25. Colégio Criativo (Florianópolis)
26. Colégio Cruz e Sousa (Florianópolis)
27. Colégio Cruz e Sousa (Lages)
28. Colégio da Lagoa (Florianópolis)
29. Colégio da Univille (Joinville)
30. Colégio de Aplicação da UFSC (Florianópolis)
31. Colégio de Aplicação da Univali (Itajaí)
32. Colégio de Navegantes Ferreira Piske (Navegantes)
33. Colégio Dehon (Tubarão)
34. Colégio Dehon/Unisul (Araranguá)
35. Colégio Divina Providência (Jaraguá do Sul)
36. Colégio Dom Bosco (Rio do Sul)
37. Colégio Dom Jaime Câmara (São José)
38. Colégio Dom Orione (Siderópolis)
39. Colégio dos Santos Anjos (Joinville)
40. Colégio Elisa Andreoli (São José)
41. Colégio Energia (Brusque)
42. Colégio Energia (Itajaí)
43. Colégio Estadual Professora Elza Henriqueta Techentin Pacheco (Blumenau)
44. Colégio Evangélico Jaraguá (Jaraguá do Sul)
45. Colégio Evidência Ltda (Balneário Camboriú)

46. Colégio Evolução (São Ludgero)
47. Colégio Henry Ford Ltda (Timbó)
48. Colégio Internacional (Blumenau)
49. Colégio Machado de Assis (Joinville)
50. Colégio Madre Francisca Lampel (Gaspar)
51. Colégio Mafrense (Mafra)
52. Colégio Martins & Souza (São José)
53. Colégio Nossa Senhora de Fátima (Florianópolis)
54. Colégio Rogacionista Pio XII (Criciúma)
55. Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí)
56. Colégio Santíssima Trindade (Joaçaba)
57. Colégio Santo Antônio (Joinville)
58. Colégio Santo Antônio (Rodeio)
59. Colégio São José (Itajaí)
60. Colégio Sinodal Ruy Barbosa (Rio do Sul)
61. Colégio Superação (Videira)
62. Colégio Tradição (Florianópolis)
63. Colégio Visão (São José)
64. Conjunto Educacional Dr. Blumenau (Pomerode)
65. Curso e Colégio Energia (Florianópolis)
66. Curso e Colégio Lavoisier (São José)
67. E. B. M. Almirante Barroso (Pomerode)
68. E. B. M. Beatriz de Souza Brito (Florianópolis)

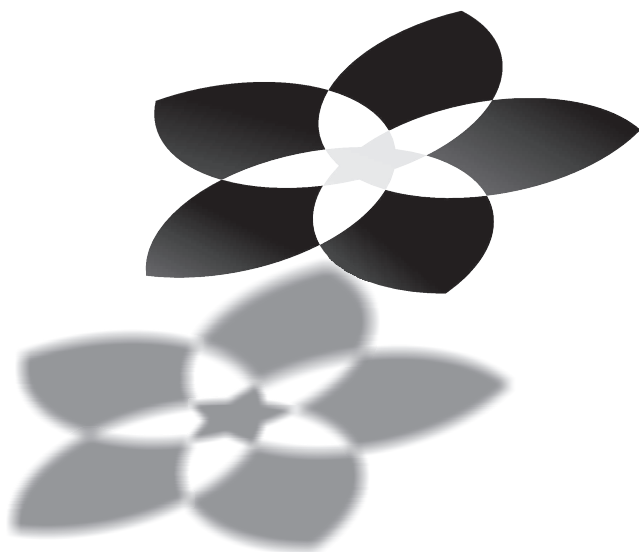
69. E. B. M. Curt Brandes (Pomerode)
70. E. B. M. Dr. Amadeu da Luz (Pomerode)
71. E. B. M. Duque de Caxias (Pomerode)
72. E. B. M. Friedrich Karl Kemelmmeir (Blumenau)
73. E. B. M. Hermann Guenther (Pomerode)
74. E. B. M. Luiz Cândido da Luz (Florianópolis)
75. E. B. M. Olavo Bilac (Pomerode)
76. E. B. M. Pomerode Fundos (Pomerode)
77. E. B. M. Prefeito Augusto Althoff (Santo Amaro da Imperatriz)
78. E. B. M. Presidente Castelo Branco (Canoinhas)
79. E. E. B. Aleixo Dellagiustina (Ituporanga)
80. E. E. B. Barão do Rio Branco (Urussanga)
81. E. E. B. Belisário Pena (Capinzal)
82. E. E. B. Conselheiro Astrogildo Odom Aguiar (Barra Velha)
83. E. E. B. Conselheiro Mafra (Joinville)
84. E. E. B. Coronel Antônio Lehmkuhl (Águas Mornas)
85. E. E. B. Dom Pio de Freitas (Joinville)
86. E. E. B. Domingos Sávio (Ascurra)
87. E. E. B. Feliciano Pires (Brusque)
88. E. E. B. Francisco Maciel Bageston (Paial)
89. E. E. B. Frei Rogério (Ponte Alta do Norte)
90. E. E. B. General Osvaldo Pinto da Veiga (Capivari de Baixo)
91. E. E. B. Henrique Midon (Itajaí)

92. E. E. B. Ignácio Stakowski (Içara)
93. E. E. B. Irmã Maria Teresa (Palhoça)
94. E. E. B. Irmão Joaquim (Ibicaré)
95. E. E. B. João Colin (Joinville)
96. E. E. B. João Gaya (Luiz Alves)
97. E. E. B. Julia Baleoli Zaniolo (Canoinhas)
98. E. E. B. Kyrana Lacerda (Vargeão)
99. E. E. B. M. Aurora Péterle (Siderópolis)
100. E. E. B. Maestro Francisco Manoel da Silva (Joinville)
101. E. E. B. Osvaldo Aranha (Joinville)
102. E. E. B. Prefeito Avelino Muller (Biguaçu)
103. E. E. B. Presidente Juscelino Kubitschek (São José)
104. E. E. B. Presidente Prudente de Moraes (Pomerode)
105. E. E. B. Professor Américo Vespúcio Prates (São José)
106. E. E. B. Professor Anísio Teixeira (Florianópolis)
107. E. E. B. Professor João Martins Veras (Joinville)
108. E. E. B. Professor Jose Brasilicio (Biguaçu)
109. E. E. B. Professor Laureano Pacheco (Balneário Camboriú)
110. E. E. B. Professora Emérita Duarte da Silva e Souza (Biguaçu)
111. E. E. B. Professora Justina da Conceição Silva (Imbituba)
112. E. E. B. Protásio Joaquim da Cunha (Sombrio)
113. E. E. B. Regente Feijó (Lontras)
114. E. E. B. Roberto Moritz Roberto Moritz (Ituporanga)

115. E. E. B. Rosinha Campos (Florianópolis)
116. E. E. B. Tenente Anselmo José Hess (Luiz Alves)
117. E. E. B. Valério Gomes (Ilhota)
118. E. E. F. Ângelo Dognini (Brusque)
119. E. E. F. Demetrio Bettiol (Cocal do Sul)
120. E. E. F. Educar (Itapema)
121. E. E. F. Luiz Delfino (Schroeder)
122. E. E. F. Oscar Maluche (Brusque)
123. E. E. F. Professor Emir Ropelato (Timbó)
124. E. E. F. Professor José Vieira Corte (Brusque)
125. E. E. F. Professora Georgina de Carvalho Ramos da Luz (Brusque)
126. E. E. F. Rotary Club Companheiros Ayres Gevaerd (Brusque)
127. E. E. M. Antônio Knabben (Gravatal)
128. E. E. M. Dr. Ruben Roberto Schmidlin (Joinville)
129. E. E. M. Rio do Pinho (Canoinhas)
130. E. E. M. Yvonne Olinger Appel (Brusque)
131. E. M. Alberto Schmitt (Ilhota)
132. E. M. Bento Elói Garcia (Itapema)
133. E. M. E. F. Albano Kanzler (Jaraguá do Sul)
134. E. M. E. F. Alberto Bauer (Jaraguá do Sul)
135. E. M. E. F. Anna Töwe Nagel (Jaraguá do Sul)
136. E. M. E. F. Itinerante M^a Alice Wolff Souza (Lages)
137. E. M. E. F. Jonas Alves de Souza (Jaraguá do Sul)

138. E. M. E. F. Maria Nilda Salai Stähelin (Jaraguá do Sul)
139. E. M. E. F. Max Schubert (Jaraguá do Sul)
140. E. M. E. F. Rodolpho Dornbusch (Jaraguá do Sul)
141. E. M. E. F. Santo Antônio (Rodeio)
142. E. M. E. F. Waldemar Schmitz (Jaraguá do Sul)
143. E. M. Erwin Prade (Timbó)
144. E. M. Governador Pedro Ivo Campos (Joinville)
145. E. M. Joaquim Vicente de Oliveira (Itapema)
146. E. M. Luiz Francisco Vieira (Itapema)
147. E. M. Maria Linhares de Souza (Itapema)
148. E. M. Maurício Germer (Timbó)
149. E. M. Oswaldo dos Reis (Itapema)
150. E. M. Padre Martinho Stein (Timbó)
151. E. M. Tomaz Francisco Garcia (Balneário Camboriú)
152. E. M. Viver e Conhecer (Capinzal)
153. Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis)
154. Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul (Rio do Sul)
155. Escola Agrotécnica Federal de Sombrio (Santa Rosa do Sul)
156. Escola Barão do Rio Branco (Blumenau)
157. Escola da Ilha (Florianópolis)
158. Escola Núcleo São Rafael (Seara)
159. Escola Sarapiquá (Florianópolis)
160. Escola Técnica Tupy (São Bento do Sul)

- 161. Escola Vivência (Florianópolis)
- 162. Fundação Bradesco (Laguna)
- 163. Instituto Maria Auxiliadora (Rio do Sul)
- 164. Kumon - Curso (Florianópolis)
- 165. Kumon - Joaçaba (Joaçaba)
- 166. Kumon - Unidade São Bento do Sul (São Bento do Sul)
- 167. Kumon Método de Matemática (Balneário Camboriú)
- 168. Núcleo Pedagógico Rural de Joaçaba (Joaçaba)
- 169. Senai/CTEMM de Joinville (Joinville)
- 170. Senai/Itajaí (Itajaí)
- 171. Senai/SC Jaraguá do Sul (Jaraguá do Sul)
- 172. Sociedade Divina Providência Colégio Sagrada Família (Blumenau)
- 173. Sociedade Educacional de Santa Catarina (Joinville)
- 174. Sociedade Educacional Verde Vale Ltda (Blumenau)



Artigo

Seqüências Recorrentes

Carlos Gustavo Moreira

IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Rio de Janeiro - RJ

Seqüências Recorrentes

Seqüências recorrentes são seqüências x_0, x_1, x_2, \dots em que cada termo é determinado por uma dada função dos termos anteriores. Dado um inteiro positivo k , uma *seqüência recorrente de ordem k* é uma seqüência em que cada termo é determinado como uma função dos k termos anteriores:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_{n+1}, x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com essa generalidade, o estudo geral de seqüências recorrentes se confunde em larga medida com a teoria dos Sistemas Dinâmicos, e o comportamento de tais seqüências pode ser bastante caótico e de descrição muito difícil, mesmo qualitativamente. Um caso particular muito importante ocorre quando a função f é linear: existem constantes c_1, c_2, \dots, c_n com

$$x_{n+k} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \dots + c_k x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tais seqüências são conhecidas como seqüências recorrentes lineares, e generalizam simultaneamente as progressões geométricas, aritméticas e os polinômios. Estas seqüências serão o objeto principal dessas notas. Não obstante, algumas recorrências não-lineares serão consideradas, como a recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, que tem grande interesse do ponto de vista de sistemas dinâmicos e por suas aplicações à teoria dos números.

Essas notas, adaptadas do texto de um mini-curso dado pelo autor na II Bienal da SBM, são inspiradas no excelente livreto “Seqüências Recorrentes”, de A. Markuchevitch, publicado na coleção “Iniciação na matemática”, da editora MIR, no qual o autor aprendeu bastante sobre o tema no início de sua formação matemática. A seção 4, onde é deduzida a fórmula para o termo geral de uma seqüência recorrente linear, é

adaptada do artigo “Equações de recorrência”, de Héctor Soza Pollman, publicado no número 9 da revista Eureka! (de fato, o artigo original submetido à revista enunciava esta fórmula sem demonstração, a qual foi incluída no artigo pelo autor destas notas, que é um dos editores da Eureka!).

1 – Seqüências recorrentes lineares:

Uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência recorrente linear de ordem k (em que k é um inteiro positivo) se existem constantes (digamos reais ou complexas) c_1, c_2, \dots, c_k tais que

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j x_{n+k-j} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \dots + c_k x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tais seqüências são determinadas pelos seus k primeiros termos x_0, x_1, \dots, x_{k-1} .

Os exemplos mais simples (e fundamentais, como veremos a seguir) de seqüências recorrentes lineares são as progressões geométricas: se $x_n = a \cdot q^n$ então $x_{n+1} = qx_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde (x_n) é uma seqüência recorrente linear de ordem 1.

Se (x_n) é uma progressão aritmética, existe uma constante r tal que $x_{n+1} - x_n = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e logo $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (x_n) é uma seqüência recorrente linear de ordem 2.

Se $x_n = P(n)$ onde P é um polinômio de grau k , então (x_n) satisfaz a recorrência linear de ordem $k + 1$ dada por

$$x_{n+k+1} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k+1}{j+1} x_{n+k-j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Isso é evidente se $k = 0$ (isto é, se P é constante), pois nesse caso (*) se reduz a $x_{n+1} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e o caso geral pode ser provado por indução: se P é um polinômio de grau $k \geq 1$ então $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ é um polinômio de grau $k - 1$, donde $y_n = x_{n+1} - x_n = Q(n)$ satisfaz a recorrência

$$y_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1} y_{n+k-1-j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ donde}$$

$$x_{n+k+1} - x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1} (x_{n+k-j} - x_{n+k-j-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e, logo,

$$x_{n+k+1} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j+1} x_{n+k-j} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k+1}{j+1} x_{n+k-j}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Um outro exemplo é dado por seqüências do tipo $x_n = (an + b) \cdot q^n$, em que a, b e q são constantes. Temos que $x_{n+1} - qx_n = (a(n+1) + b)q^{n+1} - q(an + b) \cdot q^n = q^{n+1}(a(n+1) + b - (an + b)) = aq^{n+1}$ é uma progressão geométrica de razão q , e logo $x_{n+2} - qx_{n+1} = q(x_{n+1} - qx_n)$, donde $x_{n+2} = 2qx_{n+1} - q^2x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto, (x_n) é uma seqüência recorrente linear de ordem 2.

Vamos agora considerar a famosa e popular seqüência de Fibonacci, dada por $u_0 = 0, u_1 = 1$ e $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Seus primeiros termos são $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, u_8 = 21, \dots$. Mostraremos na próxima seção como achar uma fórmula explícita para seu termo geral u_n em função de n , o que será generalizado para seqüências recorrentes lineares quaisquer, e veremos algumas de suas propriedades aritméticas.

Antes, porém, concluiremos esta seção com alguns fatos gerais sobre seqüências recorrentes lineares, que serão úteis nas seções subsequentes.

O conjunto das seqüências que satisfazem uma dada recorrência linear

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j x_{n+k-j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

é um *espaço vetorial*, isto é, dadas duas seqüências (y_n) e (z_n) que satisfazem esta recorrência (ou seja, $y_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j y_{n+k-j}$ e $z_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j z_{n+k-j}, \forall n \in \mathbb{N}$) e uma constante a , a seqüência (w_n) dada por $w_n = y_n + az_n$ satisfaz a mesma recorrência: $w_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j w_{n+k-j}, \forall n \in \mathbb{N}$.

É bastante usual, dada uma seqüência (x_n) , estudar a seqüência obtida pela soma de seus n primeiros termos $s_n = \sum_{k \leq n} x_k$. Se (x_n) é uma seqüência recorrente linear, (s_n) também é. De fato, $s_{n+1} - s_n = \sum_{k \leq n+1} x_k - \sum_{k \leq n} x_k = x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se $x_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j x_{n+k-j}$, temos $s_{n+k+1} - s_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j (s_{n+k+1-j} - s_{n+k-j})$,

$\forall n \in \mathbb{N}$, donde

$$s_{n+k+1} = (1 + c_1)s_{n+k} + \sum_{j=1}^{k-1} (c_{j+1} - c_j)s_{n+k-j} - c_k s_n = \sum_{i=1}^{k+1} d_i s_{n+k+1-i}$$

em que $d_1 = 1 + c_1$, $d_i = c_i - c_{i-1}$ para $2 \leq i \leq k$ e $d_{k+1} = -c_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto, (s_n) é uma seqüência recorrente linear de ordem $k + 1$.

2 – A seqüência de Fibonacci:

A seqüência de Fibonacci é definida por $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ e $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Queremos achar uma fórmula explícita para u_n em função de n . Para isso usaremos uma idéia que será bastante útil também no caso geral: procuraremos progressões geométricas que satisfazem a mesma recorrência que (u_n) : se $x_n = a \cdot q^n$ com a e q não nulos satisfaz $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, teremos $a \cdot q^{n+2} = a \cdot q^{n+1} + a \cdot q^n = a \cdot q^n (q + 1)$, donde $q^2 = q + 1$. Temos assim dois valores possíveis para q : as duas raízes da equação $q^2 - q - 1 = 0$, que são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim, seqüências da forma $a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ e da forma $b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ satisfazem a recorrência acima, bem como seqüências da forma $y_n = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, pela observação da seção anterior.

Basta agora encontrar valores de a e b tais que $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$ para que tenhamos $y_n = u_n$ para todo n (de fato, teríamos $y_0 = u_0$, $y_1 = u_1$ e, por indução se $k \geq 2$ e $y_n = u_n$ para todo $n < k$, temos $y_k = y_{k-1} + y_{k-2} = u_{k-1} + u_{k-2} = u_k$). Para isso, devemos ter:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

e, portanto, $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Mostramos, assim, que

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

É curioso que na fórmula do termo geral de uma seqüência de números inteiros definida de modo tão simples quanto, (u_n) , apareçam números irracionais.

Provaremos a seguir uma identidade útil sobre números de Fibonacci:

Proposição: $u_{m+n} = u_m u_{n-1} + u_{m+1} u_n, \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Prova: Sejam $y_m = u_{m+n}$ e $z_m = u_m u_{n-1} + u_{m+1} u_n$. Temos que (y_n) e (z_n) satisfazem a recorrência $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $y_0 = u_n, y_1 = u_{n+1}, z_0 = 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_n = u_n = y_0$ e $z_1 = 1 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_n = u_{n+1} = y_1$ e, portanto, como antes, $z_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Podemos usar este fato para provar o seguinte interessante fato aritmético sobre a sequência (u_n) , que pode ser generalizado para as chamadas sequências de Lucas, as quais são úteis para certos testes de primalidade:

Teorema: $\text{mdc}(u_m, u_n) = u_{\text{mdc}(m,n)}, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Prova: Observemos primeiro que $\text{mdc}(u_n, u_{n+1}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Isso vale para $n = 0$ pois $u_1 = 1$ e, por indução, $\text{mdc}(u_{n+1}, u_{n+2}) = \text{mdc}(u_{n+1}, u_{n+1} + u_n) = \text{mdc}(u_{n+1}, u_n) = 1$. Além disso, se $m = 0, \text{mdc}(u_m, u_n) = \text{mdc}(0, u_n) = u_n = u_{\text{mdc}(m,n)}, \forall n \in \mathbb{N}$, e se $m = 1, \text{mdc}(u_m, u_n) = \text{mdc}(1, u_n) = 1 = u_1 = u_{\text{mdc}(m,n)}, \forall n \in \mathbb{N}$. Vamos então provar o fato acima por indução em m . Suponha que a afirmação do enunciado seja válida para todo $m < k$ (onde $k \geq 2$ é um inteiro dado) e para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos provar que ela vale para $m = k$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, que $\text{mdc}(u_k, u_n) = u_{\text{mdc}(k,n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, se $n < k, \text{mdc}(u_k, u_n) = \text{mdc}(u_n, u_k) = u_{\text{mdc}(n,k)} = u_{\text{mdc}(k,n)}$, por hipótese de indução. Já se $n \geq k, u_n = u_{(n-k)+k} = u_{n-k} u_{k-1} + u_{n-k+1} u_k$, e logo $\text{mdc}(u_k, u_n) = \text{mdc}(u_k, u_{n-k} u_{k-1} + u_{n-k+1} u_k) = \text{mdc}(u_k, u_{n-k} u_{k-1}) = \text{mdc}(u_k, u_{n-k})$ (pois $\text{mdc}(u_k, u_{k-1}) = 1$). Mas $\text{mdc}(u_k, u_{n-k}) = u_{\text{mdc}(k, n-k)} = u_{\text{mdc}(k,n)}$. ■

Corolário: Se $m \geq 1$ e m é um divisor de n então u_m divide u_n . Além disso, se $m \geq 3$ vale a recíproca: se u_m divide u_n então m divide n .

3 – A recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - 2$.

Consideremos as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais que satisfazem a recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Suponha que $x_0 = \alpha + \alpha^{-1}$ para um certo α (real ou complexo). Então, podemos provar por indução que $x_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. De fato, se vale a fórmula para x_n , teremos

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2 = (\alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n})^2 - 2 = \alpha^{2^{n+1}} + 2 + \alpha^{-2^{n+1}} - 2 = \alpha^{2^{n+1}} + \alpha^{-2^{n+1}}.$$

Se $|x_0| > 2$, temos $x_0 = \alpha + \alpha^{-1}$ para $\alpha = \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - 4}}{2} \in \mathbb{R}$.

Se $|x_0| \leq 2$, vale a mesma fórmula para α , mas, nesse caso, α é um número complexo de módulo 1, e pode ser escrito como $\alpha = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Nesse caso, $x_n = e^{2^n i\theta} + e^{-2^n i\theta} = (\cos(2^n \theta) + i \sin(2^n \theta)) + (\cos(2^n \theta) - i \sin(2^n \theta)) = 2 \cos(2^n \theta)$.

Podemos ver isso de outra forma: se $|x_0| \leq 2$, escrevemos $x = 2 \cos \theta$, com $\theta \in [0, \pi]$. Podemos mostrar então, por indução, que $x_n = 2 \cos(2^n \theta)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, $x_{n+1} = x_n^2 - 2 = 4 \cos^2(2^n \theta) - 2 = 2(2 \cos^2(2^n \theta) - 1) = 2 \cos(2^{n+1} \theta)$, pois $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Podemos usar esta expressão para obter diversos tipos de comportamento possível para uma tal sequência (x_n) . Se $x_0 = 2 \cos \theta$ e θ/π é racional e tem representação binária periódica de período m então $(x_n) = (2 \cos(2^n \theta))$ é periódica de período m . Por outro lado, podemos ter $x_0 = 2 \cos \theta$, onde θ/π tem representação binária como

$$0,01000110111000001010011100101110111...$$

em que todas as seqüências finitas de zeros e uns aparecem em algum lugar (isso acontece para a “maioria” dos valores de θ).

Nesse caso, a seqüência $(x_n) = (2 \cos(2^n \theta))$ é densa em $[-2, 2]$, isto é, qualquer ponto de $[-2, 2]$ pode ser aproximado por elementos de (x_n) , com erro arbitrariamente pequeno.

No caso em que x_0 é um inteiro, a seqüência (x_n) pode ter propriedades aritméticas muito interessantes. Em particular, se $x_0 = 4$ (e, logo, $x_n = (2 + \sqrt{3})^{2^n} + (2 - \sqrt{3})^{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$), vale o famoso critério de Lucas-Lehmer para testar a primalidade de números de Mersenne: se $n \geq 3$ então $2^n - 1$ é primo se e somente se $2^n - 1$ é um divisor de x_{n-2} (por exemplo, $2^3 - 1 = 7$ é primo e é um divisor de $x_{3-2} = x_1 = x_0^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$).

Exercício: Seja $x_0 \geq 3$ um inteiro ímpar.

- i) Prove que se p é um número primo então existe, no máximo, um valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que p divide x_n .
- ii) Prove que, se p é um fator primo de x_n , então $p > n$.

Sugestão: Considere a seqüência $x_n \pmod{p}$.

Esse exercício pode ser generalizado para outras recorrências. Nesse caso particular da recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, é possível mostrar um resultado mais forte: se p é um fator primo de x_n então $p \geq 2^{n+2} - 1$ (note que quando $p = 2^q - 1$ é primo, com $q \geq 3$ e $n = q - 2$, vale a igualdade $p = 2^{n+2} - 1$ e $p|x_n$, pelo critério de Lucas-Lehmer enunciado acima).

4 - Fórmulas gerais para seqüências recorrentes lineares:

Considere a equação

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_0 x_n = 0, \quad n \geq 0 \quad (2)$$

em que a_0, \dots, a_k são constantes, e os valores de x_i são conhecidos para $i = 0, \dots, k-1$. Supondo que a equação (2) admite uma solução do tipo: $x_n = \lambda^n$, em que λ é um parâmetro, e substituindo em (2) temos

$$a_k \lambda^{n+k} + a_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \cdots + a_0 \lambda^n = 0.$$

Dividindo por λ^n , obtemos a *equação característica* associada a equação (2)

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_0 \lambda^0 = 0.$$

Vamos mostrar que, se esta equação tem as raízes complexas $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ com multiplicidades $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, respectivamente, então as soluções de (2) são exatamente as seqüências (x_n) da forma $x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \cdots + Q_r(n)\lambda_r^n$, em que Q_1, \dots, Q_r são polinômios com grau(Q_i) $< \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$ (em particular, se λ_i é uma raiz simples então Q_i é constante).

Seja $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_0$ um polinômio.

Definição: Dizemos que uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a propriedade $\text{Rec}(P(x))$ se $a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_0 x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Não é difícil verificar os seguintes fatos:

- i) Se (x_n) e (y_n) satisfazem $\text{Rec}(P(x))$ e $c \in \mathbb{C}$ então $(z_n) = x_n + cy_n$ satisfaz $\text{Rec}(P(x))$.
- ii) Se $Q(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \cdots + b_0$ e (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ então (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x)Q(x))$ (isso segue de $\sum_{j=0}^r b_j (a_k x_{n+j+k} + a_{k-1} x_{n+j+k-1} + \cdots + a_0 x_{n+j}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$).
- iii) (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ se e só se $(y_n) = (x_n / \lambda^n)$ satisfaz $\text{Rec}(P(\lambda x))$ (substitua $x_{n+j} = \lambda^{n+j} y_{n+j}$ em $\sum_{j=0}^k a_j x_{n+j} = 0$).

iv) Se $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$ então (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ se e só se (s_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)P(x))$ (escreva $x_{n+j+1} = s_{n+j+1} - s_{n+j}$ e substitua em $\sum_{j=0}^n a_j x_{n+j+1} = 0$).

Por iii), para ver que, para todo polinômio $Q(x)$ de grau menor que m , $x_n = Q(n)\lambda^n$ satisfaz $\text{Rec}((x-\lambda)^m)$, basta ver que $(y_n) = (Q(n))$ satisfaz $\text{Rec}((x-1)^m)$, o que faremos por indução. Isso é claro quando $m = 1$. Em geral, se $z_n = y_{n+1} - y_n = Q(n+1) - Q(n)$, como $\tilde{Q}(x) = Q(x+1) - Q(x)$ tem grau menor que $m-1$, (z_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)^{m-1})$ (por hipótese de indução) e, logo, por (iv), (y_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)^m)$. Essa observação, combinada com ii) e i), mostra que se $P(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2}\dots(x-\lambda_r)^{\alpha_r}$, e $\text{grau}(Q_i) < \alpha_i$ para $1 \leq i \leq r$, então $x_n = \sum_{i=1}^r Q_i(n)\lambda_i^n$ satisfaz $\text{Rec}(P(x))$.

Para ver que, se (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ então x_n é da forma acima, usaremos indução novamente.

Supomos $\lambda_1 \neq 0$ e tomamos $y_n = x_n/\lambda_1^n$, $z_n = y_{n+1} - y_n$, para $n \geq 0$.

Por iii) e iv), z_n satisfaz $\text{Rec}(P(\lambda_1 x)/(x-1))$ e, portanto, por hipótese de indução, $z_n = \tilde{Q}_1(x) + \tilde{Q}_2(x)(\lambda_2/\lambda_1)^n + \dots + \tilde{Q}_r(x)(\lambda_r/\lambda_1)^n$, em que $\text{grau}(\tilde{Q}_i) < \alpha_i$ para $2 \leq i \leq r$ e $\text{grau}(\tilde{Q}_1) < \alpha_1 - 1$.

Para terminar a prova, vamos mostrar que se existem polinômios P_1, P_2, \dots, P_k tais que $y_{n+1} - y_n = P_1(n) + P_2(n)\beta_2^n + \dots + P_k(n)\beta_k^n$ (em que $1, \beta_2, \dots, \beta_k$ são complexos distintos e $P_i \neq 0, \forall i \geq 2$) então $y_n = \tilde{P}_1(n) + \tilde{P}_2(n)\beta_2^n + \dots + \tilde{P}_k(n)\beta_k^n$, em que $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_k$ são polinômios com grau $P_i = \text{grau } \tilde{P}_i$ para $i \geq 2$ e grau $\tilde{P}_1 = \text{grau } P_1 + 1$, por indução na soma dos graus dos polinômios P_i , em que convencionamos que o grau do polinômio nulo é -1 (no nosso caso temos $\beta_i = \lambda_i/\lambda_1$, e como $x_n = \lambda_1^n y_n$ o resultado segue imediatamente).

Para provar essa afirmação, observamos inicialmente que, se a soma do grau de P_i é -1 , então $y_{n+1} - y_n = 0, \forall n$ e, logo, y_n é constante. Em geral, consideramos 2 casos:

- $P_1(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_0, c_m \neq 0$. Nesse caso, definimos $\tilde{y}_n = y_n - \frac{c_m n^{m+1}}{m+1}$, e temos $\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n = Q_1(n) + P_2(n)\beta_2^n + \dots + P_k(n)\beta_k^n$, com $\text{grau}(Q) < m$. Por hipótese de indução, \tilde{y}_n (e logo y_n) é da forma desejada.
- $P_2(x) = d_s x^s + d_{s-1} x^{s-1} + \dots + d_0, d_s \neq 0$. Nesse caso, definimos $\tilde{y}_n = y_n - \frac{d_s n^s \lambda_2^n}{\lambda_2 - 1}$, e temos $\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n = P_1(n) + Q(n)\beta_2^n + P_3(n)\beta_3^n + \dots$

+ $P_k(n)\beta_k^n$, com $\text{grau}(Q) < s$. Por hipótese de indução, \tilde{y}_n (e, logo, y_n) é da forma desejada. ■

Vimos, na primeira parte da demonstração acima, que (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$, em que $P(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1}(x - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (x - \lambda_r)^{\alpha_r}$ sempre que $x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n$, em que Q_1, Q_2, \dots, Q_r são polinômios com $\text{grau}(Q_j) < \alpha_j, \forall j \leq r$. Vamos apresentar um argumento alternativo, motivado por conversas do autor com Bruno Fernandes Cerqueira Leite, para mostrar que todas as seqüências que satisfazem as recorrência são dessa forma.

Cada polinômio $Q_i(n)$ tem α_i coeficientes (dos monômios cujos graus são $0, 1, 2, 3, \dots, \alpha_i - 1$). Como o espaço vetorial das seqüências que satisfazem $\text{Rec}(P(x))$ tem dimensão $\text{grau}(P(x)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i$, basta ver que há unicidade na representação de uma seqüência igual a da forma acima. Para isso, devemos mostrar que, se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r$ são números complexos distintos e Q_1, Q_2, \dots, Q_r são polinômios tais que $Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $Q_j \equiv 0, \forall j \leq r$.

Vamos supor, por absurdo, que não seja assim. Supomos, sem perda de generalidade, que, para certos s e t com $1 \leq s \leq t \leq r, |\lambda_1| = |\lambda_i| > |\lambda_j|, \forall i \leq t, j > t$, e $\text{grau}(Q_1) = \text{grau}(Q_i) > \text{grau}(Q_j)$, se $i \leq s < j \leq t$. Se os polinômios Q_j não são todos nulos, temos Q_1 não nulo. Seja d o grau de Q_1 . Se $|\lambda_j| < |\lambda_1|$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_j(n)\lambda_j^n}{n^d \lambda_1^n} = 0$. Se $|\lambda_i| = |\lambda_1|$ e $\text{grau}(Q) < d$, também temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(n)\lambda_i^n}{n^d \lambda_1^n} = 0$. Portanto, se $Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e o coeficiente de n^d em Q_i é a_i para $i \leq s$. Dividindo por $n^d \lambda_1^n$ e tomando o limite, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \right) = 0, \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \\
&= a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{(\lambda_i/\lambda_1)^{n+1} - (\lambda_i/\lambda_1)}{(\lambda_i/\lambda_1) - 1} \right) = a_1,
\end{aligned}$$

pois, para $2 \leq i \leq s$, $\lambda_i/\lambda_1 \neq 1$ é um complexo de módulo 1, donde

$$\left| \frac{(\lambda_i/\lambda_1)^{n+1} - (\lambda_i/\lambda_1)}{(\lambda_i/\lambda_1) - 1} \right| \leq \frac{2}{|(\lambda_i/\lambda_1) - 1|},$$

e, logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(\lambda_i/\lambda_1)^{n+1} - (\lambda_i/\lambda_1)}{(\lambda_i/\lambda_1) - 1} \right) = 0.$$

Entretanto, isso é um absurdo, pois $\text{grau}(Q_1) = d$, e logo $a_1 \neq 0$.

Exemplo: $x_n = \text{sen}(n\alpha)$ satisfaz uma recorrência linear. De fato,

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \text{sen}(n\alpha + \alpha) = \text{sen}(n\alpha) \cos \alpha + \cos(n\alpha) \text{sen} \alpha \Rightarrow x_{n+2} = \\
&= \text{sen}(n\alpha + 2\alpha) = \text{sen}(n\alpha) \cos 2\alpha + \cos(n\alpha) \text{sen} 2\alpha \Rightarrow x_{n+2} - \frac{\text{sen} 2\alpha}{\text{sen} \alpha} x_{n+1} = \\
&= (\cos 2\alpha - \frac{\text{sen} 2\alpha}{\text{sen} \alpha} \cos \alpha) x_n, \text{ ou seja, } x_{n+2} = 2 \cos \alpha \cdot x_{n+1} - x_n.
\end{aligned}$$

Note que x_n não parece ser da forma geral descrita nesta seção, mas, de fato,

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{2i} = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha})^n - \frac{1}{2i} (e^{-i\alpha})^n = \\
&= \frac{1}{2i} (\cos \alpha + i \text{sen} \alpha)^n - \frac{1}{2i} (\cos \alpha - i \text{sen} \alpha)^n
\end{aligned}$$

(observe que $\cos \alpha + i \text{sen} \alpha$ e $\cos \alpha - i \text{sen} \alpha$ são as raízes de $x^2 - 2 \cos \alpha \cdot x + 1$).

Observação: Se (x_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)P(x))$, em que $P(x) = a_n x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$, então, se definirmos $y_n = a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + a_0 x_n$, teremos $y_{n+1} = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, y_n é constante. Assim, $a_k x_{n+k} + \dots + a_0 x_n$ é uma invariante da sequência x_n , o que é um fato útil para muitos problemas envolvendo recorrência (veja, por exemplo, os Problemas 2 e 3 abaixo).

Vamos agora ver um problema resolvido em que se usam estimativas assintóticas de sequências recorrentes para provar um resultado de teoria dos números:

Problema 1. (Problema 69 da Revista Eureka! nº. 14) Sejam a e b inteiros positivos tais que $a^n - 1$ divide $b^n - 1$ para todo inteiro positivo n . Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = a^k$.

Solução de Zoroastro Azambuja Neto (Rio de Janeiro-RJ):

Suponha, por absurdo, que b não seja uma potência de a .

Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a^k < b < a^{k+1}$. Consideremos a sequência $x_n = \frac{b^n - 1}{a^n - 1} \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq 1$. Como $\frac{1}{a^n - 1} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{2n}} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{jn}}$, temos

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^n}{a^{jn}} - \frac{1}{a^n - 1} = \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \dots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n + \frac{b^n}{a^{kn}(a^n - 1)} - \frac{1}{a^n - 1}.$$

Note que, como $\frac{b^n}{a^{kn}(a^n - 1)} = \frac{(b/a^{k+1})^n}{1 - a^{-n}}$ e $\frac{1}{a^n - 1}$ tendem a 0 quando n cresce, se definimos

$$y_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \dots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n = \sum_{j=1}^k \left(\frac{b}{a^j}\right)^n,$$

temos que

$$x_n - y_n = \frac{b^n}{a^{kn}(a^n - 1)} - \frac{1}{a^n - 1}$$

tende a 0 quando n tende a infinito. Por outro lado, como y_n é uma soma de k progressões geométricas de razões b/a^j , $1 \leq j \leq k$, y_n satisfaz a equação de recorrência $c_0 y_{n+k} + c_1 y_{n+k-1} + \dots + c_k y_n = 0$, $\forall n \geq 0$, em que

$$c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1} x + c_k = a^{k(k+1)/2} \left(x - \frac{b}{a}\right) \left(x - \frac{b}{a^2}\right) \dots \left(x - \frac{b}{a^k}\right).$$

Note que todos os c_i são inteiros. Note também que

$$\begin{aligned} & c_0 x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \dots + c_k x_n = \\ & = c_0 (x_{n+k} - y_{n+k}) + c_1 (x_{n+k-1} - y_{n+k-1}) + \dots + c_k (x_n - y_n) \end{aligned}$$

tende a 0 quando n tende a infinito, pois $x_{n+j} - y_{n+j}$ tende a 0 para todo j , com $0 \leq j \leq k$ (e k está fixo). Como os c_i e os x_n são todos inteiros, isso mostra que $c_0 x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \dots + c_k x_n = 0$, para todo n grande.

Agora, como

$$x_n = y_n + \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n + \frac{b^n}{a^{(k+1)n}(a^n - 1)} - \frac{1}{a^n - 1},$$

temos

$$c_0 x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \cdots + c_k x_n = \sum_{j=0}^k c_j \left(\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^{n+k-j} + z_{n+k-j} \right),$$

em que

$$z_m = \frac{b^m}{a^{(k+1)m}(a^m - 1)} - \frac{1}{a^m - 1}.$$

Note que

$$\sum_{j=0}^k c_j \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^{n+k-j} = P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \cdot \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n,$$

em que

$$\begin{aligned} P(x) &= c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k = \\ &= a^{k(k+1)/2} \left(x - \frac{b}{a}\right) \left(x - \frac{b}{a^2}\right) \cdots \left(x - \frac{b}{a^k}\right), \end{aligned}$$

donde $P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \neq 0$.

Por outro lado, para todo j com $0 \leq j \leq k$, $z_{n+k-j} \left/ \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n \right. = \frac{(b/a^{k+1})^{k-j}}{a^{n+k-j-1}} - \frac{1}{(a^{k-j-a^{-n}})(b/a^k)^n}$, que tende a 0 quando n tende a infinito, donde $w_n = \left(\sum_{j=0}^k c_j x_{n+k-j}\right) \left/ \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n \right.$ tende a $P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \neq 0$, o que é um absurdo, pois, como vimos antes, w_n é igual a 0, para todo n grande.

Veremos, a seguir, dois problemas resolvidos que envolvem seqüências recorrentes, que foram propostos na OBM e na IMO, respectivamente:

Problema 2. (Problema 5 da 13ª Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Sênior - 1991) Seja Q_0 o quadrado de vértices $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (0, 1)$ e $P_3 = (0, 0)$. Seja A_0 o interior desse quadrado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, P_{n+4} é o ponto

médio do segmento $\overline{P_n P_{n+1}}$, Q_n é o quadrilátero de vértices P_n, P_{n+1}, P_{n+2} e P_{n+3} e A_n é o interior de Q_n . Encontre a interseção de todos os A_n .

Solução 1:

Temos $P_{n+4} = \frac{P_n + P_{n+1}}{2}$. Portanto, $P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} + 2P_{n+4} = P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3}$. Logo $P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} = P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = (3, 4)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (note que $2x^4 - x - 1 = (x-1)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$), donde, como A_n é sempre convexo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right) &= \frac{P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3}}{7} = \\ &= \frac{3}{7} \left(\frac{1}{3} P_n + \frac{2}{3} P_{n+1}\right) + \frac{4}{7} \left(\frac{P_{n+2} + P_{n+3}}{2}\right) \end{aligned}$$

sempre pertence ao interior de A_n . Se mostrarmos que o diâmetro (maior distância entre 2 pontos) de A_n tende a 0, teremos mostrado que a interseção de todos os A_n é $\left\{\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)\right\}$.

Para isso, note que o diâmetro de $ABCD$ é o $\max\{\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}\}$, e

$$P_{n+4} = \frac{P_n + P_{n+1}}{2}, \quad P_{n+5} = \frac{P_{n+1} + P_{n+2}}{2}, \quad P_{n+6} = \frac{P_{n+2} + P_{n+3}}{2},$$

$$P_{n+7} = \frac{P_{n+3} + P_{n+4}}{2} = \frac{2P_{n+3} + P_n + P_{n+1}}{4}$$

e

$$P_{n+8} = \frac{P_{n+4} + P_{n+5}}{2} = \frac{P_n + 2P_{n+1} + P_{n+2}}{4}.$$

Assim,

$$\overline{P_{n+5} P_{n+6}} = |P_{n+6} - P_{n+5}| = \left| \frac{P_{n+3} - P_{n+1}}{2} \right| = \frac{1}{2} \overline{P_{n+1} P_{n+3}},$$

$$\begin{aligned} \overline{P_{n+5} P_{n+7}} &= |P_{n+7} - P_{n+5}| = \frac{2P_{n+3} + P_n - P_{n+1} - 2P_{n+2}}{4} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |P_{n+3} - P_{n+2}| + \frac{1}{4} |P_n - P_{n+1}| = \frac{\overline{P_{n+2} P_{n+3}}}{4} + \frac{\overline{P_n P_{n+1}}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{P_{n+5}P_{n+8}} &= |P_{n+8} - P_{n+5}| = \left| \frac{P_n - P_{n+2}}{4} \right| = \frac{\overline{P_n P_{n+2}}}{4}, \\
\overline{P_{n+6}P_{n+7}} &= |P_{n+7} - P_{n+6}| = \left| \frac{P_n + P_{n+1} - 2P_{n+2}}{4} \right| \leq \\
&\leq \frac{|P_n - P_{n+2}|}{4} + \frac{|P_{n+1} - P_{n+2}|}{4} = \frac{1}{4} \overline{P_n P_{n+2}} + \frac{1}{4} \overline{P_{n+1} P_{n+2}}, \\
\overline{P_{n+6}P_{n+8}} &= |P_{n+8} - P_{n+6}| = \left| \frac{P_n + 2P_{n+1} - P_{n+2} - 2P_{n+3}}{4} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2} |P_{n+1} - P_{n+3}| + \frac{1}{4} |P_n - P_{n+2}| = \frac{1}{2} \overline{P_{n+1} P_{n+3}} + \frac{1}{4} \overline{P_n P_{n+2}},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{P_{n+7}P_{n+8}} &= |P_{n+8} - P_{n+7}| = \left| \frac{P_{n+2} + P_{n+1} - 2P_{n+3}}{4} \right| \leq \\
&\leq \frac{|P_{n+2} - P_{n+3}|}{4} + \frac{|P_{n+1} - P_{n+3}|}{4} = \frac{1}{4} \overline{P_{n+2} P_{n+3}} + \frac{1}{4} \overline{P_{n+1} P_{n+3}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\text{diam}(P_{n+5}P_{n+6}P_{n+7}P_{n+8}) \leq \frac{3}{4} \text{diam}(P_n P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3})$, donde

$\text{diam}(P_{5k}P_{5k+1}P_{5k+2}P_{5k+3}) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \text{diam}(P_0P_1P_2P_3) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k$, que tende a 0, o que implica o nosso resultado.

Solução 2:

Podemos escrever $P_n = Q_0 + Q_1\alpha^n + Q_2\beta^n + Q_3\gamma^n$, em que $1, \alpha, \beta$ e γ são as raízes de $x^4 - \left(\frac{x+1}{2}\right) = 0$, ou seja, α, β e γ são raízes de $2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ (pois $(x-1)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = 2x^4 - x - 1$). Temos $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Como $P(0) = 1$, $P(-1) = -1$ e $P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ podemos supor que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, logo $\beta\gamma = -1/2\alpha < 1$ e $\beta + \gamma = -1 - \alpha \in (-1, 0)$, donde $(\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma = 1 + 2\alpha + \alpha^2 + \frac{2}{\alpha} < 0$ pois $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$ e $|\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha^2 < 1$. Assim, $(\beta - \gamma)^2 < 0$, donde β e γ são complexos conjugados, e $|\beta| = |\gamma| = \sqrt{\beta\gamma} < 1$. Portanto, P_n tende a Q_0 quando n cresce e, logo a interseção de todos os A_n deve ser Q_0 .

Para calcular Q_0 , observe que:

$$\begin{cases} Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 = P_0 \\ Q_0 + Q_1\alpha + Q_2\beta + Q_3\gamma = P_1 \\ Q_0 + Q_1\alpha^2 + Q_2\beta^2 + Q_3\gamma^2 = P_2 \\ Q_0 + Q_1\alpha^3 + Q_2\beta^3 + Q_3\gamma^3 = P_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 7Q_0 + Q_1(1+2\alpha+2\alpha^2+2\alpha^3) + Q_2(1+2\beta+2\beta^2+2\beta^3) + Q_3(1+2\gamma+2\gamma^2+2\gamma^3) = \\ &= P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 \Rightarrow 7Q_0 = P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 \text{ (pois } \alpha, \beta \text{ e } \gamma \text{ são raízes de} \\ &2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \Rightarrow Q_0 = \frac{P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3}{7} = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right). \end{aligned}$$

Problema 3. (Problema 3 da 41^a Olimpíada Internacional de Matemática, realizada em 2000, na Coreia do Sul) Seja $n \geq 2$ um inteiro. Existem n pulgas numa reta horizontal, nem todas no mesmo ponto. Para um dado número real positivo λ , define-se um *salto* da seguinte maneira:

- Escolhe-se duas pulgas quaisquer nos pontos A e B , com o ponto A à esquerda do ponto B ;
- A pulga que está em A salta até o ponto C da reta, à direita de B , tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

Determine todos os valores de λ para os quais, dado qualquer ponto M na reta e quaisquer posições iniciais das n pulgas, existe uma sucessão finita de saltos que levam todas as pulgas para pontos à direita de M .

Solução:

Devemos demonstrar duas coisas:

- a) que, para $\ell \geq \frac{1}{(n-1)}$, existe uma sequência infinita de movimentos que vai levando as pulgas cada vez mais para a direita, ultrapassando qualquer ponto prefixado M ;
- b) que, para $\ell < \frac{1}{(n-1)}$ e para qualquer posição inicial das pulgas, existe um ponto M tal que as pulgas em um número finito de movimentos jamais alcançam ou ultrapassam M .

Começaremos pelo item b). Sejam x_1, x_2, \dots, x_n as posições iniciais das pulgas, com $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, de tal forma que x_n é a posição da pulga mais à direita. Seja

$$P = \left(\frac{1}{1 - (n-1)\ell} \right) \cdot (x_n - \ell \cdot x_1 - \ell \cdot x_2 - \dots - \ell \cdot x_{n-1}).$$

O ponto P claramente está à direita de todas as pulgas.

Afirmamos que, se após alguns movimentos as novas posições são x'_1, \dots, x'_n , e se

$$P' = \left(\frac{1}{1 - (n-1)\ell} \right) \cdot (x'_n - \ell \cdot x'_1 - \ell \cdot x'_2 - \dots - \ell \cdot x'_{n-1}),$$

então $P' \leq P$, o que conclui a demonstração, pois isso mostra que as pulgas nunca passarão do ponto P .

Para provar esta afirmação, basta considerar o que ocorre após um movimento.

Se a pulga que estava em x_i pula sobre a pulga que estava em x_n então $x'_n - x_n = \ell \cdot (x_n - x_i)$ e $x'_n - \ell \cdot x_n = x_n - \ell \cdot x_i$ e $P' = P$.

Vamos ver que qualquer outro caso é ainda mais favorável. Suponhamos que a pulga que estava em x_i pula sobre a pulga que estava em x_j . Se a pulga que pulou continua atrás de x_n , temos $x'_n = x_n$ e $x'_1 + \dots + x'_{n-1} > x_1 + \dots + x_{n-1}$, donde $P' < P$. Se ela passa de x_n , teremos $x'_n = x_j + \ell(x_j - x_i) \Rightarrow x'_n - \ell x_n < x'_n - \ell x_j = x_j - \ell x_i < x_n - \ell x_i$, donde novamente temos $P' < P$.

Vamos agora ao item a): Seja $P = x_n - \ell(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$. Se, em cada movimento, a pulga mais à esquerda pula sobre a pulga mais à direita, temos $x'_n = x_n + \ell(x_n - x_1) \Rightarrow x'_n - \ell x_n = x_n - \ell x_1$. Assim, se as novas posições são $x'_1 = x_2, \dots, x'_{n-1} = x_n$ e $x'_n = x'_n$, e $P' = x'_n - \ell(x'_1 + x'_2 + \dots + x'_{n-1})$, temos $P' = P$, donde P é uma constante. Podemos supor, sem perda de generalidade, que P é positivo (escolhendo a origem, por exemplo, em $\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$; note que então teremos sempre $\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq 0$). Temos então

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j) = x_n - \frac{1}{n-1} (x_1 + \dots + x_{n-1}) \geq x_n - \ell(x_1 + \dots + x_{n-1}) = P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n - x_1 \geq \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j) \geq P \Rightarrow x'_n - x_n = \ell(x_n - x_1) \geq \frac{P}{n-1},$$

donde o ponto mais à direita caminha pelo menos $\frac{P}{n-1}$ para a direita a cada passo, logo tende a infinito. Como o ponto mais à direita após $n-1$ passos será o ponto mais à esquerda, todos os pontos tendem a infinito (para a direita).

Nota: Na estratégia descrita na solução do item a), o ponto mais à esquerda se torna sempre o mais à direita, donde podemos definir $x_{n+1} = x'_n = x_n + \ell(x_n - x_1)$, e teríamos simplesmente $x'_j = x_{j+1}$, $\forall j$. Reduzimos então a análise dessa estratégia ao estudo da recorrência linear $x_{n+1} = (1 + \ell)x_n - \ell x_1$, cujo polinômio característico é $P(x) = x^{n+1} - (1 + \ell)x^n + \ell$, do qual 1 é raiz, donde, como $\frac{P(x)}{x-1} = x^n - \ell(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$, a expressão $y_m = x_m - \ell(x_{m-1} + x_{m-2} + \dots + x_{m-n+1} + x_{m-n})$ é uma invariante da recorrência, isto é, $y_{m+1} = y_m \forall m$, donde y_m é constante. Daí vem nossa fórmula para P .

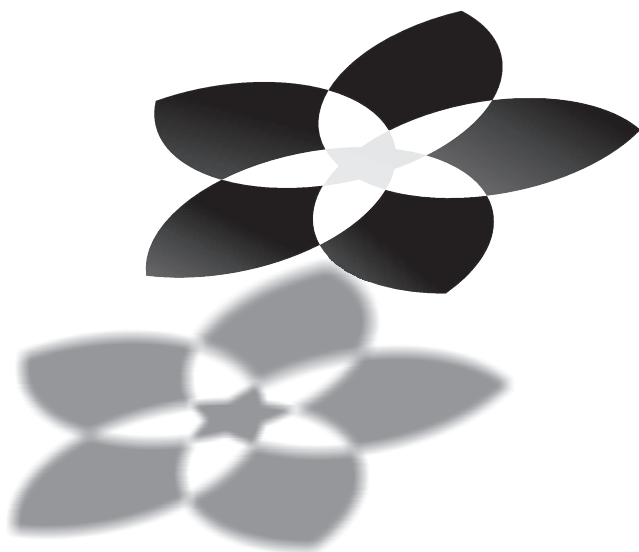
Concluimos com o problema a seguir, que é uma interessante aplicação de seqüências recorrentes à trigonometria.

Problema 4. Prove que os ângulos agudos de um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 são irracionais quando expressos em graus (i.e., são múltiplos irracionais de π).

Solução:

Considere a seqüência $x_n = \frac{(2+i)^n - (2-i)^n}{2i}$. Temos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e, como $2+i$ e $2-i$ são raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$, (x_n) satisfaz a recorrência $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 5x_n$. Daí segue que x_{n+2} é congruente a $-x_{n+1}$ módulo 5 para todo $n \geq 1$, donde x_n é congruente a $(-1)^{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Logo x_n não é múltiplo de 5 para nenhum $n \geq 1$. Em particular, $x_n \neq 0$, para todo $n \geq 1$. Assim, $1 \neq \frac{(2+i)^n}{(2-i)^n} = (\frac{2+i}{2-i})^n = (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)^n$, para todo $n \geq 1$. Se $\theta = \cos^{-1}(3/5)$, $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i = e^{i\theta}$. Logo $(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)^n = e^{in\theta} \neq 1$, para todo $n \geq 1$, o que implica que θ/π é irracional (de fato, se $\theta/\pi = p/q$, teríamos $e^{2iq\theta} = e^{2ip\pi} = 1$).

Nota: Para uma versão mais geral deste problema, veja o Problema 88 proposto na Eureka! 17, p. 60 por Carlos Gustavo Moreira e José Paulo Carneiro, e a solução de seus autores publicada na Eureka! 20, p. 52-53.



Artigo

O Teorema de Menelau, um Exemplo de Aplicação de Áreas em Problemas Geométricos

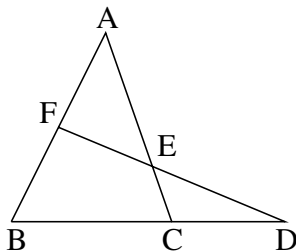
Eliezer Batista

Departamento de Matemática - UFSC
Florianópolis - SC

Resumo

Neste pequeno artigo, veremos uma demonstração do célebre teorema de Menelau utilizando para isto, tão somente, o conceito de área. Esta demonstração difere das apresentadas na maioria dos livros de geometria disponíveis, que utilizam técnicas de semelhança de triângulos. Por isto, esta demonstração se torna instrutiva, pois apresenta um caminho alternativo na demonstração de um teorema e mostra a importância do conceito de Área na resolução de problemas geométricos.

Considere um triângulo $\triangle ABC$, um ponto $D \in \overrightarrow{BC}$, estendendo-se o lado \overline{BC} . Considere também um segmento \overline{DF} com $F \in \overline{AB}$ que cruza o lado \overline{AC} no ponto E , conforme nos mostra a figura abaixo.



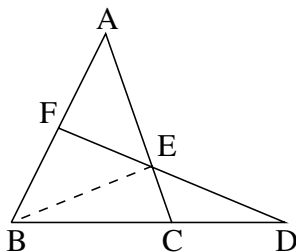
O teorema de Menelau pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 1 *Dados os pontos A , B , C , D , E e F , conforme a configuração apresentada na figura anterior, então temos a relação*

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1.$$

A demonstração deste teorema se baseia no resultado que decorre facilmente da fórmula da área de um triângulo, a saber, a razão entre as áreas de dois triângulos com a mesma altura é igual à razão entre suas bases. Assim, na demonstração do teorema de Menelau, basta identificarmos os triângulos apropriados e compararmos as suas áreas.

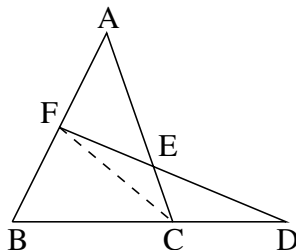
Demonstração 2 *Considere o segmento auxiliar \overline{EB} , conforme ilustrado na figura abaixo:*



Então, temos:

$$\begin{aligned} \frac{A(\triangle AEF)}{A(\triangle BEF)} &= \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}, \\ \frac{A(\triangle BEF)}{A(\triangle BDF)} &= \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, considere agora o segmento auxiliar \overline{CF} , conforme ilustrado na figura a seguir:



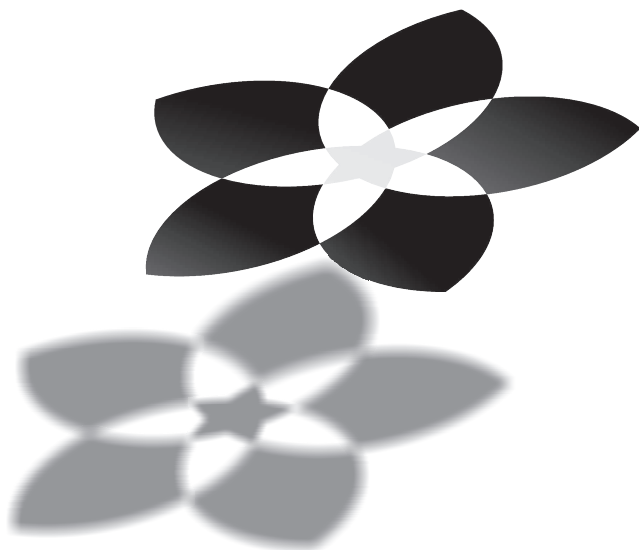
Então, temos também,

$$\begin{aligned}\frac{A(\triangle BDF)}{A(\triangle CDF)} &= \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}, \\ \frac{A(\triangle CDF)}{A(\triangle CDE)} &= \frac{\overline{DF}}{\overline{ED}}, \\ \frac{A(\triangle CDE)}{A(\triangle CEF)} &= \frac{\overline{ED}}{\overline{EF}}, \\ \frac{A(\triangle CEF)}{A(\triangle AEF)} &= \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}.\end{aligned}$$

Multiplicando todas estas razões, temos:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{A(\triangle AEF)}{A(\triangle BEF)} \cdot \frac{A(\triangle BEF)}{A(\triangle BDF)} \cdot \frac{A(\triangle BDF)}{A(\triangle CDF)} \cdot \frac{A(\triangle CDF)}{A(\triangle CDE)} \cdot \frac{A(\triangle CDE)}{A(\triangle CEF)} \cdot \frac{A(\triangle CEF)}{A(\triangle AEF)} = \\ &= \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{ED}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{EF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}.\end{aligned}$$

O que demonstra o teorema. ■



Artigo

O Cone e as Cônicas

Gustavo A. T. F. da Costa

Departamento de Matemática - UFSC
Florianópolis - SC

1. INTRODUÇÃO

Consideremos um cone circular de duas folhas com vértice V . Este é um cone cujas geratrizes são retas tangentes a uma circunferência, chamada de diretriz do cone, e que passam pelo ponto V , como mostra a Figura 1.

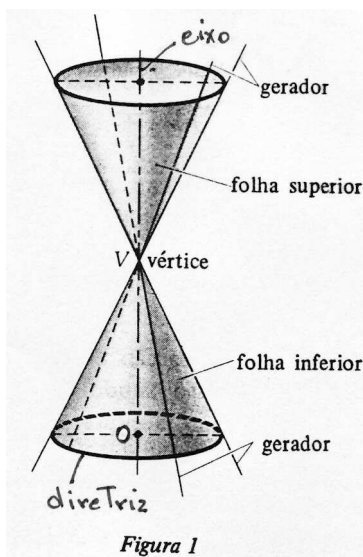
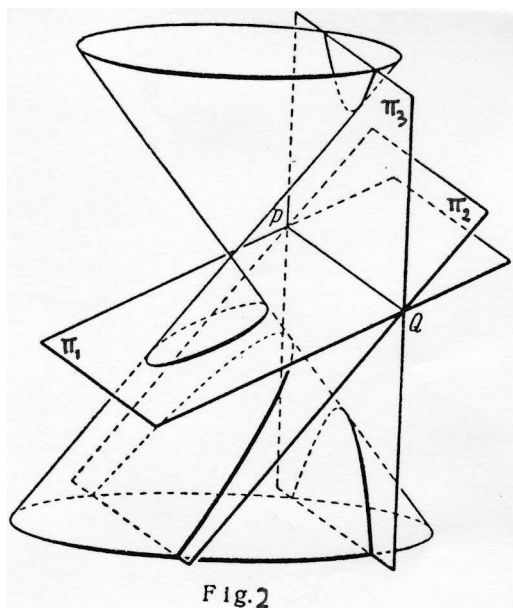


Figura 1

A reta que passa pelo centro O da diretriz e pelo vértice V chama-se eixo do cone. Suponha que o cone é reto, isto é, o seu eixo faz um ângulo reto com a diretriz. Além disso, seja α um plano que contém o eixo do cone. Sejam π_1, π_2, π_3 , planos perpendiculares a α e que não contém V , satisfazendo as seguintes condições: o plano

π_1 corta cada geratriz de uma das folhas do cone; o plano π_2 é paralelo a uma e uma só geratriz do cone; e o plano π_3 é paralelo a duas geratrizes do cone e, portanto, corta as duas folhas do cone. A seguir, considere o lugar geométrico dos pontos que estão na interseção do cone com cada um dos planos π_1 , π_2 e π_3 (Figura 2). Cada um é uma curva sobre a superfície do cone, daí serem chamadas de cônicas. As cônicas também são curvas planas, já que essas curvas encontram-se na interseção do cone com um plano.



Nosso objetivo aqui é obter para cada um desses lugares geométricos uma propriedade que seja independente do cone, de modo a ser possível estudá-los apenas no plano. Este será o assunto das seções 3, 4, e 5. Obtidas as mencionadas propriedades, elas serão empregadas na construção geométrica das cônicas, no plano, usando régua e esquadro. Faremos isso nas seções 6, 7, e 8. Inicialmente, na seção 2, relembremos uma propriedade das esferas, relevante para as demais seções.

2. ESFERAS

Mencionamos aqui a seguinte propriedade das esferas (**PE**) que será de grande valia nas próximas seções: **PE** - Dada uma esfera, considere um ponto P externo a ela e duas retas quaisquer que têm este ponto em comum e são tangentes à esfera. Sejam A e B os pontos de contato de cada reta com a esfera. Então, as distâncias PA e PB são iguais.

3. O PLANO E A ELIPSE

Podemos inscrever ao cone duas esferas tangentes ao plano π_1 e que o tocam nos pontos F' e F (Figura 3). Estes pontos, em geral, são distintos e coincidem apenas quando o plano π_1 é paralelo à diretriz do cone. Quando este for o caso, os pontos na interseção de π_1 com o cone constituem uma circunferência, já que ele será paralelo ao plano da diretriz. Suponhamos F e F' distintos. Escolhendo um ponto P qualquer na interseção do cone com o plano, sejam Q e R os pontos onde a geratriz VP toca as duas esferas inscritas. Pela **PE**, $PF = PQ$ e $PF' = PR$. Portanto,

$$PF + PF' = PQ + PR = QR \quad (1)$$

Mas QR é um segmento de geratriz situado entre os pontos de contato do cone com as esferas. Seu comprimento é o mesmo, qualquer que seja o ponto P escolhido. Resulta, pois, que “todo ponto na interseção do cone com o plano π_1 tem a propriedade de que a soma das suas distâncias a dois pontos fixos, F e F' , é uma constante que não depende do ponto escolhido”. O lugar geométrico dos pontos com esta propriedade é chamado de elipse.

4. O PLANO E A PARÁBOLA

Nesse caso inscreve-se no cone uma esfera tangente a π_2 no ponto F (Figura 4).

Seja d a interseção de π_2 com o plano que contém a circunferência dos pontos de contato da esfera com o cone. Seja B a interseção do diâmetro desta circunferência, contido no plano α , com a reta d . Indiquemos pela letra e a reta na interseção do plano α com π_2 . Considere também o ponto A onde a reta e intercepta a geratriz VD . Tracemos pelo ponto P o plano paralelo à diretriz do cone e que corta a reta e no ponto P' e, a geratriz VD , no ponto C . Os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle AP'C$ são semelhantes ao triângulo $\triangle EV D$. Como este é um triângulo isósceles, aqueles também são. Portanto,

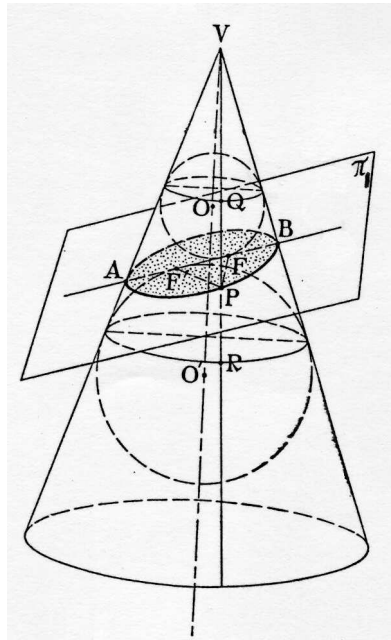


Figura 3

sendo

$$CD = CA + AD \quad (2)$$

e

$$P'B = P'A + AB \quad (3)$$

resulta que $CD = P'B$, pois $CA = P'A$ e $AB = AD$. Pela **PE**, como $PF = PQ = CD = P'B$, segue que $PF = P'B$. Seja H um ponto de d tal que PH e $P'B$ são segmentos iguais e paralelos. Temos que $PH = P'B = PF$. Pode-se concluir que “todo ponto na interseção do plano π_2 com a superfície do cone está a uma mesma distância de um ponto fixo F e de uma reta fixa d ”. O lugar geométrico dos pontos com esta propriedade é chamado de parábola. O ponto F é chamado de foco e d de diretriz da parábola.

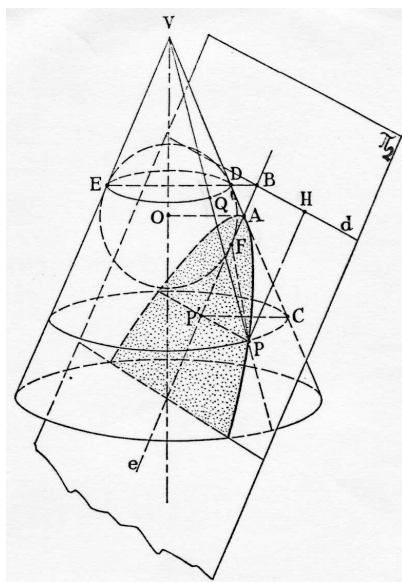


Figura 4

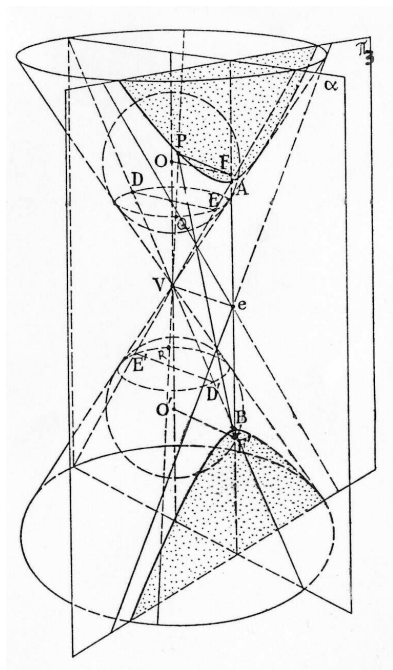
5. O PLANO E A HIPÉRBOLE

Inscribe-se no cone duas esferas tangentes ao plano π_3 e que tocam este plano nos pontos F e F' , como mostra a Figura 5.

Seja P um ponto qualquer na interseção do plano π_3 com a folha superior do cone. A geratriz VP é tangente às esferas nos pontos Q e R , de modo que $PF = PQ$ e $PF' = PR$, pela **PE**. Levando em conta que $PF' > PF$, a diferença $PF' - PF$ é positiva e obtemos

$$PF' - PF = PR - PQ = QR \quad (4)$$

Qualquer que seja P , a distância QR tem sempre o mesmo valor constante. Escolhendo P na interseção do plano π_3 com a folha inferior do cone obtém-se $PF > PF'$ e a diferença $PF - PF'$ é positiva e igual a QR . Podemos incluir ambos os casos numa única expressão: $|PF' - PF|$ é uma constante que não depende do ponto



P. Tem-se assim a seguinte propriedade: “todo ponto na interseção do plano com a superfície do cone tem suas distâncias a dois pontos fixos F e F' satisfazendo $|PF' - PF| = k$, em que k é uma constante que não depende do ponto”. O lugar geométrico dos pontos com esta propriedade é chamado de hipérbole. Os pontos F e F' são chamados de focos da hipérbole.

6. CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DA ELIPSE

Escolha dois pontos, F_1 e F_2 , sobre uma cartolina, e fixe nestes pontos as extremidades de um cordão. Certifique-se, primeiro, que o comprimento do cordão é maior que a distância entre os pontos F_1 e F_2 ; segundo, que as extremidades do cordão possam girar sem enrolar-se nestes pontos. Em seguida, encoste a ponta de um lápis, e com ele, estique o cordão, como indica a Figura 6.

Deslizando o lápis sobre a cartolina e mantendo o cordão sempre esticado, traça-se

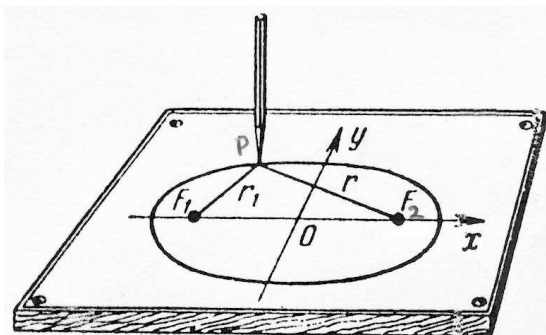


Fig.6

uma curva fechada. Esta curva é uma elipse pois a soma das distâncias F_1P e F_2P é igual ao comprimento do cordão, que é o mesmo, qualquer que seja P , de acordo com o resultado da seção 3.

7. CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DA PARÁBOLA

Trace uma reta x sobre a cartolina e, sobre ela, escolha um ponto O , a igual distância de dois outros pontos sobre a mesma reta. Marque-os com auxílio de um compasso ou régua. Sejam eles A e F , como na Figura 7. Trace pelo ponto A a reta

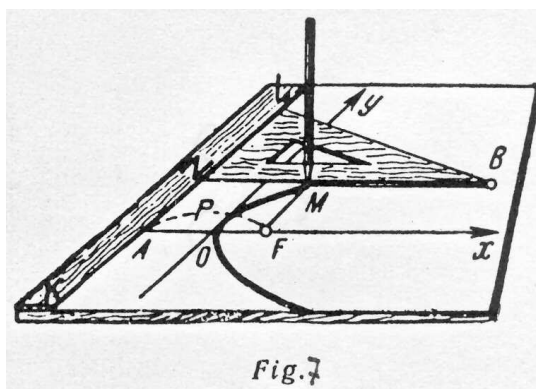
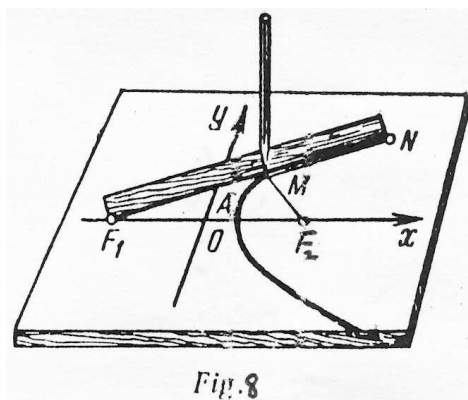


Fig.7

KL perpendicular à reta x . Em seguida, alinhe a borda de uma régua à reta KL e fixe-a nesta posição. Você precisará também de um esquadro. Seu menor cateto deve ser posicionado ao longo da borda da régua alinhada com KL . O cateto maior NB do esquadro deve estar posicionado, inicialmente, sobre x . No vértice do ângulo $\angle B$ prende-se uma das pontas de um cordão cujo comprimento deve ser igual a NB . A outra ponta do cordão prende-se a F onde deve poder girar sem enrolar-se. Esticando o cordão com a ponta de um lápis, posicione-o inicialmente no ponto O . Em seguida, deslize o esquadro ao longo da régua e a ponta do lápis, ao longo do cateto NB , mantendo o cordão sempre esticado. Com este movimento, traça-se uma curva sobre a cartolina. A curva traçada é um arco de parábola. De fato, o comprimento do cordão é igual ao do cateto NB de sorte que, se M é um ponto sobre a curva, a distância FM é sempre igual à distância MN , de acordo com a propriedade da seção 4.

8. CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DA HIPÉRBOLE

Trace uma reta x sobre uma cartolina, como mostra a Figura 8. Marque sobre x os pontos F_1 e F_2 . Em seguida, prenda uma das extremidades de uma régua a F_1 de modo que ela possa girar ao redor deste ponto.



Na outra extremidade da régua, N , fixe a ponta de um cordão. A outra ponta, fixe-a no ponto F_2 . O comprimento do cordão deve ser tal que a diferença entre o comprimento da régua e a do cordão seja igual à distância entre F_1 e F_2 . Inicialmente, posicione a régua sobre a reta x e com a ponta de um lápis estique o cordão. A ponta do lápis estará sobre o ponto A . Em seguida, com o fio sempre esticado e a ponta do

lápiz encostado à régua, gira-se a régua ao redor do ponto F_1 , para cima ou para baixo, enquanto desliza-se o lápis ao longo da borda da régua. A curva que se obtém é um ramo de hipérbole. Pela construção acima,

$$|F_1N - (F_2M + MN)| = F_1F_2 \quad (5)$$

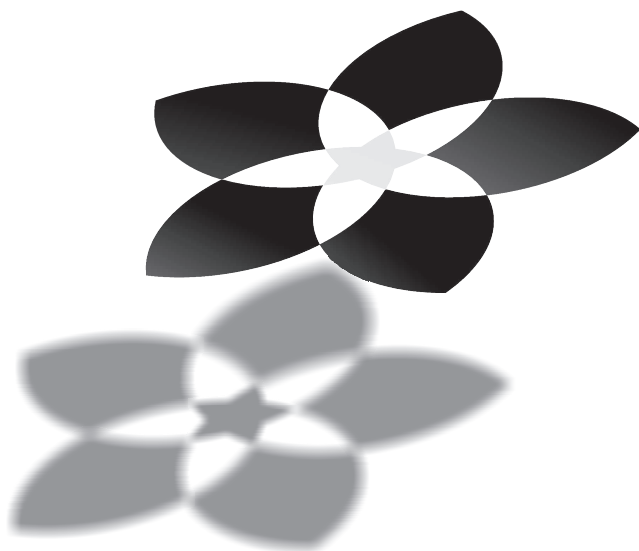
Porém, $F_1N = F_1M + MN$. Obtém-se, assim, que

$$|F_1M - F_2M| = F_1F_2 \quad (6)$$

de acordo com a seção 5, já que, para todo M sobre a curva, a distância F_1F_2 permanece fixa.

Referências

- [1] SUVOROV, I. *Matemáticas Superiores*. Editorial Mir, Moscou, 1978.
- [2] SELZER, S. *Geometria Analitica Plana y Complementos de Algebra*. Editorial Construciones, Buenos Aires, 1948.



Artigo

Onde sentar no cinema?

Felipe Vieira ¹

felipemate@gmail.com

Assim como muitas áreas da matemática, problemas de extremos (maximização ou minimização de uma certa variável) são estudados há muito tempo. Esses problemas, que têm desafiado matemáticos como Euclides (± 300 a.C.), que em seu livro “Elementos” propunha achar o maior produto possível entre dois números cuja soma era dada, também intriga engenheiros, na busca por materiais de máxima resistência e menor custo, e claro, os “não matemáticos”, simplesmente pela diversão.

Além de Euclides, muitos matemáticos propuseram/resolveram problemas de extremos: Zenodorus (± 200 a.C.), Heron de Alexandria (± 50 a.C.), Pierre de Fermat (1601-1665), Jacob Steiner (1796-1863), Guilio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766) e Johann Müller (1436-1476), além de outros.

Müller nasceu na Alemanha, em Königsberg in Bayern, cidade cujo nome em latim é Regiomontanus, e que foi o nome como Müller ficou conhecido (não confunda esta Königsberg com aquela das Pontes de Königsberg). Em 1471, Regiomontanus propôs a Cristian Roder o seguinte: a que distância um homem deve se posicionar de um pedestal de uma estátua, todos os três de alturas conhecidas, de modo a enxergá-la por um ângulo de visão máximo? Esse problema ficou conhecido como Problema de Regiomontanus.

Neste artigo, discutiremos uma variação do problema de Regiomontanus, que chamaremos “Problema do Cinema”: dada uma sala de cinema, com o chão inclinado, em que fileira devemos sentar de maneira que nosso ângulo de visão com a tela seja máximo? Resolveremos esse problema utilizando geometria e trigonometria estudadas no ensino básico, e também um pouco de Cálculo, estudado na Universidade.

Considere, então, uma sala de cinema, representada na Figura 1. A tela, AB , está a uma distância AC do chão; a primeira fileira de poltronas está posicionada no ponto D' , cuja distância CD' à parede da tela t é conhecida; as demais fileiras estão sobre

¹Mestrando em Matemática e Computação Científica da UFSC.

r' , com inclinação θ em relação à horizontal s ; e E seria a posição de seus olhos, a uma distância h do pé da poltrona.

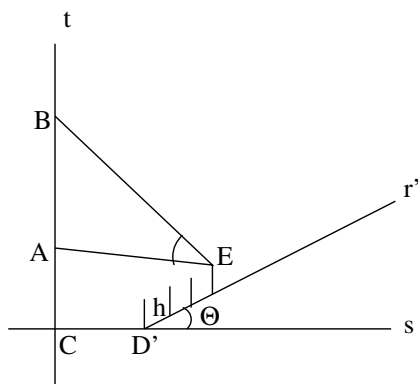


Figura 1: Sala de cinema.

Primeiramente, adicionemos a reta r à Figura 1, colocando-a paralela à reta r' , passando pelo ponto E (Figura 2). Isso porque temos que considerar a distância h dos nossos olhos ao pé da poltrona.

Estendamos as retas t e r de maneira que elas se encontrem no ponto F (observe que isso é possível pois as retas não são paralelas). O ponto P que procuramos será o ponto sobre a reta r tal que

$$\overline{FP} = \sqrt{(\overline{FA}).(\overline{FB})}.$$

Afirmção: P é o ponto sobre r tal que o ângulo \widehat{APB} é máximo.

De fato, construa a circunferência, que chamaremos S_V , passando por A e B , e tangenciando a reta r em P (prove que ela existe). Note que F é um ponto fora da circunferência S_V , e FP é tangente à esta ², então $(\overline{FA}).(\overline{FB}) = (\overline{FP})^2$, que é a motivação para achar o ponto P . Você pode verificar esta propriedade em [2], p. 214. Seja $P' \neq P$ um ponto sobre r . Este ponto está fora da circunferência S_V . Então

²O produto $(\overline{FA}).(\overline{FB})$ é chamado “potência do ponto F em relação à circunferência”. Observe que existe uma segunda circunferência passando por A e B e tangenciando r , mas o ponto de tangência estará

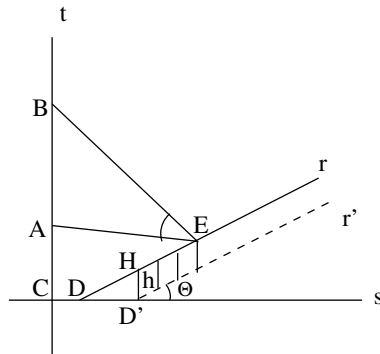


Figura 2: Reposicionando a reta r' .

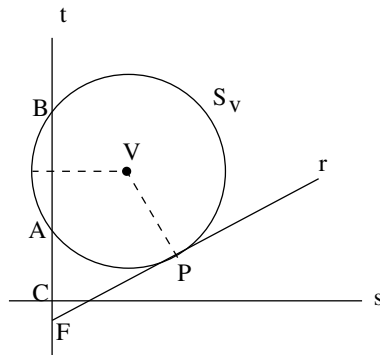


Figura 3: O ponto P e a circunferência S_V .

$\overline{BP'}$ intercepta S_V em B e em mais um ponto, que chamaremos M . Daí, usando um resultado sobre ângulos inscritos em uma circunferência (de fato, o arco \widehat{APB} é chamado arco capaz do ângulo \widehat{APB} em relação a AB), e a propriedade de soma de

atrás da tela.

ângulos no triângulo $\triangle AMP'$ (ver Figura 4), temos:

$$\widehat{APB} = \widehat{AMB} = 180^\circ - \widehat{AMP'} = \widehat{AP'M} + \widehat{P'AM} > \widehat{AP'M} = \widehat{AP'B}$$

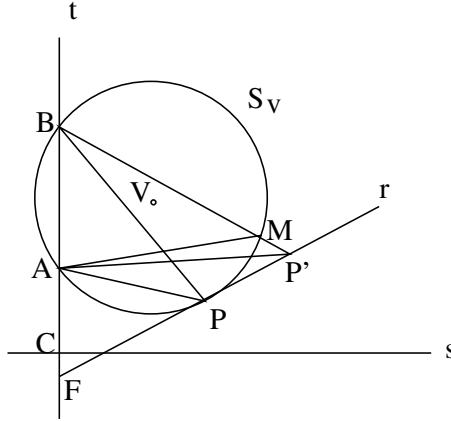


Figura 4: Triângulo $\triangle AMP'$.

Logo P é o ponto que procuramos. ■

Vamos, então, calcular em qual fileira do cinema devemos sentar para que nossos olhos estejam nesse ponto P , ou seja, do modo que o ângulo \widehat{APB} (Figura 4) que nossos olhos fazem com a tela seja máximo.

Sabemos que $(\overline{FP})^2 = \overline{FA} \cdot \overline{FB}$. Analisando a Figura 5 temos

$$\overline{FA} = \overline{CA} + \overline{FC} = \overline{CA} + (\tan \theta) \cdot \overline{CD} = \overline{CA} + (\tan \theta) \cdot \left(\overline{CD'} - \frac{h}{\tan \theta} \right) \text{ e}$$

$$\overline{FB} = \overline{BA} + \overline{FA}.$$

Então,

$$\overline{FP} = \sqrt{\left[\overline{BA} + \overline{CA} + (\tan \theta) \cdot \left(\overline{CD'} - \frac{h}{\tan \theta} \right) \right] \left[\overline{CA} + (\tan \theta) \cdot \left(\overline{CD'} - \frac{h}{\tan \theta} \right) \right]}.$$

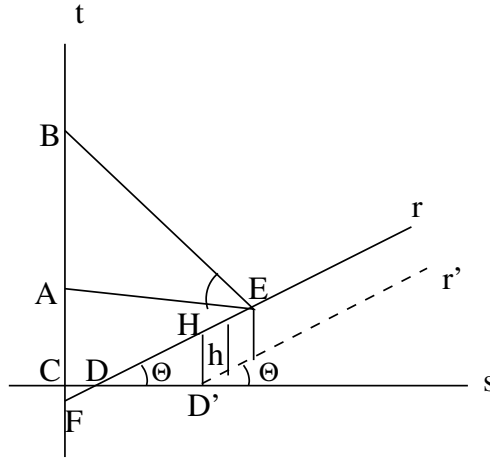


Figura 5: Sala de cinema.

Defina Q o ponto sobre r' , que represente a fileira de poltronas que nos proporcione o maior ângulo de visão. Logo:

$$\overline{D'Q} = \overline{FP} - \overline{FH} = \overline{FP} - \overline{FD} - \overline{DH} = \overline{FP} - \overline{FD} - \frac{h}{\sin \theta} = \overline{FP} - \frac{\overline{CD}}{\cos \theta} - \frac{h}{\sin \theta},$$

ou seja:

$$\overline{D'Q} = \sqrt{\left[\overline{BA} + \overline{CA} + (\tan \theta) \cdot \left(\overline{CD'} - \frac{h}{\tan \theta} \right) \right] \left[\overline{CA} + (\tan \theta) \cdot \left(\overline{CD'} - \frac{h}{\tan \theta} \right) \right]} - \frac{\left(\overline{CD'} - \frac{h}{\tan \theta} \right)}{\cos \theta} - \frac{h}{\sin \theta},$$

que é a distância entre a primeira fileira de poltronas, até a fileira que queríamos.

Se x é a distância entre as fileiras do cinema, devemos sentar na fileira

$$\frac{\overline{D'Q}}{x} + 1,$$

pois a primeira fileira de poltronas está exatamente sobre D' .

Normalmente, $\frac{D'Q}{x}$ não é um número inteiro, então consideraremos uma aproximação.

Temos assim uma solução literal, que depende das medidas do cinema. Como exemplo, tome um cinema com as seguintes medidas:

Tamanho da tela = 8 metros = \overline{AB} .

Altura da tela = 3,5 metros = \overline{CA} .

Distância do pé da tela até a primeira fileira = 3,5 metros = $\overline{CD'}$.

Inclinação das do chão das cadeiras = $20^\circ = \theta$.

Altura dos olhos ao chão = 1 metro = h .

Distância entre as fileiras do cinema = 0,8 metros = x .

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{D'Q} \cong & \sqrt{\left[8 + 3,5 + (\tan 20^\circ) \cdot \left(3,5 - \frac{1}{\tan 20^\circ}\right)\right] \left[3,5 + (\tan 20^\circ) \cdot \left(3,5 - \frac{1}{\tan 20^\circ}\right)\right]} \\ & - \frac{\left(3,5 - \frac{1}{\tan 20^\circ}\right)}{\cos 20^\circ} - \frac{1}{\sin 20^\circ} \cong 6,66 - 0,8 - 2,9 = 2,96. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\overline{D'Q}}{x} \cong \frac{2,96}{0,8} + 1 \cong 5.$$

Logo, neste exemplo, teremos o maior ângulo de visão na 5ª fileira.

Existem muitas maneiras de resolver problemas de extremos como o “Problema do Cinema”, aqui apresentado. Por exemplo, basta determinar a função que defina o ângulo \widehat{APB} , na medida em que o ponto P varia sobre r . Daí, restaria desenhar o gráfico desta função e estimar onde ela atinge seu máximo. Usando o Cálculo, deixo a cargo do leitor fazer esta resolução (dica: use lei dos cossenos), e comparar com os resultados aqui obtidos. Para uma outra resolução utilizando Cálculo, indicamos [3], p. 71.

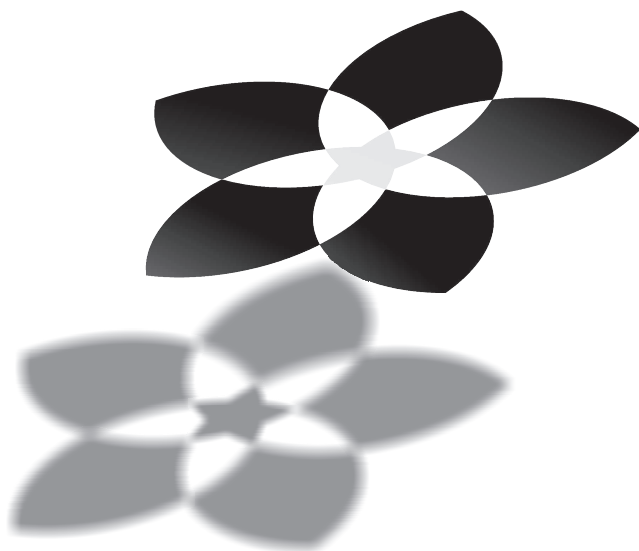
Gostaria de resaltar que sentar no ponto onde o ângulo de visão seja máximo significa obter a maior imagem em nossa retina, ou seja, a melhor visão. No entanto, cada pessoa tem um gosto diferente, algumas gostam de ficar coladas na tela, outras no fundo... tornando-se uma questão totalmente pessoal.

Também aos prezados leitores, peço que enviem seus comentários, sugestões, elogios, críticas, dúvidas, correções ..., para que possamos engrandecer este artigo.

Para finalizar, agradeço a oportunidade que me foi dada em poder contribuir para esta publicação, ao Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina, José Luiz Rosas Pinho, a todos meus amigos, em particular ao Leonardo, e a minha namorada Louise, pelo apoio e pelas correções da pré-publicação.

Referências

- [1] BOYER, Carl B. - *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1974.
 - [2] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau - *Fundamentos de Matemática Elementar 9*. Atual Editora LTDA., São Paulo, 1997.
 - [3] NAHIN, Paul J. - *When least is best*. Princeton University Press, New Jersey, 2004.
 - [4] PASQUALI, Kely Cristina. - *Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana*. (Trabalho de Conclusão de Curso) Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2004.
-



Artigo

Os Números Irracionais

Leonardo Koller Sacht³

leomatematico@yahoo.com.br

Introdução e Contexto Histórico

No texto a seguir, propomo-nos a discutir a história e as propriedades de alguns números irracionais conhecidos. O principal objetivo desta exposição é somar conhecimentos a respeito de tal assunto, essencialmente a alunos e professores de ensino médio. Por isso, não nos aprofundaremos em demonstrações que necessitem de técnicas mais aprimoradas, como o Cálculo Diferencial e Integral.

Como meta secundária, daremos noções de como são feitas demonstrações em Matemática, usando uma argumentação conhecida como *redução ao absurdo*.

Não é difícil de imaginar como os números inteiros positivos e os racionais surgiram no desenvolvimento da civilização humana. Os primeiros surgiram com a necessidade de contagem. Contar significa comparar quantidades de elementos de conjuntos distintos. Por exemplo, a quantidade de alimentos conseguidos em uma colheita com a quantidade de membros de uma tribo. Já a noção de fração surgiu, primeiramente, com a necessidade freqüente de um determinado grupo partilhar um ou mais bens de propriedade comum entre seus integrantes.

A idéia de um número que não seja nem inteiro nem fracionário é um pouco mais complicada e surgiu apenas num estágio muito mais avançado da civilização, com o desenvolvimento da Geometria. Por exemplo, com a necessidade de medir a diagonal de um quadrado ou calcular a área de um terreno em forma de círculo.

No contexto da Teoria dos Conjuntos, o conceito de número irracional foi definitivamente consolidado na segunda metade do século XIX, pelo matemático alemão J.W.R. Dedekind, através dos seus *cortes*. Os cortes de Dedekind estabelecem, de uma forma axiomática, o sentido de número real. Conhecidos os conjuntos \mathbb{R} e \mathbb{Q} , então \mathbb{I} fica definido como o conjunto de todos os números reais que não são racionais, ou seja, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

³Acadêmico do curso de Matemática e Computação Científica da UFSC, 6ª fase, bolsista do PET.

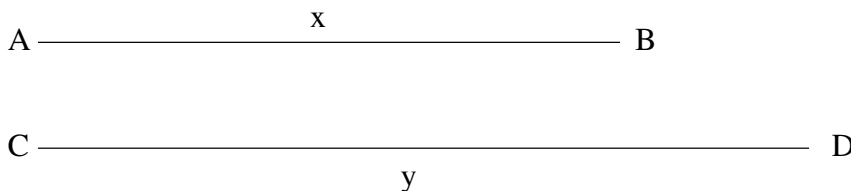
Discutidas suas origens, falaremos agora sobre alguns elementos de \mathbb{I} : $\sqrt{2}$, π , e .

O Irracional $\sqrt{2}$

A discussão a respeito da descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ se confunde um pouco com o próprio surgimento dos números irracionais, e nos remete à Grécia Antiga, há cerca de 2500 anos atrás.

Naquele tempo, este problema não havia surgido como um problema de números, e sim, da noção geométrica de segmentos de reta comensuráveis. Uma explicação para tal fato talvez seja que os gregos se focavam muito mais na Geometria do que em qualquer outra área da Matemática.

Definição 1: Sejam \overline{AB} e \overline{CD} dois segmentos de reta de comprimentos x e y , respectivamente.



Dizemos que \overline{AB} e \overline{CD} são *comensuráveis* se existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ tais que $k_1x = k_2y$.

Esta definição, em outras palavras, estabelece que esses dois segmentos são comensuráveis se colocarmos os pontos A e C no mesmo lugar e, após prolongarmos cada segmento um determinado número de vezes o seu próprio comprimento, suas extremidades coincidirem.

Note que provar que existem segmentos de reta *incomensuráveis* é a mesma coisa que provar que existem números irracionais, pois, se \overline{AB} e \overline{CD} são incomensuráveis, não existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ tais que $\frac{x}{y} = \frac{k_2}{k_1}$ e, daí, segue que o número $\frac{x}{y}$ não pode ser escrito como razão de dois números naturais. Reciprocamente, se a é irracional positivo, não existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ tais que $a = \frac{k_1}{k_2}$, ou seja, segmentos de comprimento a e 1 são incomensuráveis.

Para Pitágoras (580-500 a.C., aproximadamente), um dos mais brilhantes matemáticos de seu tempo, todas as grandezas eram comensuráveis. O universo pi-

tagórico era, então, baseado nas propriedades dos números inteiros e suas razões. Esta idéia era artigo de fé fundamental dos seguidores de Pitágoras.

Diz-se que o pitagórico Hipasus de Metapontum fora expulso do meio por não crer em tal idéia. Além disso, conta-se uma história que, por provar a existência de grandezas incomensuráveis, ele teria sido morto num naufrágio para que a idéia não se difundisse.

Não se sabe ao certo quem, de fato, demonstrou a existência de grandezas incomensuráveis pela primeira vez e nem a data precisa. A percepção desta existência está possivelmente ligada à aplicação do teorema de Pitágoras na diagonal de um quadrado.

A demonstração que faremos a seguir é creditada a Aristóteles (384-322 a.C.) e utiliza um procedimento muito comum em Matemática: a *redução ao absurdo*. Supõe-se que a negação da tese é verdadeira e, a partir daí, usando uma cadeia de implicações corretas, obtém-se uma conclusão absurda. Logo, a negação da tese é falsa, isto é, a tese é verdadeira. Este procedimento é justificado pela Lógica, um ramo da Filosofia.

Teorema 1: A diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis.

Demonstração: Sejam d e l diagonal e lado de um quadrado, respectivamente. Suponha que d e l sejam comensuráveis, isto é, $\frac{d}{l} = \frac{a}{b}$, para $a, b \in \mathbb{N}^*$. Além disso, suponha que $\frac{a}{b}$ seja uma fração irredutível, ou seja, a e b não possuem fatores primos em comum (isso é sempre possível, pois, caso a e b tenham fatores primos em comum, $\frac{a}{b}$ pode ser simplificada de tal forma a ficar irredutível).

Pelo teorema de Pitágoras, $d^2 = l^2 + l^2$, isto é, $\left(\frac{d}{l}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$ e, então, $a^2 = 2b^2$.

Portanto, a^2 é par e podemos concluir que a é par. Logo, $a = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Daí segue que $2b^2 = 4k^2$, ou seja, $b^2 = 2k^2$ e, da mesma forma, b é par. Mas isto é absurdo, pois a e b não podem ser pares simultaneamente, por termos assumido que eles não possuem fatores em comum. Portanto, d e l são incomensuráveis. ■

Deste teorema, podemos concluir que $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ é um irracional, pois $\sqrt{2}$ é a diagonal de um quadrado de lado 1.

Nesta seção, restringimo-nos a falar sobre a irracionalidade de $\sqrt{2}$ e todo o contexto que estava à volta disso. Mas existe um resultado geral que nos fala a respeito da irracionalidade da raiz n -ésima de qualquer número natural, como segue.

Teorema 2: Um número da forma $\sqrt[n]{a}$, em que a e n são números inteiros positivos, ou é irracional ou é um inteiro.

Demonstração: A demonstração deste fato não é difícil, mas será omitida, por necessitar de muitos resultados precedentes. Quem possuir interesse, recomendamos [6], p. 96.

O Irracional π

Sabemos que o número π representa a área de um círculo de raio 1. Também podemos dizer que é a razão do comprimento de qualquer circunferência pelo seu diâmetro. Há cerca de 4000 anos, já fora percebido que esta razão é a mesma para toda circunferência. Os babilônios obtiveram uma boa aproximação para π : $\frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}$, ou seja, $3,125 < \pi < 3,142$. O próprio Antigo Testamento da Bíblia Sagrada, escrito por volta de 500 a.C., apresenta uma aproximação para π , mas esta não é tão satisfatória quanto a dos babilônios:

“E fez o Mar de metal fundido, medindo dez côvados ⁴ de uma borda à outra, de forma circular, com cinco côvados de altura; um cordão de trinta côvados cingia-o ao redor”.

II Crônicas 4:2.

Este trecho fala de detalhes a respeito do templo que o rei Salomão estava construindo para Deus e nele está registrado claramente que $\pi \approx 3$.

O primeiro método que se tem notícia para calcular π foi usado pelo grego Arquimedes, em 240 a.C. Ele usou a seguinte propriedade de polígonos inscritos e circunscritos:

“Se p_k e P_k denotam, respectivamente, os perímetros dos polígonos regulares de k lados inscrito e circunscrito ao mesmo círculo, então:

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}, p_{2n} = (p_n P_{2n})^{1/2}.”$$

Começando com hexágonos, inscrito e circunscrito ao círculo de diâmetro 1 (os quais não possuem perímetro difícil de calcular), Arquimedes limitava, superior e

⁴1 côvado \approx 52,5cm

inferiormente, o comprimento da circunferência de diâmetro unitário (que é igual a π) pelos polígonos de 12, 24, 48, 96 lados etc. Assim, ele concluiu que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

Este método que acabamos de descrever é conhecido como *método clássico para o cálculo de π* . Ele ainda foi utilizado quase até 2000 anos depois da morte de Arquimedes por vários outros matemáticos que procuravam aproximações mais precisas para π . Por exemplo, o holandês Ludolph Van Ceulen, no século XVII, ficou praticamente a vida toda empenhado nesta tarefa e calculou π usando polígonos de 2^{62} lados, atingindo uma precisão de 35 casas, o que foi considerado notável na época. Por tal feito, π , às vezes, é chamado de *número ludolphiano*.

No ano de 1671, foi feita uma descoberta importante para quem tinha interesse pelo π . O escocês James Gregory obteve a série infinita:

$$\arctg(x) = x - \frac{x}{3} + \frac{x}{5} - \frac{x}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x}{2k+1},$$

para $x \in [-1, 1]$. Só que passou despercebido para ele que, se tomasse $x = 1$, obteria $\frac{\pi}{4}$ como um somatório infinito:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

A aplicação desta série fez com que vários outros matemáticos obtivessem melhores aproximações para π , como o francês *de Lagny*, em 1719, que chegou a 112 casas decimais.

Até então, muitas pessoas calculavam o π por ser um desafio e outras tinham como objetivo tentar achar um período em suas casas, de forma a concluir que π era racional.

Mas, em 1767, o suíço Johann Heinrich Lambert jogou um balde de água fria em quem tinha esperança de que π fosse racional. Ele provou que, se $tg(x)$ é racional, então x não é racional. Assim, como $1 = tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$ é racional, segue que $\frac{\pi}{4}$ é irracional e, então, π é irracional.

Hoje em dia, a prova mais conhecida de que π é irracional é uma que utiliza técnicas de Cálculo Diferencial e Integral que, se o leitor possuir interesse, recomendamos [7], pp. 321-324.

Após o surgimento dos computadores, na década de 50 do século passado, ficou muito mais fácil calcular as casas decimais de π . Atualmente, já se sabe centenas de

milhões delas. Às vezes, essas aproximações são utilizadas para testar o bom funcionamento dos próprios computadores.

Na cronologia de π que acabamos de relatar, não citamos alguns fatos, no mínimo, curiosos a este respeito. Conta a História que, no ano de 1892, alguém anunciou no periódico *New York Tribune* a descoberta de um segredo de longa data perdido que levava a 3,2 como valor exato de π . Além disso, em 1931, várias escolas dos EUA receberam um folheto dedicado a provar que $\pi = \frac{313}{81}$.

O mais curioso destes episódios foi, sem dúvida, um que aconteceu no fim do século XIX. O norte-americano Edward J. Goodwin, em 1894, disse que houvera resolvido o problema da quadratura do círculo (que discutiremos mais adiante) e, em 1897, encaminhou um projeto para a Assembléia do estado de Indiana tentando tornar isto lei. No corpo deste projeto, percebe-se que Goodwin dá dois valores distintos para π : $\pi = 3,2$ e $\pi = 4$, o que é, no mínimo, bastante confuso. Por incrível que pareça, o projeto foi aprovado pela Assembléia. Felizmente, foi barrado no Senado daquele estado. Para quem quiser saber mais sobre tal fato, recomendamos [4].

O Irracional e

Os dois irracionais que discutimos até o presente momento, $\sqrt{2}$ e π , surgiram de problemas geométricos de milhares de anos atrás. A origem de e , porém, não é tão clara, mas acredita-se que surgiu, primeiramente, de um problema de juros compostos do século XVI.

Para podermos expor essa possível origem, façamos uma breve revisão a respeito do conceito de juros.

Digamos que você tem R\$100,00 para fazer um investimento num banco que renderá, anualmente, *juros simples* de 5% $\left(\frac{5}{100} = 0,05\right)$, ou seja, a cada ano, você receberá a mais 5% de R\$100,00, isto é $\frac{5}{100} \cdot 100 = 5$ reais. Desta forma, com o passar dos anos seu dinheiro formará uma progressão aritmética que é, neste caso, 105, 110, 115, ...

Agora, se você resolver investir os mesmos R\$100,00 num investimento que renda, por ano, *juros compostos* de 0,05 (5%) você receberá sempre juros de 0,05 sobre a quantia de momento. Neste caso, você receberia, ao fim do primeiro ano, os mesmos R\$105,00 do caso anterior mas, a partir daí, receberia $(1,05)^2 \cdot 100 = 1,05(105) = 110,25$, $(1,05)^3 \cdot 100$, $(1,05)^4 \cdot 100$, ... De modo geral, se você investir x reais a juros anuais compostos de taxa r (estes já na forma decimal - no caso anterior,

$r = 0,05$), após t anos você terá a quantia

$$S = x(1 + r)^t.$$

A partir daí que e começa a surgir. Digamos que o seu banco, em vez de pagar juros compostos de taxa r anualmente, ele pague juros compostos de taxa $\frac{r}{12}$ mensalmente. Assim, ao final de t anos a quantia será:

$$S = x \left[\left(1 + \frac{r}{12} \right)^{12} \right]^t.$$

Se dividirmos um ano em n partes iguais, chegaremos à fórmula:

$$S = x \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}.$$

Analisemos um caso particular: $x = 1$ (1 real), $r = 1$ (juros de 100%) e $t = 1$ (o dinheiro ficou investido apenas um ano). Segue pelo raciocínio feito até agora que, ao final do ano, você terá

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Nosso objetivo agora é saber qual será o valor de S_n se dividirmos o ano em partes cada vez menores, ou seja, valores de n cada vez maiores. Veja a tabela a seguir, na qual os valores de S_n estão aproximados por 5 casas após a vírgula:

n	S_n
1	2
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828

Note que, quando n assume valores muito grandes, S_n tende a se aproximar de um certo número. Por trás disso, está o conceito de limite da sequência $S_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, quando n tende ao infinito.

É possível provar que, de fato, S_n converge. Na referência [5], p. 260-262, pode ser encontrada tal prova. Não a faremos pois, claramente, necessitaríamos alguns resultados de cálculo a respeito de convergência de seqüências. Nesta mesma referência, está provado que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$. A partir daí, demonstra-se também que este número é irracional.

O símbolo e foi adotado para este limite, pela primeira vez, por Leonhard Euler em sua *Introductio Analysim Infinitorum*, em 1748. Nesta obra, Euler ressalta a importância de e e e^x (a única função cuja derivada é igual a ela mesma) em Análise. Apesar de toda sua genialidade, ele era muito modesto e, provavelmente, não sugeriu este símbolo em homenagem própria. Acredita-se que ele o usou em referência à função exponencial. Outro motivo pode ter sido, simplesmente, pelas letras a , b , c e d já estarem ocupadas em outras partes da matemática.

Números Algébricos, Transcendentes e a Quadratura do Círculo

Definição 2: Um número real⁵ x é dito *algébrico* se é raiz de algum polinômio não-nulo com coeficientes inteiros, ou seja,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

para alguns inteiros a_0, a_1, \dots, a_n .

Note que a maioria dos números com os quais lidamos são algébricos. Por exemplo, -1 , 2 , $\frac{4}{5}$ satisfazem $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$ e $5x - 4 = 0$, respectivamente. Até o próprio $\sqrt{2}$, que já foi objeto do nosso estudo, faz parte desta classe, pois é solução de $x^2 - 2 = 0$.

Todos os números racionais são, claramente, algébricos pois, se $q = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$, q é solução de $bx - a = 0$.

Devido a estas evidências, fazia-se a seguinte pergunta no início do século XIX: “Será que existem números não-algébricos?” Esta questão fora solucionada pelo francês Joseph Liouville (1809-1882), em 1844. Ele produziu uma classe de números que não eram algébricos, conhecidos como *números de Liouville*. Um desses números é:

$$\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}},$$

⁵A mesma definição vale para números complexos, mas nos restringiremos apenas ao caso real.

o qual possui expansão decimal 0,110001000000000000000000100... Sabendo que existem números não algébricos, podemos dar a seguinte definição:

Definição 3: Um número real, que não é algébrico, é transcendente.

A partir daí, as atenções se voltaram para e e π . Já havia sido provado que eram irracionais no século anterior, por Euler (em 1737) e por Lambert (em 1767). O próprio Lambert já suspeitava da transcendência de e e de π .

O “descobridor” dos números transcendententes, Liouville, conseguiu provar que e não é raiz de nenhum polinômio de segundo grau com coeficientes inteiros, mas isto, certamente, não é suficiente para afirmar que e é transcendente. Tal tarefa seria solucionada por seu compatriota Charles Hermite, (1822-1901), em 1873. Ele publicou um ensaio de mais de trinta páginas para provar que e é transcendente.

Por ter alcançado tal feito, podia se esperar que Hermite se empolgasse e provasse que π também é transcendente. Isto, porém, não aconteceu. Numa carta a um ex-aluno, ele escreveu: “Eu não me arriscarei a provar a transcendência de π . Se outros tentarem, ninguém ficará mais feliz do que eu com o seu sucesso. Mas, acredite-me, vai custar a eles algum esforço”.

Contrariando as expectativas de Hermite, o alemão Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852-1939) conseguiu tal prova apenas 9 anos após a prova de que e era transcendente. E mais: ele usou como base o raciocínio que Hermite desenvolveu para e . Basta saber se este último ficou tão feliz quanto afirmou que ficaria.

O fato de π ser transcendente botou um ponto final ao polêmico *problema da quadratura do círculo*. Desde a Grécia, antes de Cristo, era levantada a seguinte questão: Dado um círculo qualquer, é possível construir, apenas com régua e compasso, um quadrado de mesma área? Quando o raio é 1, a pergunta se torna: É possível construir um quadrado de área π ?, ou seja, é possível construir o lado $\sqrt{\pi}$?

Quando provou-se que π era transcendente, já era sabido que os segmentos de comprimento não-algébrico não são construtíveis. A demonstração disto não é nada simples e requer muitos conhecimentos a respeito de estruturas algébricas (maiores informações em [2], pp.160-162).

Podemos, partindo da premissa que π é transcendente, provar que $\sqrt{\pi}$ também o é, como segue:

Afirmção 1: Se β é transcendente, então $\sqrt{\beta}$ é transcendente.

Demonstração: Suponha que $\sqrt{\beta}$ é algébrico. Então, existe um polinômio não-nulo com coeficientes inteiros, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, tal que $f(\sqrt{\beta}) = 0$.

Note que alguns coeficientes podem ser nulos mas, como $f(x)$ é não-nulo, pelo menos um tem que ser diferente de zero, digamos a_j . Então, $f(x) = a_j x^j + \dots + a_n x^n = x^j (a_j + \dots + a_n x^{n-j})$. Como $\sqrt{\beta}$ não é raiz de x^j , então é raiz de $a_j + \dots + a_n x^{n-j}$, de forma que podemos assumir que $\sqrt{\beta}$ é raiz de um polinômio com termo constante, ou seja, se $\sqrt{\beta}$ é raiz de $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, podemos assumir $a_0 \neq 0$. Reescreva

$$f(x) = \underbrace{(a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r)}_{g(x)} + x \underbrace{(a_1 + a_3 x^2 + \dots + a_s x^{s-1})}_{h(x)},$$

em que r e s são, respectivamente, o maior par e o maior ímpar menores ou iguais a n .

Note que $0 = f(\sqrt{\beta}) = g(\sqrt{\beta}) + \sqrt{\beta} \cdot h(\sqrt{\beta})$. Logo, $g(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta} \cdot h(\sqrt{\beta})$.

Sejam $g_1(x) = a_0 + a_2 x + \dots + a_r x^{\frac{r}{2}}$ e $h_1(x) = a_1 + a_3 x + \dots + a_s x^{\frac{s-1}{2}}$.

É claro que $g_1(\beta) = g(\sqrt{\beta})$ e $h_1(\beta) = h(\sqrt{\beta})$.

Tome $\varphi(x) = g_1(x)g_1(x) - x h_1(x)h_1(x)$. Observe que $\varphi(x)$ só possui coeficientes inteiros. Além disso, $\varphi(\beta) = (g_1(\beta))^2 - \beta(h_1(\beta))^2 = (g(\sqrt{\beta}))^2 - \beta(h(\sqrt{\beta}))^2$.

Como $g(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta} \cdot h(\sqrt{\beta})$, segue que $\varphi(\beta) = \beta(h(\sqrt{\beta}))^2 - \beta(h(\sqrt{\beta}))^2 = 0$.

Portanto, β é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. A seguir, mostraremos que este polinômio é não-nulo, concluindo que β é algébrico, o que é absurdo.

De fato, $\varphi(0) = (g_1(0))^2 = (a_0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_r \cdot 0^{\frac{r}{2}})^2 = a_0^2$. Como assumimos $a_0 \neq 0$, segue que $\varphi(0) = a_0^2 \neq 0$, de forma que $\varphi(x) \neq 0$. ■

Enfim, podemos concluir que $\sqrt{\pi}$ não é construtível.

A descoberta da existência dos números transcendentais (1844) não causou tanto choque quanto a descoberta dos números irracionais, cerca de 2000 anos antes. O mais surpreendente ainda estava por vir: em 1874, o alemão Georg Cantor (1845-1918) provou que há mais números irracionais do que racionais e, além disso, existem mais números transcendentais do que algébricos. Ou seja, os transcendentais passaram de meras excentricidades para grande maioria.

Considerações Finais

Após este breve relato, percebe-se que os números irracionais sempre despertaram fascínio aos adoradores de Matemática e foram encarados como desafio por alguns destes. Por exemplo, após o surgimento de π , passaram-se milhares de anos, e custou muito trabalho para provar a sua irracionalidade.

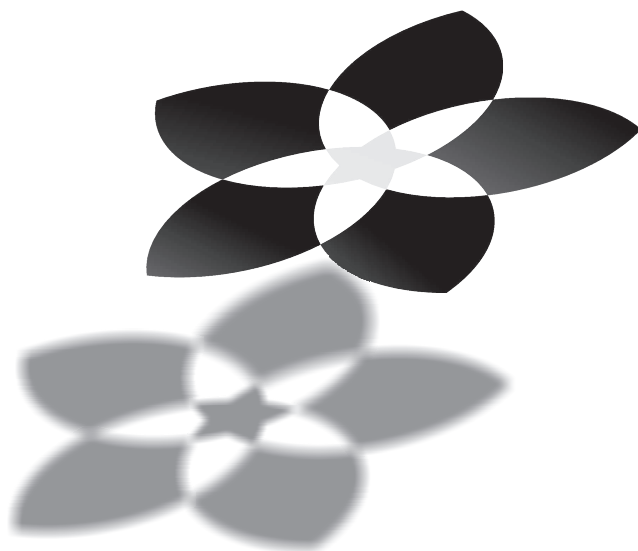
Também pode-se concluir que o aparecimento destes números está intimamente ligado ao pensamento e à sociedade da época na qual cada um destes surgiu. Para ilustrar tal fato, pode ser citado o número e , que apareceu com o desenvolvimento do comércio na Europa, no século XVI.

Apesar de terem sido abordadas apenas questões históricas neste texto, existem, ainda hoje, problemas em aberto sobre a irracionalidade e a transcendência de certos números. Por exemplo, sabe-se que a sequência $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)$ converge, mas não se sabe se este limite, conhecido como *número de Euler*, é um número racional.

Para encerrar, gostaria de agradecer a algumas pessoas: aos meus caros colegas do PET-Matemática da UFSC, por me darem este espaço; aos professores Oscar Ricardo Janesch e José Luiz Rosas Pinho e aos amigos Felipe, Louise e Paulo, pelas valiosas revisões e contribuições.

Referências

- [1] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1974.
 - [2] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O Que é Matemática?*. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2000.
 - [3] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP, Campinas, 1995.
 - [4] HALLERBERG, Arthur E. *Indiana's Squared Circle*, Mathematics Magazine, volume 50, número 3, pp.136-140, maio de 1977.
 - [5] MAOR, Eli. *e: A História de um Número*. Editora Record, Rio de Janeiro, 2003.
 - [6] NIVEN, Ivan Morton. *Números: Racionais e Irracionais*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1984.
 - [7] SPIVAK, Michael. *Calculus*. Publish or Perish, Inc., Third Edition, Houston, 1994.
-



Soluções dos Problemas Propostos

1. (*Proposto por Jucavo Savie Rocha, mestrando UFSC*) Sejam 16 cartas de baralho, do valete ao ás (J, Q, K, A) e dos quatro naipes (Ouro, Espada, Copas, Paus), todas distintas. Disponha essas 16 cartas em um quadrado quatro por quatro de forma que em nenhuma linha, coluna ou diagonal se repitam duas cartas de mesma letra ou mesmo naipe.

SOLUÇÃO: (apresentada pelo graduando Cauê Roratto)

Uma boa estratégia é começar a dispor as cartas das diagonais. Deste modo, começa-se a restringir as possibilidades em todas as linhas e colunas. Se começarmos por alguma linha ou coluna, ficaríamos com muitas opções em cada espaço restante. Começamos então pela diagonal, dispondo uma carta de cada tipo e não repetindo os naipes já utilizados.

$J\heartsuit$			
	$A\diamondsuit$		
		$Q\spadesuit$	
			$K\clubsuit$

Na outra diagonal, segue-se com o mesmo raciocínio. Mas observe que já temos algumas restrições. Por exemplo, na casa da terceira linha, segunda coluna, não se podem colocar A nem Q , também nem Ouro, nem Espada, pois estes elementos já existem na mesma linha ou coluna, restando apenas a possibilidade de J e K , nos naipes de Copas e Paus. Da mesma forma observam-se as restrições de cada espaço desta diagonal e faz-se a distribuição das cartas.

$J\heartsuit$			$A\spadesuit$
	$A\diamondsuit$	$J\clubsuit$	
	$K\heartsuit$	$Q\spadesuit$	
$Q\diamondsuit$			$K\clubsuit$

Agora basta completar as laterais. Observe que pode-se fazer isso da mesma forma que completou-se a diagonal anterior, observando as restrições. Por exemplo, na casa da segunda linha, primeira coluna, não se podem colocar J , Q , Copas, Ouro (já se encontram na coluna 1), e também nem A e Paus (pois estão presentes na linha B), restando então, a possibilidade K de Espada. Fazendo a mesma análise para todas as outras casas, completa-se a tabela.

$J\heartsuit$	$Q\clubsuit$	$K\diamondsuit$	$A\spadesuit$
$K\spadesuit$	$A\diamondsuit$	$J\clubsuit$	$Q\heartsuit$
$A\clubsuit$	$K\heartsuit$	$Q\spadesuit$	$J\diamondsuit$
$Q\diamondsuit$	$J\spadesuit$	$A\heartsuit$	$K\clubsuit$

2. (Proposto por Fabiano Carlos Cidral, graduando UFSC). Prove que todo subconjunto de 1003 elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots, 2004\}$ possui pelo menos dois elementos cuja soma é igual a 2005.

SOLUÇÃO: (apresentada pelo graduando Conrado Damato de Lacerda)

Suponha, por absurdo, que um subconjunto $B \subseteq A$ tenha 1003 elementos e nenhum par de elementos de B dê soma 2005. Vamos escrever $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{1003}\}$. Nossa hipótese de absurdo nos diz que o número $2005 - \alpha_1$ (que está em A) não está em B . O mesmo vale para $2005 - \alpha_i$, com $i \in \{1, \dots, 1003\}$. Assim, o conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{1003}\} \cup \{2005 - \alpha_1, \dots, 2005 - \alpha_{1003}\}$ está em A e possui 2006 elementos, uma contradição com a hipótese de que $A = \{1, \dots, 2004\}$. Então existe pelo menos um par de elementos em B cuja soma é 2005.

3. (Proposto por José Luiz Rosas Pinho, UFSC) Seja γ uma circunferência de raio R dado. Mostre que, para cada ponto P no interior do círculo delimitado por γ , existe um único número real $r > 0$ tal que as retas tangentes à circunferência de centro P e raio r , passando por qualquer ponto A de γ , cruzam a circunferência γ em pontos B e C , de modo que a circunferência de centro P e raio r está inscrita no triângulo $\triangle ABC$.

SOLUÇÃO: (apresentada pelo proponente)

Seja uma circunferência de centro O e raio R e seja I um ponto qualquer no interior da circunferência. Existe uma relação entre a distância do incentro ao circuncentro de um triângulo e os raios das circunferências inscritas e circunscritas a esse triângulo. É a relação de Euler:

$$d^2 = R^2 - 2rR,$$

em que d é a distância dos dois centros, R é o raio da circunferência circunscrita e r o raio da circunferência inscrita.

Considere então, com centro em I , a circunferência de raio r dada por:

$$r = \frac{R^2 - OI^2}{2R},$$

que satisfaz a relação de Euler (aqui $OI=d$).

Vamos provar então que, dado qualquer ponto A na circunferência de centro O , ao traçarmos as tangentes, por este ponto A , à circunferência de centro I , obtemos pontos B e C na circunferência de centro O , de modo que o segmento \overline{BC} seja também tangente à circunferência de centro I , ou seja, de modo que I seja o incentro do triângulo $\triangle ABC$.

Seja então H em \overline{AB} tal que $\overline{OH} \perp \overline{AB}$, e seja F o ponto da reta OH no arco AB . Então H é o ponto médio de \overline{AB} e F divide o arco AB em dois arcos de mesma medida.

Sejam K e E os pontos de intersecção das semi-retas \overrightarrow{FI} e \overrightarrow{AI} , respectivamente, com a circunferência de centro O . Note que \overrightarrow{AI} é bissetriz do ângulo $\angle BAC$.

Seja ainda G o ponto da reta OH tal que $\overline{IG} \perp \overline{OH}$

Considere o triângulo $\triangle OIF$. Seja $\alpha = \widehat{OFI}$. Pela lei dos cossenos, temos:

$$OI^2 = OF^2 + FI^2 - 2 \cdot OF \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

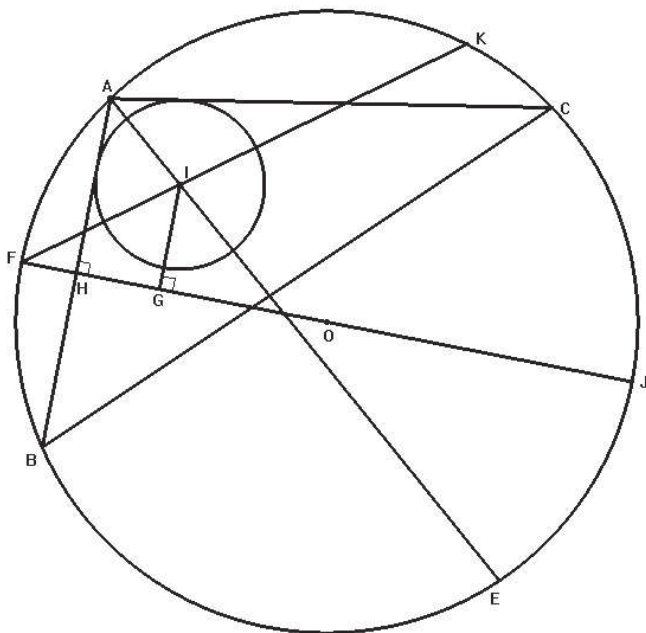
Mas, do $\triangle FGI$, retângulo em G , temos: $\cos \alpha = \frac{FG}{FI}$ (2)

Levando (2) em (1), obtemos:

$$OI^2 = OF^2 + FI^2 - 2 \cdot OF \cdot FG = R^2 + FI^2 - 2R(FH + r), \quad (3)$$

pois

$$OF = R, \quad FG = FH + HG = FH + r$$



Por outro lado, o triângulo $\triangle AFJ$ é retângulo em A (J é tal que \overline{FJ} é diâmetro da circunferência de centro O). Como \overline{AH} é a altura em relação à hipotenusa \overline{FJ} desse triângulo, temos:

$$AF^2 = FH \cdot FJ = FH \cdot 2R \quad (4)$$

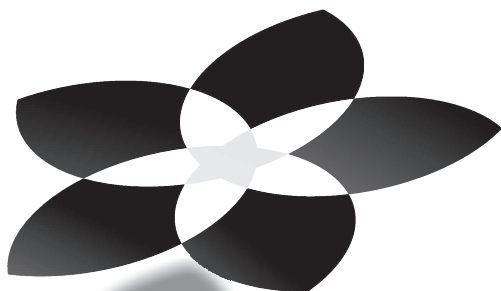
Levando (4) em (3) e usando a relação de Euler,

$$OI^2 = R^2 - 2rR,$$

obtemos: $R^2 - 2rR = R^2 + FI^2 - AF^2 - 2rR$, ou $FI^2 = AF^2$, ou $FI = AF$, e, portanto, o triângulo $\triangle AFI$ é isósceles com $\widehat{FAI} = \widehat{FAI}$ (5).

$$\begin{aligned} \text{Mas } \widehat{FAI} &= \widehat{FAB} + \widehat{BAE} = \frac{\text{arco}FB}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} \quad (6) \quad \text{e } \widehat{FIA} = \\ &= \frac{\text{arco}FA}{2} + \frac{\text{arco}EK}{2} = \frac{C}{2} + \frac{\text{arco}EK}{2} \quad (7) \end{aligned}$$

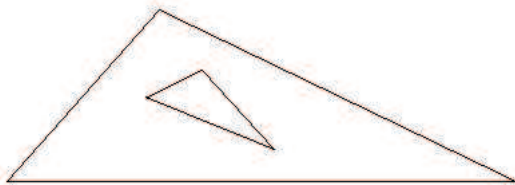
De (6), (7) e (5) temos: $\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\text{arco}EK}{2}$. Mas $\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\text{arco}EC}{2}$. Logo, $\text{arco}EC = \text{arco}EK$, ou seja, K e C são coincidentes. Portanto, os pontos F, I e C(=K) são colineares e, como F é ponto médio do arco AB, temos que $\vec{CI}(= \vec{KI})$ é bissetriz do ângulo LC, ou seja, I é o incentro do triângulo $\triangle ABC$. ■



Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições.

1. (Proposto por Eliezer Batista, UFSC) Mostre que, para quaisquer números reais a, b, c e d tem-se a desigualdade $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.
2. (Proposto por Eliezer Batista, UFSC) Mostre que a seqüência de números 49, 4489, 444889, ..., onde o próximo termo é constituído a partir do anterior inserindo-se 48 depois do último algarismo 4, são todos quadrados de números inteiros.
3. (Proposto por José Luiz Rosas Pinho, UFSC) É sabido que se colocarmos uma cópia reduzida de um mapa de uma certa região (por exemplo, a ilha de Santa Catarina) sobre o mapa original, de modo que a cópia reduzida fique inteiramente contida no mapa original, então haverá um único ponto coincidente nos dois mapas (ou seja, um único ponto de mesma latitude e longitude nos dois mapas que estão superpostos)⁶. Suponha um mapa triangular e sua cópia reduzida como na figura.



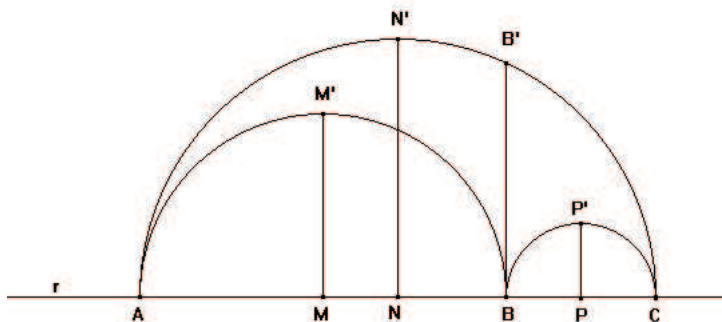
Descreva como achar tal ponto com régua (sem escala) e compasso.

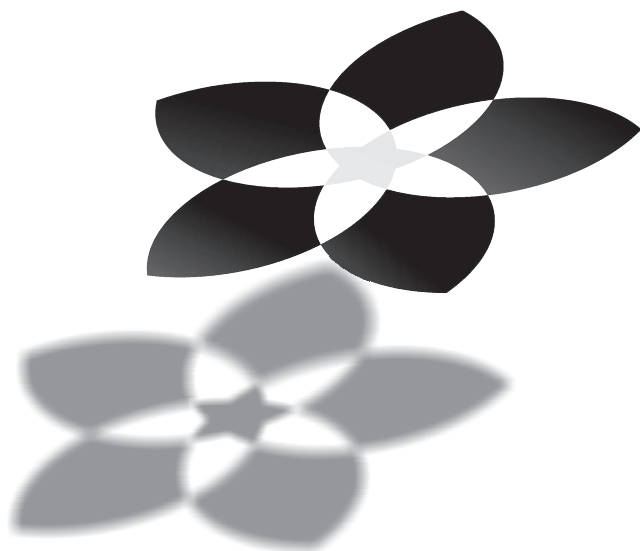
4. (Proposto por Conrado Damato de Lacerda, graduando UFSC) Dado um conjunto A_0 com 10 números naturais e um número natural $k \leq 10$, definimos a seguinte operação: escolhemos k elementos de A_0 , somamos 1 a cada um deles e fazemos um conjunto A_1 destes elementos mais os de A_0 que não foram mexidos. Note que A_1 também tem 10 elementos.

Se $A_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, determine todos os possíveis $k \leq 10$ tais que, uma vez fixado, permitem uma seqüência finita de operações que transforma A_0 em um conjunto unitário (i.e., transforma todos os elementos de A_0 em um único número).

⁶Tal ponto é dito ponto fixo (que depende da posição relativa dos dois mapas).

5. (Proposto por Paulo Ricardo Boff, graduando UFSC) A figura abaixo, representa três semi-circunferências de centros M , N e P , tangentes duas a duas respectivamente, nos pontos A , B e C . Os segmentos MM' , NN' , BB' e PP' são perpendiculares à reta r . Se a medida do segmento BB' é igual a S unidades de comprimento, qual é área do triângulo $\triangle M'N'P'$ em função de S ?





Outras Olimpíadas

Resultados de alunos de SC em outras Olimpíadas

Resultados na OBM

2005

Nível 01

Gustavo Lisbôa Empinotti (Florianópolis) - Medalha de Prata
Leonardo Gonçalves Fischer (Fraiburgo) - Medalha de Bronze

Nível 02

Renan Henrique Finder (Joinville) - Menção Honrosa

Resultado na Olimpíada de Maio

2005

Nível 02

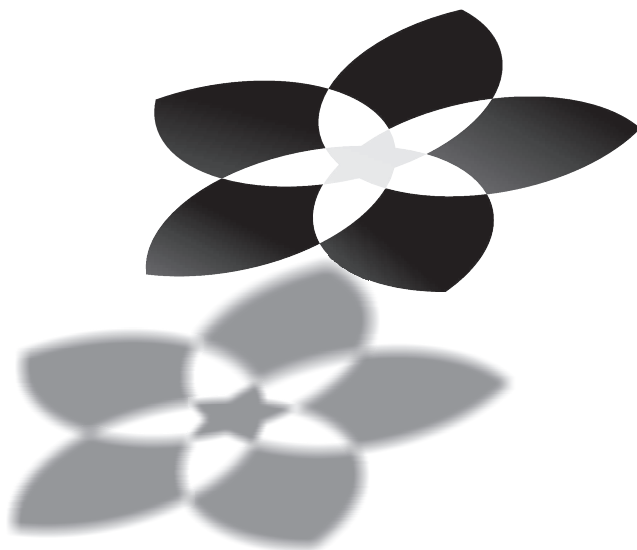
Tiago Madeira (Itajaí) - Medalha de Bronze

Resultados na OBMEP

2005

Medalhistas de Ouro

Fernanda Teresinha da Silva - Nível 1 (Joinville)
Nicole Simoes de Oliveira - Nível 1 (Mafra)
Lucas Bruno Barbosa Sandoval - Nível 2 (Florianópolis)
Rafael Motta - Nível 2 (Joinville)
Fabris Kossoski - Nível 3 (Porto União)



Informações Gerais

Envio de Problemas e Soluções

A seção de problemas propostos e soluções é uma seção dinâmica. Contribua propondo problemas ou enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o \LaTeX , então o artigo poderá ser submetido neste formato.

Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) devem cadastrar suas escolas. Existe um período em cada ano para cadastramento na OBM. Escolas cadastradas nos anos anteriores permanecem cadastradas na OBM nos anos subseqüentes, exceto se for feita uma chamada para recadastramento. Já para a ORM é preciso fazer um recadastramento todo ano, havendo também para isso um período em cada ano (ver a nossa página).

Alunos interessados em participar das olimpíadas devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberam a revista podem

nos solicitar o envio da mesma.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

- Nosso site: www.orm.mtm.ufsc.br
- Telefone/Fax: (48) 33316809 (PET - Matemática)
- e-mail: orm@pet.mtm.ufsc.br
- Endereço: PET - Matemática

Departamento de Matemática - CFM
UFSC

Campus Universitário - Trindade
88040-900 – Florianópolis/SC
