

# Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina

Nº3, 2006



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**Reitor:** Lúcio José Botelho

**Vice-Reitor:** Ariovaldo Bozan

**PRÓ-REITORIA DE CULTURA E EXTENSÃO - PRCE**

**Pró-Reitora:** Eunice Sueli Nodari

**DEPARTAMENTO DE APOIO À EXTENSÃO - DAEx**

**PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO - PREG**

**Pró-Reitor:** Marcos Laffin

**CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM**

**Diretor:** Mércles Thadeu Moretti

**Vice-Diretor:** Tarciso Antônio Grandi

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**Chefe:** Nereu Estanislau Burin

**Sub-Chefe:** Carmem Suzane Comitre Gimenez

**Apoio:**

**INSTITUTO DO MILÊNIO - Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira**

**SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM**

**CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina/  
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências  
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],  
2004 -  
v.: 23 cm

Anual  
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas,  
exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de  
Ciências Físicas e Matemáticas.

**Comissão da Olimpíada Regional de Matemática de SC:**

**Coordenador:** José Luiz Rosas Pinho.

**Professores:** Carmem Suzane Comitre Gimenez, Eliezer Batista, Licio Hernanes Bezerra, Nereu Estanislau Burin, Waldir Quandt e William Glenn Whitley.

**Bolsistas da olimpíada:** Ana Paula Bertoldi Oberziner, Rodrigo Maciel Rosa, Tatiana Sprandel.

**Bolsistas do PET - Matemática:** Ana Beatriz Michels, Carla Mörschbacher, Cauê Roratto, Cinthia Marques Vieira Andretti, Felipe Vieira, Graciele Amorim, Heloísa Cristina da Silva, Leonardo Koller Sacht, Louise Reips, Marcos Teixeira Alves, Monique Müller Lopes Rocha e Paulo Ricardo Boff.

**Comitê Editorial da Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina:**

Ana Beatriz Michels  
Felipe Vieira  
Graciele Amorim  
Karla Christina da Costa Kagoiki  
José Luiz Rosas Pinho  
Monique Müller Lopes Rocha  
Waldir Quandt  
William Glenn Whitley

**Editoração Eletrônica:**

Alda Dayana Mattos  
Ana Beatriz Michels  
Monique Müller Lopes Rocha  
Rodrigo Maciel Rosa

**Tiragem:**

1000 exemplares

**Arte da Capa:**

Renata Leandro Becker

**Postagem:**

Segundo Semestre de 2005.

**Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina N.º 3, 2006**

**ISSN 1679-7612**



# Sumário

<b>Apresentação</b>	<b>7</b>
<b>VII ORM (2004)</b>	<b>9</b>
Problemas . . . . .	11
Nível 1 . . . . .	11
Nível 2 . . . . .	13
Nível 3 . . . . .	15
Soluções . . . . .	17
Nível 1 . . . . .	17
Nível 2 . . . . .	21
Nível 3 . . . . .	25
Premiados . . . . .	29
Nível 1 . . . . .	29
Nível 2 . . . . .	32
Nível 3 . . . . .	36
Escolas Participantes . . . . .	40
 <b>Artigo</b>	 <b>47</b>
<b>Os Números e o Infinito</b>	
Ivan Pontual Costa e Silva	49
 <b>Artigo</b>	 <b>63</b>
<b>Problemas Olímpicos: Análise quanto às Diferentes Técnicas de Resolução</b>	
Juliana Duarte Zacchi	65
 <b>Artigo</b>	 <b>77</b>
<b>O Problema da Divisão da Pizza</b>	
William Glenn Whitley	79

<b>Artigo</b>	<b>85</b>
<b>Se a Terra não é Plana , quais são as Relações Métricas adequadas para determinarmos Comprimentos e Ângulos?</b>	
Celso Melchiades Doria	87
<b>Soluções de problemas propostos na revista anterior</b>	<b>107</b>
<b>Problemas propostos</b>	<b>117</b>
<b>Outras olimpíadas</b>	<b>121</b>
<b>Informações gerais</b>	<b>125</b>
Envio de Problemas e Soluções . . . . .	127
Envio de Artigos . . . . .	127
Cadastramento . . . . .	127
Como adquirir a revista . . . . .	127
Erramos . . . . .	128
Fale Conosco . . . . .	128

## Apresentação

A *Revista da Olimpíada Regional de Matemática (ORM) de Santa Catarina* tem por objetivo divulgar esta Olimpíada e a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). A ORM ocorreu em 2004 em sua 7ª edição contando com o apoio, externamente, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e do Instituto do Milênio - Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira (IM-AGIMB), e internamente das Pró-Reitorias de Cultura e Extensão (PRCE), de Assuntos Estudantis (PRAE) e de Ensino e Graduação (PREG) da Universidade Federal de Santa Catarina. Ela é realizada como um projeto de extensão do Departamento de Matemática, com a participação de um grupo de professores e de alunos com bolsas da PRCE, alunos do PET - Matemática e alunos colaboradores, todos do Curso de Matemática da UFSC.

Neste segundo número da Revista apresentamos as provas (com soluções) da IV, V e VI ORM (anos 2001, 2002 e 2003 respectivamente), artigos dos professores da UFSC Lício Hernanes Bezerra e William Glenn Whitley, participantes do projeto da ORM, soluções de problemas propostos no número anterior e novos problemas propostos. Este número foi financiado através do programa PROEXTENSÃO 2003, do Departamento de Apoio à Extensão (DAEx) da PRCE da UFSC, e pelo IM - AGIMB, sendo apresentado na 4ª Semana de Ensino, Pesquisa e Extensão (SEPEX) da UFSC em setembro de 2004.

Solicitamos a todos os interessados que nos enviem sugestões, problemas e soluções de problemas propostos, e que submetam artigos para análise do Comitê Editorial e publicação nesta Revista.

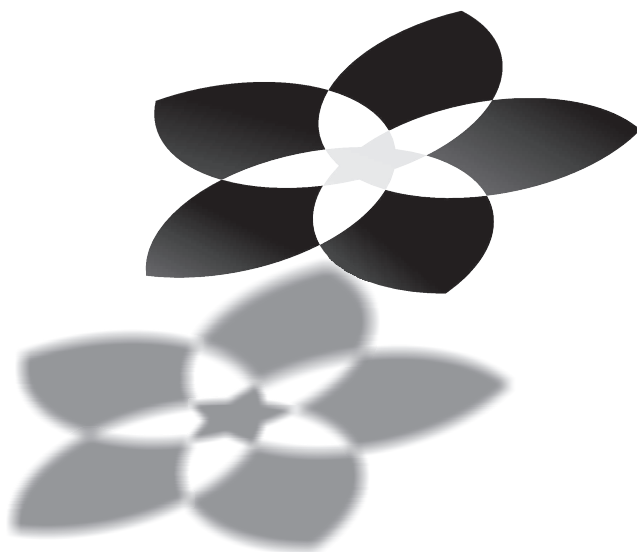
Nossa intenção é atingir o maior número de escolas em Santa Catarina e, se possível, divulgar a ORM por todo o país. As escolas que não tiverem recebido este segundo número poderão solicitar um exemplar entrando em contato conosco ou consultando nossa página. Nossa esperança é que, algum dia, todas as escolas do Estado estejam participando das Olimpíadas de Matemática.

Florianópolis, 14 de outubro de 2004.

José Luiz Rosas Pinho  
Coordenador das Olimpíadas de Matemática de Santa Catarina







**VII ORM (2004)**

---



## Problemas

### Nível 1

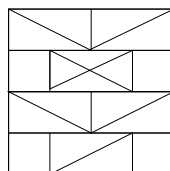
1. Lalá, Lelé e Lili são três amigas que moram juntas em Lobélia. Porém, Lalá só fica em Lobélia sexta, sábado e domingo, pois fica em Lupércio durante o resto da semana. Considerando que um mês tem trinta dias e quatro finais de semana, responda:
  - (a) Como deve ser feita a divisão, entre as três amigas, das despesas fixas de moradia e alimentação de R\$ 840,00, de modo que essas despesas sejam divididas proporcionalmente ao tempo de permanência de cada uma em Lobélia?
  - (b) Quanto dinheiro sobra para Lalá para outras despesas sabendo-se que ela ganha R\$ 2.004,00 por mês e, além das despesas em Lobélia, gasta R\$ 1.100,00 sozinha para manter um outro apartamento em Lupércio?
2. Considere a “máquina de transformar números”, que funciona conforme as seguintes regras:
  - (a) recebe um número e remove seu primeiro algarismo, guardando o número resultante;
  - (b) pega o resultado de (a), inverte a ordem dos seus algarismos e guarda o número;
  - (c) soma os algarismos do número gerado em (b) e anexa a soma ao lado direito do número;
  - (d) mostra o resultado final.

**Exemplos:**    •  $9987 \rightarrow 987 \rightarrow 789 \rightarrow 78924$ .  
                  •  $1023 \rightarrow 23 \rightarrow 32 \rightarrow 325$ .

**ALERTA!** No sistema posicional de representação de números, não se permite o algarismo ‘0’ no lado esquerdo da representação.

Ache um número de quatro algarismos que não é alterado por esta “máquina”. Há outro?

3. Numa sala há doze caixas, de mesma aparência externa, contendo barras de ouro. Cada barra de ouro pesa 1 kg. Sabe-se que nenhuma caixa está vazia. As caixas são repartidas em quatro grupos de três caixas cada e, ao serem pesados, verifica-se que a totalidade de ouro em cada grupo é de 7 kg. Em seguida, as caixas são repartidas em três grupos de quatro caixas cada, e, ao serem pesados, verifica-se que há um grupo com 19 kg de ouro, um com 4 kg e o terceiro com 5 kg. Qual é a maior quantidade de barras de ouro que está colocada em uma caixa? Quais são as possíveis distribuições das barras nas caixas?
4. O Sr. Silva sai de sua cidade natal para trabalhar em Shangrilá. Ele chega em Shangrilá no único navio que serve esta cidade em 3 de agosto de 1845 e lá fica trabalhando até 2 de agosto de 1846, inclusive. Depois, ele tira vinte dias de férias visitando cidades próximas a Shangrilá. Sabendo que o navio chega em Shangrilá a cada 27 dias de manhã cedo e parte no mesmo dia a noite, qual será a primeira data em que ele poderá voltar para a sua cidade natal?
5. Considere o ladrilho quadrado, ao lado, subdividido em regiões. Apresente uma maneira de colorir estas regiões com o mínimo possível de cores, de modo que, ao formar um quadrado com nove desses ladrilhos, regiões contíguas tenham cores diferentes.



- **Observação:** Se uma região tem apenas um vértice em contato com um lado ou um vértice de outra região, então tais regiões **não** são consideradas contíguas.

## Nível 2

1. A sociedade kardaliana usava um sistema posicional com apenas quatro algarismos distintos para representar os números naturais:  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\uparrow$  e  $\downarrow$ . Eles desenvolveram as operações de adição e multiplicação e descobriram que as operações que envolvem somente adição ou multiplicação podiam ser reordenadas ou agrupadas de qualquer modo sem alterar o resultado (propriedades associativa e comutativa) e que a multiplicação distribuía sobre a adição ( $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ ). Os valores básicos das operações são dados abaixo:

+	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\rightarrow\leftarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\rightarrow$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\rightarrow$	$\rightarrow\uparrow$

$\times$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\uparrow$
$\downarrow$	$\leftarrow$	$\downarrow$	$\rightarrow\uparrow$	$\uparrow\rightarrow$

- (a) Qual é a representação no sistema kardaliano para o nosso '0' e para o nosso '1'?
- (b) Qual é o primeiro número que é representado com dois dígitos? E com três dígitos?
- (c) Qual é a relação entre os dois números do item (b)?
- (d) Represente o valor da seguinte expressão no sistema kardaliano:  $(\rightarrow\downarrow \times \uparrow\leftarrow) + \downarrow\rightarrow\uparrow$ .
2. Considere a “máquina de transformar números”, que funciona conforme as seguintes regras:
- (a) recebe um número e remove seu primeiro algarismo, guardando o número resultante;
- (b) pega o resultado de (a), inverte a ordem dos seus algarismos e guarda o número;
- (c) soma os algarismos do número gerado em (b) e anexa a soma ao lado direito do número;
- (d) mostra o resultado final.

**Exemplos:**

- $9987 \rightarrow 987 \rightarrow 789 \rightarrow 78924$ .
- $1023 \rightarrow 23 \rightarrow 32 \rightarrow 325$ .

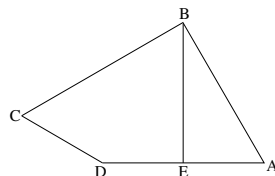
**ALERTA!** No sistema posicional de representação de números, não se permite o algarismo ‘0’ no lado esquerdo da representação.

Ache um número de cinco algarismos que não é alterado por esta “máquina”. Há outro?

3. Encontre primos  $p$  e  $q$  tais que  $167p + q = 2004$ .
4. Numa sala há doze caixas, de mesma aparência externa, contendo barras de ouro. Cada barra de ouro pesa 1kg. Sabe-se que nenhuma caixa está vazia. As caixas são repartidas em quatro grupos de três caixas cada e, ao serem pesados, verifica-se que a totalidade de ouro em cada grupo é de 7kg. Em seguida, as caixas são repartidas em três grupos de quatro caixas cada, e, ao serem pesados, verifica-se que há um grupo com 18kg de ouro, um com 4kg e o terceiro com 6kg. Qual é a maior quantidade de barras de ouro que está colocada em uma caixa? Quais são as possíveis distribuições das barras nas caixas?
5. O Sr. Silva saiu de Eldorado e chegou em Shangrilá em 3 de agosto de 1845 no navio *Estrela do Leste*, o único que serve Shangrilá e que por lá passa a cada vinte e sete dias. O Sr. Silva trabalhou em Shangrilá até 17 de julho de 1849, inclusive, tirou férias e viajou de diligência na manhã do dia seguinte para a Terra do Sonho. A viagem entre essas duas cidades dura setenta e duas horas. Sabemos que o navio sempre chega em Shangrilá de manhã cedo e parte no final da tarde do mesmo dia, e que há duas diligências diárias da Terra do Sonho para Shangrilá, uma partindo às oito e outra às vinte horas. Após permanecer dez dias na Terra do Sonho, em que dia o Sr. Silva deve partir de volta para Shangrilá para pegar o primeiro navio disponível para voltar a Eldorado, considerando que ele quer permanecer o maior tempo possível na Terra do Sonho?

## Nível 3

1. Considere o quadrilátero  $ABCD$  da figura em que  $\overline{AB}=2$ ,  $\overline{AE}=\overline{DE}=1$ ,  $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ ,  $\angle EBC = 60^\circ$  e  $\angle DCB = 60^\circ$ . Qual é a área do  $\square ABCD$ ?



2. A sociedade kardaliana usava um sistema posicional com apenas quatro algarismos distintos para representar os números naturais:  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\uparrow$  e  $\downarrow$ . Eles desenvolveram as operações de adição e multiplicação e descobriram que as operações que envolvem somente adição ou multiplicação podiam ser reordenadas ou agrupadas de qualquer modo sem alterar o resultado (propriedades associativa e comutativa) e que a multiplicação distribua sobre a adição ( $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ ). Os valores básicos das operações são dados abaixo:

+	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\rightarrow\leftarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\rightarrow$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\rightarrow$	$\rightarrow\uparrow$

$\times$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\uparrow$
$\downarrow$	$\leftarrow$	$\downarrow$	$\rightarrow\uparrow$	$\uparrow\rightarrow$

- (a) Qual é a representação no sistema kardaliano para o nosso '0' e para o nosso '1'?
- (b) Qual é o primeiro número que é representado com dois dígitos? E com três dígitos?
- (c) Qual é a relação entre os dois números do item (b)?
- (d) Represente o valor das seguintes expressões no sistema kardaliano:
- $\rightarrow\downarrow\leftarrow + \uparrow\rightarrow\uparrow + \downarrow\leftarrow\uparrow$ ;
  - $\rightarrow\downarrow \times \uparrow\leftarrow \times \downarrow\rightarrow\uparrow$ .
3. Considere a “máquina de transformar números”, que funciona conforme as seguintes regras:

- (a) recebe um número e remove seu primeiro algarismo, guardando o número resultante;
- (b) pega o resultado de (a), inverte a ordem dos seus algarismos e guarda o número;
- (c) soma os algarismos do número gerado em (b) e anexa a soma ao lado direito do número;
- (d) mostra o resultado final.

**Exemplos:**   •  $9987 \rightarrow 987 \rightarrow 789 \rightarrow 78924$ .  
              •  $1023 \rightarrow 23 \rightarrow 32 \rightarrow 325$ .

**ALERTA!** No sistema posicional de representação de números, não se permite o algarismo ‘0’ no lado esquerdo da representação.

Quais são os números de seis algarismos que não são alterados pela “máquina”?

4. Considere a função  $f(x) = \frac{16}{x-1} + \frac{32}{x-2}$  definida nos pontos do intervalo  $[0, 3]$ , exceto nos pontos 1 e 2. Suponha que  $L$  é uma lista de números, em ordem crescente, que começa em zero, termina em 3 e tal que os pares de números consecutivos de  $L$  dividem o intervalo em quinhentos sub-intervalos de comprimentos iguais. Qual ponto  $x$  de  $L$  faz com que  $f(x)$  seja o maior valor possível?
5. Encontre primos  $p$  e  $q$  tais que  $25p + q = 2004$ , com  $400 \leq q \leq 600$ .

**Você Sabia?** Um número é dito regular se sua decomposição em fatores primos apresenta apenas potências de 2, 3 e 5. Exemplo: 60 é um número regular, pois  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ .



## Soluções

### Nível 1

1. (a) Lalá fica em Lobélia 3 dias por semana, nas quatro semanas (4 fins de semana) do mês. Portanto Lalá fica 12 dias por mês em Lobélia. Assim  $\frac{12}{30}$  das despesas do mês devem ser repartidas entre as três amigas, e o resto entre Lelé e Lili:

$$\frac{12}{30} \times 840 = 336 \quad \text{e} \quad 336 \div 3 = 112.$$

Agora,  $840 - 336 = 504$  e  $504 \div 2 = 252$ .

Ainda:  $252 + 112 = 364$ . Portanto Lalá pagará R\$112,00 e Lelé e Lili R\$ 364,00 cada uma.

- (b)  $1100 + 112 = 1212$ . Assim sobram pra Lalá  $2004 - 1212 = 792$  reais por mês.
2. Seja  $abcd$  um número em que  $a, b, c, d$ , são algarismos com  $a \neq 0$  (número de 4 algarismos). Então a máquina faz o seguinte:

$$abcd \longrightarrow bcd \longrightarrow dc b \longrightarrow dc b x,$$

em que  $x$  deve ser a soma dos algarismos  $d, c$  e  $b$ . Por outro lado, como queremos que  $abcd$  não seja alterado por esta máquina, teremos duas possibilidades:

- (i)  $d \neq 0$ . Neste caso,  $x$  deve ser igual a  $d$ , ou seja, a soma de  $d, b$ , e  $c$  deve ser igual a  $d$ . Mas isto implica que a soma de  $b$  com  $c$  seja igual a zero, o que é impossível.
- (ii)  $d = 0$  e teremos:

$$abc0 \longrightarrow bc0 \longrightarrow cb \longrightarrow cbx,$$

em que  $x = b + c$  e esta soma deve ser um número de dois algarismos terminado em zero. A única possibilidade é  $x = 10$ . Portanto temos:

$$abc0 \longrightarrow bc0 \longrightarrow cb \longrightarrow cb10.$$

Daí concluímos:  $c = 1$ ,  $a = c = 1$ . Como  $b + c = 10$ , temos  $b = 9$ . Portanto o número (o único) que não se altera pela máquina é: 1910.

3. Pela repartição em quatro grupos de três caixas, cada um pesando 7 kg, sabemos que o total de ouro nas caixas é 28 kg ( $4 \times 7$ ). Como não há caixas vazias, e como na repartição em grupos de quatro caixas há um grupo pesando 4 kg e outro pesando 5 kg, teremos para estes grupos:

$$4 \text{ kg} + 5 \text{ kg} + 19 \text{ kg} = 28$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \square$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \square$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \square$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \square$$

Portanto, pelo menos 7 caixas possuem exatamente 1 kg de ouro cada. Olhando a distribuição em quatro grupos de três caixas cada teremos:

$$7 \text{ kg} \quad 7 \text{ kg} \quad 7 \text{ kg} \quad 7 \text{ kg}$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1}$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{4}$$

Observe que esta é a única distribuição possível das barras de 1 kg nas caixas dos grupos e que a caixa com 2 kg deve pertencer ao quarto grupo.

Portanto 3 caixas devem conter 5 kg de ouro e a última caixa do quarto grupo deve conter 4 kg de ouro. Estas últimas caixas compõem o terceiro grupo de 4 caixas:

$$5 + 5 + 5 + 4 = 19.$$

Portanto a maior quantidade de ouro em uma caixa é 5Kg e há uma única distribuição possível.

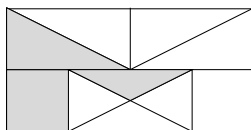
4. O Sr. Silva trabalhou exatamente 365 dias. Tirou 20 dias de férias, ou seja, de 3 de agosto de 1846 a 22 de agosto de 1846 (inclusive). Portanto, desde sua chegada a Shangrilá até o dia 22 de agosto de 1846 passaram-se 385 (365+20) dias. Mas

$$385 = 27 \times 14 + 7.$$

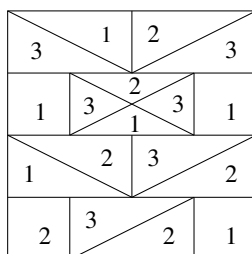
Portanto o último navio passou em Shangrilá no dia 16 de agosto de 1846 (de 16 a 22 de Agosto, inclusive são 7 dias). O próximo navio passará daqui a 27 dias. Contando, temos 15 dias em agosto (sem contar o dia 16 até 31 de agosto). Mais 12 dias em setembro e teremos 27 dias.

Portanto o Sr. Silva poderá voltar para sua cidade natal no dia 12 de setembro de 1846 (se quiser voltar na primeira data possível).

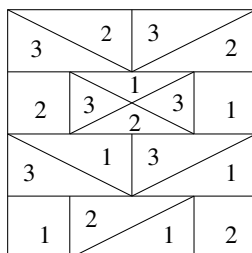
5. Com uma cor é obviamente impossível. Com duas cores também é impossível pois há regiões contíguas com um mesmo lado contíguo a duas outras regiões:



Vejamos então com 3 cores. Uma possibilidade é (cores 1, 2 e 3):



Mas essa possibilidade não permite juntar os ladrilhos lado a lado nem um sobre o outro (mesmo rotacionando-os). Uma solução é:



Nessa solução os ladrilhos devem ser colocados na posição indicada sempre. Há outras soluções.

## Nível 2

1.
  - Pelas tabelas vemos que  $\leftarrow$  corresponde ao nosso “0”, pois somado com qualquer um dos outros algarismos não os altera, e que  $\rightarrow$  corresponde ao nosso “1”, pois multiplicado com qualquer um dos outros algarismos não os altera.
  - O primeiro número representado por 2 dígitos é  $\rightarrow\leftarrow$  (observe que na tabela da adição este é o primeiro número que surge nas linhas 2, 3 e 4). O primeiro número com 3 dígitos deve ser então  $\rightarrow\leftarrow\leftarrow$  (corresponderia ao “100” em um sistema posicional de 4 algarismo).
  - Observe que usando a distributividade temos:  
 $\uparrow x(\rightarrow\leftarrow) = (\rightarrow + \rightarrow)x(\rightarrow\leftarrow) = \rightarrow x \rightarrow\leftarrow + \rightarrow x \rightarrow\leftarrow = \rightarrow\leftarrow + \rightarrow\leftarrow$ , pois  $\rightarrow$  não altera o número na multiplicação.  
 Prolongando-se a tabela de adição é fácil ver que

$$\rightarrow\leftarrow + \rightarrow\leftarrow = \uparrow\leftarrow \text{ ou seja, } \uparrow x(\rightarrow\leftarrow).$$

Daí conclui-se que

$$\downarrow x(\rightarrow\leftarrow) = \downarrow\leftarrow$$

e que

$$\rightarrow\leftarrow x \rightarrow\leftarrow = \rightarrow\leftarrow\leftarrow, \text{ ou seja, } \rightarrow\leftarrow\leftarrow \text{ é o quadrado de } \rightarrow\leftarrow$$

Esse raciocínio (com as propriedades distributiva e associativa) permite ver que as operações nesse sistema podem ser feitas como no nosso sistema decimal ( como por exemplo:  $3 \cdot 8 = 24$ , escrevemos o 4 “vão” 2).

É isso que usaremos, na prática, para o próximo item.

- $\rightarrow\downarrow x \uparrow\leftarrow = \downarrow\uparrow\leftarrow$ , pois:

$$\begin{array}{rcc}
 & \rightarrow & \downarrow \\
 x & \uparrow & \leftarrow \\
 \hline
 & \leftarrow & \leftarrow \\
 (\uparrow + \rightarrow) & \uparrow & \\
 \hline
 \downarrow & \uparrow & \leftarrow
 \end{array}$$

e  $\downarrow\uparrow\leftarrow + \downarrow\rightarrow\uparrow=\rightarrow\downarrow\uparrow$ , pois:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \uparrow & & \leftarrow \\ & & \downarrow & & \rightarrow & & \uparrow \\ \hline \rightarrow & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & + \end{array}$$

2. Seja  $abcde$  um número de 5 algarismos ( $a \neq 0$ ). Então a máquina faz:

$$abcde \rightarrow bcde \rightarrow edcb \rightarrow edcbx, \text{ onde}$$

$$x = e + d + c + b$$

Temos então duas possibilidades:

- $e \neq 0$ . Neste caso, como  $x = 2$  (para o número não se alterar), então  $e = e + d + c + b$ , ou seja,  $d + c + b = 0$ , que é impossível (isto se  $b \neq 0$ ).
- $e = 0$ . Neste caso temos:  $abcd0 \rightarrow bcd0 \rightarrow dcb \rightarrow dc bx$ , onde  $x$  deve ser um número de 2 algarismos terminado em zero. Tem-se que  $x = d + c + b$ . (Note que aqui  $b \neq 0$  pois, caso contrário, teríamos  $x = d + c$  e  $x$  com 3 algarismos). Há então duas possibilidades:

(a)  $x = 10 = d + c + b$ . Mas então  $d = 1$ ,  $a = d = 1$ ,  $b = c$ .

Segue-se que  $b + c = 9$ , o que é impossível, pois  $b = c$ .

(b)  $x = 20 = d + c + b$ . Então  $d = 2$ ,  $a = d = 2$ ,  $b = c$ . Segue-se que  $b + c = 18$  e daí  $b = c = 9$  (única resposta).

Portanto o único número que não é alterado pela máquina é 29920.

3. Note que  $2004 = 167 \cdot 2^2 \cdot 3$ . (167 é primo)

Assim:

$$167p + q = 167 \cdot 12, \text{ ou } q = 167(12 - p)$$

Como  $q$  deve ser primo, então  $12 - p = 1$ , ou seja,  $p = 11$ .

Logo  $p = 11$  e  $q = 167$ .

4. Analisando-se os 3 grupos de 4 caixas, e sabendo que nenhuma caixa está vazia, temos:

4 kg	6 kg	18 kg
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div>	<div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div>	<div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div>	<div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div>	<div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div>
única possibilidade	duas possibilidades	?

As duas possibilidades são:

- $1 + 1 + 1 + 3 = 6$
- $1 + 1 + 2 + 2 = 6$

No primeiro caso há pelo menos 7 caixas com exatamente uma barra. Olhando para os 4 grupos de 3 caixas teremos a única possibilidade:

7 kg	7 kg	7 kg	7 kg	
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	← (a caixa de 3 kg deve estar aqui) → 18 kg
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">3</div>	
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">5</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">5</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">5</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">3</div>	

No segundo caso temos pelo menos 6 caixas com exatamente uma barra. Então temos duas possíveis soluções, olhando nos grupos de 3 caixas:

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">2</div>	← (as caixas com 2 kg devem estar aqui)
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">2</div>	
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">5</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">5</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">5</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">3</div>	

ou

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	← (as caixas com 2 kg devem estar aqui)
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">2</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">2</div>	
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">5</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">5</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">4</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">4</div>	

Portanto a maior quantidade de ouro em uma caixa é 5 kg, e há 3 possíveis distribuições.

5. De 3 de agosto de 1845 a 2 de agosto de 1849 (inclusive), temos 4 anos completos (sendo 1 bissexto: 1848). Assim temos:

$$4 \cdot 365 + 1 = 1461 \text{ dias, neste período}$$

O Sr. Silva não trabalhou todos estes dias mas ele viajou por 3 dias, da manhã de 18 de julho de 1849 a manhã 21 de julho de 1849, quando chegou à Terra do Sonho. Ele permanece (pelo menos) 10 dias lá: da manhã de 21 de julho até a noite de 30 de julho (ou até a manhã de 31 de julho). Se ele voltasse para Shangrilá no dia 30 de julho (de manhã ou a noite), ele chegaria lá no dia 2 de agosto (de manhã ou a noite). Assim, depois que chega a Shangrilá saindo de Eldorado (no dia 3 de Agosto de 1845) até o dia 2 de agosto de 1849 (possível volta da Terra do Sonho) passaram-se 1461 dias. Mas

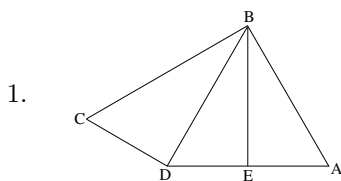
$$1461 = 27 \cdot 54 + 3$$

Assim, o navio já haverá passado 3 dias antes, ou seja, no dia 30 de julho. O próximo navio passará 27 dias depois, ou seja, no dia 26 de agosto. Assim, Sr. Silva deve partir de Shangrilá no dia 23 de agosto (pela manhã), para chegar no dia 26 de agosto, pela manhã, e tomar o navio neste mesmo dia no final da tarde.

**Você Sabia?** Os números transcendentais são os números que não são algébricos. Não existe nenhum polinômio de coeficientes inteiros de que sejam raiz. O número  $\pi$ , por exemplo, é um número transcendente porque não se pode obtê-lo como raiz de nenhum polinômio de coeficientes inteiros. Os números transcendentais são infinitos e há muito mais números transcendentais do que números algébricos (que são aqueles que se podem obter como raiz de um polinômio de coeficientes inteiros). Raiz de 3 é um número algébrico, já que é solução da equação  $x^2 - 3 = 0$ .



## Nível 3



Tracemos  $\overline{BD}$ . Como  $\overline{BE}$  é altura e mediana do  $\triangle ABD$ , então  $AB = BD$ . Mas  $AB = 2 = AD$ . Logo, o  $\triangle ABD$  é equilátero. Assim,  $\angle E\hat{B}D = 30^\circ$ . Segue que  $\angle D\hat{B}C = 30^\circ$  (pois  $\angle E\hat{B}C = 60^\circ$ ) e, como  $\angle D\hat{C}B = 60^\circ$ , o  $\triangle BCD$  é retângulo em D e, portanto, semelhante ao  $\triangle ABE$ . Mas  $\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 4 - 1 = 3$ . Logo,  $\overline{BE} = \sqrt{3}$ .

Assim, da semelhança, temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\overline{CD}}{1} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Assim:

$$A_{\triangle ABD} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

e

$$A_{\triangle BCD} = \frac{2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Portanto, } A_{\square ABCD} = \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

2. (i) Pelas tabelas, vemos que  $\leftarrow$  corresponde ao nosso '0', pois ele somado a qualquer um dos outros algarismos não os altera, e que  $\rightarrow$  corresponde ao nosso '1', pois multiplicado por qualquer um dos outros algarismos ele não os altera.
- (ii) O primeiro número representado por dois dígitos é  $\rightarrow\leftarrow$  (observe que, na tabela da adição, este é o primeiro número que surge nas linhas 2, 3 e 4). O primeiro número com 3 dígitos deve ser, então,

$\rightarrow\leftarrow\leftarrow$  (corresponderia a ‘100’ em um sistema posicional de 4 algarismos).

(iii) Observe que usando a distributividade temos:

$$\uparrow \times (\rightarrow\leftarrow) = (\rightarrow + \rightarrow) \times (\rightarrow\leftarrow) = \rightarrow \times \rightarrow\leftarrow + \rightarrow \times \rightarrow\leftarrow = \rightarrow\leftarrow + \rightarrow\leftarrow, \text{ pois } \rightarrow \text{ não altera o número na multiplicação.}$$

Prolongando-se a tabela da adição, é fácil ver que

$$\rightarrow\leftarrow + \rightarrow\leftarrow = \uparrow\leftarrow, \text{ ou seja, } \uparrow \times (\rightarrow\leftarrow) = \uparrow\leftarrow.$$

Daí, conclui-se que  $\downarrow \times (\rightarrow\leftarrow) = \downarrow\leftarrow$  e que  $(\rightarrow\leftarrow) \times (\rightarrow\leftarrow) = \rightarrow\leftarrow\leftarrow$ , ou seja,  $\rightarrow\leftarrow\leftarrow$  é o quadrado de  $\rightarrow\leftarrow$ . Esse raciocínio (com as propriedades distributiva e associativa) permite ver que as operações nesse sistema podem ser feitas como no nosso sistema decimal (como, por exemplo,  $3 \times 8 = 24$ : escrevemos o 4 e “vão” 2). É isso que usaremos no próximo item.

(iv)  $(\rightarrow\downarrow\leftarrow) + (\uparrow\rightarrow\uparrow) + (\downarrow\leftarrow\uparrow) = \boxed{\rightarrow\downarrow\rightarrow\leftarrow}$ , pois:

$$\begin{array}{ccccccc} & (\rightarrow) & & (\rightarrow) & & & \\ & \rightarrow & & \downarrow & & \leftarrow & \\ & \uparrow & & \rightarrow & & \uparrow & + \\ \hline & \downarrow & & \leftarrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \downarrow & & \rightarrow & & \leftarrow & \end{array}$$

(v)  $(\rightarrow\downarrow \times \uparrow\leftarrow) \times \downarrow\rightarrow\uparrow = (\downarrow\uparrow\leftarrow) \times \downarrow\rightarrow\uparrow$ , pois:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \rightarrow & & \downarrow & \\ & & & \uparrow & & \leftarrow & \\ & & \times & \uparrow & & \leftarrow & \\ \hline & & & \leftarrow & & \leftarrow & \\ (\uparrow & + & \rightarrow) & \uparrow & & & \\ \hline & \downarrow & & \uparrow & & \rightarrow & \\ \downarrow & & & & & & \end{array}$$

Então,  $\downarrow\uparrow\leftarrow \times \downarrow\rightarrow\uparrow = \boxed{\uparrow\downarrow\downarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow}$ .

3. Seja  $abcdef$  um número de seis algarismos (com  $a \neq 0$ ). Vejamos:  $abcdef \rightarrow bcdef \rightarrow fedcb \rightarrow fedcbx$ .

(a)  $f \neq 0$ . Então:

- (i) ou  $b \neq 0$ , mas, neste caso,  $x = f$  e  $x = f + e + d + c + b$ . Impossível.
- (ii) ou  $b = 0$ . Temos, então:
- $c \neq 0$ . Neste caso,  $a0cdef \rightarrow cdef \rightarrow fedc \rightarrow fedcx$ , em que  $x$  tem dois algarismos,  $x = f + e + d + c = 10e + f$ . Daí,  $d + c = 9e$ . Mas então,  $a = f$ ,  $b = e = 0$  e  $d + c = 0$ , o que faria  $c = 0$ . Contradição.
  - $c = 0$ . Neste caso,  $a00def \rightarrow def \rightarrow fed \rightarrow fedx$ , em que  $x = f + e + d$  e tem três algarismos. Impossível.

Então, só resta o caso:

(b)  $f = 0$ .

Se  $b = 0$ , teremos:  $a0cde0 \rightarrow cde0 \rightarrow edc \rightarrow edcx$ , em que  $x = e + d + c$  e tem três algarismos. Impossível. Então, se  $f = 0$ , devemos ter  $b \neq 0$ . Daí:  $abcde0 \rightarrow bcde0 \rightarrow edcb \rightarrow edcbx$ , em que  $x$  deve ter dois algarismos e  $x = e + d + c + b = 10e$ . Então  $d + c + b = 9e$ . Além disso,  $a = e$  e  $b = d$ . A soma máxima de três algarismos é 27. Assim, temos:

- (i)  $e = 0$ ; neste caso,  $d + c + b = 0 \Rightarrow d = c = b = 0$ . Impossível.
- (ii)  $e = 1$ ; neste caso,  $a = e = 1$  e  $d + b + c = 9$ .

$$\therefore \begin{cases} c = 1 & \Rightarrow & d = b = 4 & \Rightarrow & 141410 \\ c = 3 & \Rightarrow & d = b = 3 & \Rightarrow & 133310 \\ c = 5 & \Rightarrow & d = b = 2 & \Rightarrow & 125210 \\ c = 7 & \Rightarrow & d = b = 1 & \Rightarrow & 117110 \\ c = 9 & \Rightarrow & d = b = 0 & \Rightarrow & \text{Impossível} \end{cases}$$

(iii)  $e = 2$ ; neste caso,  $a = e = 2$  e  $d + c + b = 18$ .

$$\therefore \begin{cases} c = 0 & \Rightarrow & d = b = 9 & \Rightarrow & 290920 \\ c = 2 & \Rightarrow & d = b = 8 & \Rightarrow & 282820 \\ c = 4 & \Rightarrow & d = b = 7 & \Rightarrow & 274720 \\ c = 6 & \Rightarrow & d = b = 6 & \Rightarrow & 266620 \\ c = 8 & \Rightarrow & d = b = 5 & \Rightarrow & 258520 \end{cases}$$

(iv)  $e = 3$ ; neste caso,  $a=e=3$  e  $d + c + b = 27 \Rightarrow b = c = d = 9 \Rightarrow 399930$ .

4. Para valores de  $x$  próximos de 1 a primeira fração, em valor absoluto, é “muito grande”. O mesmo vale para valores de  $x$  próximos a 2. Vamos analisar os valores  $f(x)$  para os quatro pontos da lista  $L$  mais próximos de 1 e de 2. Os pontos de  $L$  são: 0,  $\frac{3}{500}$ ,  $\frac{6}{500}$ , etc. Devemos, então, tomar o maior valor da lista menor do que 1, o menor valor maior do que 1, o maior valor menor do que 2 e o menor valor maior do que 2. São eles:  $x_1 = \frac{498}{500}$ ,  $x_2 = \frac{501}{500}$ ,  $x_3 = \frac{999}{500}$ ,  $x_4 = \frac{1002}{500}$  respectivamente.

O valor  $x_1$  está descartado, pois  $f(x_1) < 0$ . Descartamos também  $x_3$ , pois:  $|x_3 - 2| < |x_3 - 1|$ , o que nos dá

$$\frac{1}{|x_3 - 1|} < \frac{1}{|x_3 - 2|} \text{ ou } \frac{16}{|x_3 - 1|} < \frac{16}{|x_3 - 2|} < \frac{32}{|x_3 - 2|}.$$

Como  $\frac{32}{x_3 - 2} < 0$ , tem-se  $f(x_3) < 0$ .

Vamos analisar  $f(x_2)$  e  $f(x_4)$ :

$$f(x_2) = \frac{16}{\frac{501}{500} - 1} + \frac{32}{\frac{501}{500} - 2} = 16 \times 500 - \frac{32 \times 500}{499} = 16 \times 500 \times \frac{497}{499}.$$

$$f(x_4) = \frac{16}{\frac{1002}{500} - 1} + \frac{32}{\frac{1002}{500} - 2} = \frac{16 \times 500}{502} + \frac{32 \times 500}{2} = 16 \times 500 \times \frac{503}{502}.$$

Mas  $\frac{497}{499} < 1 < \frac{503}{502}$ . Logo,  $f(x_4)$  é o maior valor.

5. De  $400 \leq q \leq 600$ , temos  $-600 \leq -q \leq -400$ .

Portanto  $2004 - 600 \leq 2004 - q \leq 2004 - 400 \Rightarrow 1404 \leq 25p \leq 1604 \Rightarrow \Rightarrow 56,16 \leq p \leq 64,16$ .

Os primos nessa faixa são 59 e 61. Se  $p = 59$ ,  $q = 2004 - 25 \times 61 = 529$ . Porém,  $529 = 23^2$ . Se  $p = 61$ ,  $q = 2004 - 25 \times 61 = 479$ . Este número é primo (basta testar a sua divisibilidade por primos até o 19). Portanto,  $p = 61$  e  $q = 479$ .

## Premiados

(em ordem alfabética por nível e por tipo de medalha)

### Nível 1

#### Ouro

- Carolina de Paula Peters (Colégio Salesiano de Itajaí)
- Igor Hinnig Wolniewics (Centro Educacional Menino Jesus)
- Marina Freitas Klein (Sociedade Divina Providência Colégio Sagrada Família)
- Natan Cardozo Leal (E.E.B. Orestes Guimarães)
- Vitor Costa Fabris (Associação Beneditina da Providência - Colégio São Bento)

#### Prata

- André Mateus Netto Spillere (Associação Beneditina da Providência - Colégio São Bento)
- Ingrid Knochenhauer (Educandário Imaculada Conceição)
- Julia Pinheiro Machado (Sítio Escola Sarapiquá)
- Larissa Miranda Hinisch (Colégio Coração de Jesus)
- Natsue Eccel Mizubuti (Colégio Santo Antônio )
- Renan Henrique Finder (Colégio dos Santos Anjos)

#### Bronze

- Aline Péterle (E.E.B. Municipal Aurora Péterle)
- Camille Fiamoncini Mattos (Educandário Imaculada Conceição)
- Eduardo Machado Capaverde (Colégio Coração de Jesus)

- Guido Quint Tonelli Santos (Educandário Imaculada Conceição)
- Jenifer Wegert (IMA - Instituto Maria Auxiliadora)

### **Menção Honrosa**

- Alexandre Schmidt Ferreira (Colégio Murialdo)
- Ana Carolina Paterno (Escola Municipal Governador Pedro Ivo Campos)
- Ana Luiza de Amorim (Sociedade Divina Providência Colégio Sagrada Família)
- Ana Paula de Assis Schimidt (Centro Educacional Menino Jesus)
- Beatriz Luzia Wetzel (E. E. F. Professor Emir Ropelato)
- Bernardo de Sousa Valverde (Educandário Imaculada Conceição)
- Betina Leitão Mehl (Colégio Nova Era)
- Brenda Schmitt de Araujo de Mattos (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Bruno de Almeida L. C. Silva (Colégio Catarinense)
- Bruno de Brida (Alpha Objetivo)
- Carlos Eduardo Rosar Kós Lassance (Colégio Catarinense)
- Carolina Brandt (Colégio Superação)
- Carolina de Borba Albino (IMA - Instituto Maria Auxiliadora)
- Denise Albertazzi Gonçalves (Centro Educacional Menino Jesus)
- Douglas Paute (Escola Municipal Governador Pedro Ivo Campos)
- Eduardo Biscoli Brandão (Colégio Superação)
- Eduardo Luis Festa (Áster Centro Educacional)
- Eduardo Santos da Silveira (Associação Beneditina da Providência - Colégio São Bento)

- Elton Kasmirski (Colégio Nova Era)
- Eun Sol Cho (Colégio Nossa Senhora de Fatima)
- Felix Li Han Huang (Áster Centro Educacional)
- Gabriel Fischer de Moraes (Colégio Santo Antônio )
- Gabriel Thom (Colégio Sinodal Ruy Barbosa)
- Gabriela Ribeiro Sumar (Colégio Coração de Jesus)
- Gilson Vilain Machado (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Gustavo David Ludwig (Colégio Coração de Jesus)
- Gustavo Della Bruna N. (Colégio Nossa Senhora de Fatima)
- Hermano Roepke (E. E. F. Professor Emir Ropelato)
- Igor Piacentini Coelho da Costa (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Isabella Sandrini Pizzolatti (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)
- Iveraldo Carlos Machado Junior (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- Jaqueline Witt Garzillo (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Jenifer Milbratz (E. E. F. Professor Emir Ropelato)
- Joana dos Santos Copetti (Colégio Murialdo)
- João Marcos N. Coelho (Colégio Murialdo)
- Juliane Bonetti (Colégio Elisa Andreoli)
- Larissa Borges Marthendal (Colégio Coração de Jesus)
- Leonardo Flores Zambaldi (Colégio Tradição)
- Leticia Perini (E. E. F. Professor Emir Ropelato)
- Luis Gustavo Longen (Colégio Sinodal Ruy Barbosa)

- Matheus de Bona dos Santos (Centro Educacional Roda Pião Ltda )
- Paula Azevedo do Nascimento (Colégio da Lagoa)
- Pedro Luis Rissoli (Colégio dos Santos Anjos)
- Rafael Rogério Santos (Centro Educacional Roda Pião Ltda )
- Renato Klueger Junior (Colégio Nossa Senhora de Fatima)
- Rodrigo Gamba (Colégio Superação)
- Samia Pauli Fiates (Colégio Coração de Jesus)
- Sérgio Feldemann de Quadros (Colégio Salesiano de Itajaí)
- Tainara Helena de Amorim (Sociedade Divina Providência Colégio Sagrada Família)
- Thaminne Silveira (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Unírio Machado dos Santos Júnior (Colégio Elisa Andreoli)
- Vanessa Martins Rosa (Colégio Coração de Jesus)
- Victor Abouhatem (Colégio da Lagoa)
- Vinicius da Costa Mohr (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Vinícius Rios Fuck (Colégio Elisa Andreoli)
- Yuri da Silva Villas Boas (Colégio Catarinense)

## Nível 2

### Ouro

- Danilo Nunes do Carmo (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Jessica Cardoso dos Santos (Alpha Objetivo)
- Leonardo Pinheiro Samarão (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Petrius Paulo Tambosi (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)



- Ruan Ricardo Rengel (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)
- Tiago Madeira (Colégio Salesiano de Itajaí)

### **Prata**

- Caio Andrezzo (E.M.E.F. Albano Kanzler)
- Cristine Ribas (Alpha Objetivo)
- Luiz Fernando de Amorim Joll Embeck (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Tatiana Cristine de Amorim (Sociedade Divina Providência Colégio Sagrada Família)
- Vanessa Fischer dos Santos (Colégio Santo Antônio )
- Victor Rodolfo Pereira Lopes (Colégio Catarinense)

### **Bronze**

- Ana Paula Peixoto Bittencourt (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Douglas Maiola (Escola Municipal Governador Pedro Ivo Campos)
- Giuliana Sardi Venter (Escola Barão do Rio Branco)
- Lucas Bet da Rosa Orssatto (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Paula do Vale Pereira (Educandário Imaculada Conceição)
- Pietro José Bertuzzi (Colégio Elisa Andreoli)
- Vinicius da Silveira Segali (Colégio de Aplicação da UFSC)

### **Menção Honrosa**

- Adriano Reinaldo Timm (Escola Municipal Padre Martinho Stein)
- Allan Kipper Marquetti (Colégio Coração de Jesus)
- Amanda Pereira Medeiros (Colégio Murialdo)
- Ana Luiza Pagani Fonseca (Centro Educacional Menino Jesus)

- Antonio Cezar Quevedo Goulart Filho (Colégio Catarinense)
- Bruna Iha (Colégio da Lagoa)
- Bruno Santos Vieira (Colégio Dehon)
- Camila Costa Hermani (Colégio Rogacionista Pio XII)
- Camila Tormena (Colégio Santo Antônio)
- Christian Juliano Pereira (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Cristine Saibert (Centro Educacional Roda Pião Ltda)
- Douglas Machado Vieira (Colégio Catarinense)
- Erica Schmitt Mafra (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Felipe Alves de Souza (Colégio Elisa Andreoli)
- Fernanda Pessoa de Carvalho (Centro Educacional Roda Pião Ltda )
- Gabriel Nunes (Colégio Superação)
- Gabrielle C. Rocha (Escola Barão do Rio Branco)
- Geisla Thamara de Abreu (Colégio :Dom Bosco)
- Guilherme Kawase Falk (Educandário Imaculada Conceição)
- Heloísa Helena Rodrigues (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Jefferson da Silva Decom (Colégio Santo Antônio)
- Jéssica Pauli de Castro Bonson (Educandário Imaculada Conceição)
- Julie Sabine Holetz Brandes (Escola Municipal Erwin Prade)
- Leonardo Bruno Pereira de Moraes (Sítio Escola Sarapiquá)
- Leonardo Sgnaolin (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Libin Yang (Colégio Catarinense)
- Lourival Tenfen Junior (Colégio Cenecista José Elias Moreira)

- Luany Tamires Fiedler (E.M.E.F. Maria Nilda Salai Stähelin)
- Lucas Bopppe Niehues (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- Lucas Werner (Colégio DEHON/UNISUL)
- Maicow Willian Zanon (E. E. F. Professor Emir Ropelato)
- Marcos Aurélio S. Timmermann (Colégio Nova Era)
- Marcos Eduardo de Farias (Centro Educacional Roda Pião Ltda)
- Maria Tereza Amorim Falcão (Colégio Santo Antônio)
- Mayra Trierveiler (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)
- Paulo Henrique Cardozo (Centro Educacional Menino Jesus)
- Philippi Farias Rachadel (Educandário Imaculada Conceição)
- Renan Machado Capaverde (Colégio Coração de Jesus)
- Renata da Silva Heying (Escola Municipal Erwin Prade)
- Ricardo Maurino Melo (Centro Educacional Roda Pião Ltda)
- Ricardo Soares Schwingel (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Theodor Wilhelm Adler (Colégio da Lagoa)
- Vitor Luis Pereira (Colégio dos Santos Anjos)
- Vitos Cesar Kanitz (Escola Municipal Erwin Prade)
- Wagner Daufenbach do Amaral (Associação Beneditina da Providência - Colégio São Bento)
- Yone Ecal Mizubuti (Colégio Santo Antônio)

### Nível 3

#### Ouro

- Alex Carlos Schmidt (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- Bruno Pereira Dias (Colégio Catarinense)
- Felipe Paupitz Schlichting (Colégio Coração de Jesus)
- Guilherme Rohden Echelmeier (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Gustavo Henrique Nihei (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Robert da Silva Bressan (Colégio Dehon)

#### Prata

- Bruno Leonardo Schneider (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Henrique Antonio Calbo Perdoncini (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- Luckas Frigo Furtado (Colégio Visão)
- Rafael Peralta Muniz Moreira (Colégio Catarinense)
- Vinícius Bastos Farias (Colégio Dom Jaime Câmara)

#### Bronze

- Alan Schmitt (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Cindy Dalfovo (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- Fabrício Marques Corrêa (Associação Beneditina da Providência - Colégio São Bento)
- José Artur Silveira Teixeira (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Karine Piacentini Coelho da Costa (Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina)

- Kellen Trilha Schappo (Curso e Colégio Energia)
- Marcelo Adriano de Macedo (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- Paulo Henrique Baumann (Colégio Catarinense)
- Pedro Henrique Boscardin de Araujo (Curso e Colégio Energia)
- Willian Alexandre Suguino (Curso e Colégio Energia)

### **Menção Honrosa**

- Ana Paula Alves Monteiro (Colégio Dom Jaime Câmara)
- André Krummenauer (Colégio Dom Jaime Câmara)
- André Luiz Quintino (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- André Luiz Thieme (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- André Luiz Tomelin (Colégio Catarinense)
- Andrey Jose Taffner Fraga (Colégio Henry Ford Ltda)
- Bruno Bernardo Teixeira (Colégio Carrossel)
- Carla Medina Ribeiro Protta (Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina)
- Carolina Barbi Linhares (Colégio Salesiano de Itajaí)
- Cintya Kazue Sakamoto (Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina)
- Diego Bonkowski de La Sierra Audiffred (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- Diogo Alexandre Parente (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- Elisa Rego Mendes (Alpha Objetivo)
- Felipe Borges Alves (Curso e Colégio Energia)
- Felipe Francisco (Alpha Objetivo)

- Felipe Frigo Furtado (Colégio Visão)
- Gabriele Tschá (E.E.B. Professor Tulio Scheimantel)
- Huilton Estevo Martins (Colégio Elisa Andreoli)
- Israel Pereira (Alpha Objetivo)
- Jaqueline Hoffmann (Colégio Henry Ford Ltda)
- Jerônimo Moraes Gomes (Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina )
- João Frederico Martendal Neto (Colégio Elisa Andreoli)
- José Roberto Cordeiro (Colégio Catarinense)
- Kananda Silvano Silveira (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Laura Luisa Medeiros de Souza (Kumon - Joaçaba)
- Leonardo Silva Alves (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Luiza Magalhães de Oliveira (Colégio Catarinense)
- Luiza Mamigonian Bessa (Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina)
- Nelisa Helena Rocha (Curso e Colégio Energia)
- Olivan Bittencourt de Carvalho (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- Pedro Neves Schondermark (Colégio Elisa Andreoli)
- Priscila Teixeira Quaini (Colégio Catarinense)
- Ramon Rodrigues Rita (Colégio Catarinense)
- Ricardo Müller (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
- Roberta Muriel Longo Roepke (Colégio Henry Ford Ltda)
- Rodrigo de Rodrigues (Alpha Objetivo)

- 
- Roger Savoldi Roman (Colégio Energia - Itajaí)
  - Sérgio Brillinger Novello (Colégio Catarinense)
  - Thiago Rossi Trojan (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)
  - Thomas Eduardt Hafemann (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)
  - Yuri Kaszubowski Lopes (SOCIESC - Soc. Educ. de Santa Catarina)

## **Escolas Participantes**

1. Alpha Objetivo (São José)
2. Associação Beneditina da Providência - Colégio São Bento (Criciúma)
3. Associação Francisquense de Ensino (São Francisco do Sul)
4. Áster Centro Educacional (Balneário Camburiú)
5. CEFETSC-UNED/SJ (São José)
6. Cefrai Centro Educacional Fraiburgo (Fraiburgo)
7. Centro Educacional Bom Jesus (Palhoça)
8. Centro Educacional Extensão Ltda (Sombrio)
9. Centro Educacional Integrado Jaraguense - CEIJ (Jaraguá do Sul)
10. Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis)
11. Centro Educacional Príncipe Ali (São José)
12. Centro Educacional Roda Pião Ltda (Palhoça)
13. Centro Educacional Tmbó S/A CETISA (Timbó)
14. Centro Educaional Integral Mundo da Magia (Tijucas)
15. Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina (Florianópolis)
16. Colégio Atlântico (Itapema)
17. Colégio Atlântico Sul (Balneário Camburiú)
18. Colégio Bom Jesus Santo Antônio (Blumenau)
19. Colégio Carrossel (Palhoça)
20. Colégio Catarinense (Florianópolis)
21. Colégio Cenecista José Elias Moreira (Joinville)
22. Colégio Coração de Jesus (Florianópolis)



23. Colégio Criativo (Florianópolis)
24. Colégio Cruz e Sousa (Florianópolis)
25. Colégio da Lagoa (Florianópolis)
26. Colégio da Univille (Joinville)
27. Colégio de Aplicação da UFSC (Florianópolis)
28. Colégio de Aplicação da UNIVALI (Itajaí)
29. Colégio de Aplicação UNIVALI - Tijucas (Tijucas)
30. Colégio Decisão (Florianópolis)
31. Colégio Dehon (Tubarão)
32. Colégio Dehon/UNISUL (Araranguá)
33. Colégio Dom Bosco (Rio do Sul)
34. Colégio Dom Jaime Câmara (São José)
35. Colégio dos Santos Anjos (Joinville)
36. Colégio Elisa Andreoli (São José)
37. Colégio Energia - Brusque (Brusque)
38. Colégio Energia - Itajaí (Itajaí)
39. Colégio Espaço (Braço do Norte)
40. Colégio Evidência (Balneário Camburiú)
41. Colégio Henry Ford Ltda (Timbó)
42. Colégio Marista (Criciúma)
43. Colégio Marista Frei Rogério (Joaçaba)
44. Colégio Murialdo (Araranguá)
45. Colégio Nossa Senhora de Fátima (Florianópolis)

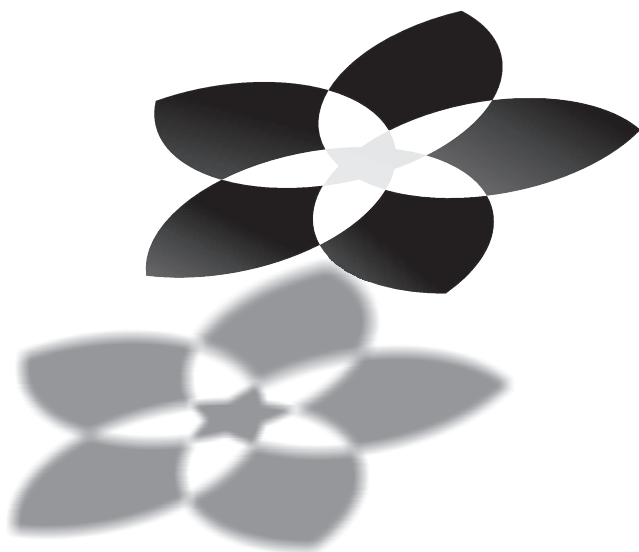
46. Colégio Nova Era (Joinville)
47. Colégio Rogacionista Pio XII (Criciúma)
48. Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí)
49. Colégio Santo Antonio (Joinville)
50. Colégio Sigma (Lages)
51. Colégio Sinodal Ruy Barbosa (Rio do Sul)
52. Colégio Superação (Videira)
53. Colégio Tradição (Florianópolis)
54. Colégio Unificado (Gaspar)
55. Colégio Visão (São José)
56. Conjunto Educacional Dr Blumenau (Pomerode)
57. Curso E Colégio Dom Bosco (São José)
58. Curso e Colégio Energia (Criciúma)
59. Curso e Colégio Energia (Tubarão)
60. Curso e Colégio Energia (Araranguá)
61. Curso e Colegio Energia (Florianópolis)
62. Curso e Colégio Energia - Joinville (Joinville)
63. Curso e Colégio Lavoisier (São José)
64. E.E.B. Humberto Hermes Hoffmann (Nova Veneza)
65. E.E.M. Professor Roberto Grand (São Bento do Sul)
66. E.E.B. Dolores Luzia S. Krauss (Gaspar)
67. E.E.B. Cecília Rosa Lopes (São José)
68. E.E.B. Conselheiro Manoel Philippi (Águas Mornas)

69. E.E.B. Dr. Paulo Medeiros (Joinville)
70. E.E.B. João Gaya (Luiz Alves)
71. E.E.B. Nereu Ramos (Itajaí)
72. E.E.B. Professor Júlio Scheidemantel (Timbó)
73. E.E.B. Prof<sup>o</sup> João Martins Veras (Joinville)
74. E.E.B. Protásio Joaquim da Cunha (Sombrio)
75. E.E.B. Tenente Anselmo José Hess (Luiz Alves)
76. E.E.B. Professor José Rodrigues Lopes (Garopaba)
77. E.E.M. Dr. Ruben Roberto Schmidlin (Joinville)
78. E.M.E.F Rodolpho Dornbusch (Jaraguá do Sul)
79. E.M.E.F. Maria Nilda Salai Stähelin (Jaraguá do Sul)
80. Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis)
81. E.E.B. Coronel Antônio Lehmkuhl (Águas Mornas)
82. E.E.B. General Osvaldo Pinto da Veiga (Capivari de Baixo)
83. E.E.B. Getúlio Vargas (Florianópolis)
84. E.E.B. Osvaldo Aranha (Joinville)
85. E.E.B. Professor Henrique Stodieck (Florianópolis)
86. E.E.B. Ruy Barbosa (Timbó)
87. E.E.B. Professor Heriberto Joseph Müller (Blumenau)
88. E.E.F. Dom Jaime de Barros Câmara (Palhoça)
89. Escola de Educação Básica Raulino Horn (Indaial)
90. Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul (Rio do Sul)
91. Escola Agrotécnica Federal de Sombrio (Santa Rosa do Sul)

92. Escola Barão do Rio Branco (Blumenau)
93. Escola Básica Municipal Beatriz de Souza Brito (Florianópolis)
94. Escola Básica Municipal Paulo Rizzieri (Içara)
95. Escola Basica Municipal Tranquillo Pissetti (Içara)
96. Escola Básica Professor Leopoldo Hanof (Orleans)
97. Escola de Educação Básica de Lages (Lages)
98. Escola de Educação Básica Francisco Eberhardt (Joinville)
99. Escola de Educação Básica Frei Policarpo (Gaspar)
100. Escola de Educação Básica Henrique Estefano Koerich (Palhoça)
101. Escola de Educação Básica Irmã Maria Teresa (Palhoça)
102. Escola de Educação Básica João Frassetto (Criciúma)
103. Escola De Educação Básica Municipal Aurora Péterle (Siderópolis)
104. Escola de Educação Básica João Colin (Joinville)
105. Escola de Educação Básica Orestes Guimarães (São Bento do Sul)
106. Escola de Educação Básica Prefeito Avelino Muller (Biguaçu)
107. Escola de Educação Básica São João (Agrolândia)
108. Escola de Ensino Básico Presidente Juscelino Kubitschek (São José)
109. Escola de Ensino Fundamental Professor Emir Ropelato (Timbó)
110. Escola de Ensino Médio Alberto Bauer (Jaraguá do Sul)
111. Escola Dinâmica (Florianópolis)
112. Escola Municipal de Ensino Fundamental Albano Kanzler (Jaraguá do Sul)
113. Escola Municipal de Ensino Fundamental Max Schubert (Jaraguá do Sul)

- 
114. Escola Municipal E.F. Itinerante Maria Alice Wolf Souza (Lages)
  115. Escola Municipal Erwin Prade (Timbó)
  116. Escola Municipal Governador Ivo Silveira (Balneário Camburiú)
  117. Escola Municipal Governador Pedro Ivo Campos (Joinville)
  118. Escola Municipal Maurício Germer (Timbó)
  119. Escola Municipal Padre Martinho Stein (Timbó)
  120. Escola Municipal Professora Karin Barkemeyer (Joinville)
  121. IMA - Instituto Maria Auxiliadora (Riodo Sul)
  122. KUMON - Curso (Florianópolis)
  123. KUMON - Joaçaba (Joaçaba)
  124. KUMON - Unidade Porto União (Porto União)
  125. Kumon - Unidade São Bento do Sul (São Bento do Sul)
  126. Sistema de Ensino Liderança (Itajaí)
  127. Sítio Escola Sarapiquá (Florianópolis)
  128. Sociedade Divina Providência Colégio Sagrada Família (Blumenau)
  129. Sociedade Educacional de Santa Catarina (Joinville)





**Artigo**

---





## Os Números e o Infinito

Ivan Pontual Costa e Silva

Dep. de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina  
CEP: 88.040-900, Florianópolis-SC

### Um Pouco de História

A idéia básica de *número* é pelo menos tão antiga quanto o *homo sapiens*, e provavelmente já era conhecida por alguns de seus ancestrais hominídeos. É também uma das primeiras idéias matemáticas que temos, ainda crianças. Nos dias de hoje, mesmo em sociedades onde essa concepção não atingiu qualquer grau de sofisticação (como por exemplo em certos grupos indígenas ou em certas tribos africanas) podemos perceber a existência das noções básicas de *um*, *dois*, *muitos*. No entanto, nos defrontamos com dificuldades consideráveis se tentamos definir número mais precisamente. Se nos perguntamos “o que é número?”, freqüentemente sentimos que justamente por ser uma noção tão básica e familiar se torna difícil dar uma resposta adequada.

A noção de *infinito* certamente é mais sutil, mas ainda bastante familiar. Assim como no caso dos números, é difícil caracterizá-la adequadamente em palavras. Em Filosofia, faz-se uma distinção entre *infinito potencial*, que corresponde a um processo que continua sem cessar, e *infinito atual*, que é um infinito “estático”, pleno e acabado. Um exemplo do primeiro tipo de infinito vem se, começando do número 1, passamos a “somar mais um”. Esse processo, à parte das óbvias limitações físicas, em princípio não terminaria jamais, isto é, nunca chegamos a um número que seja o maior. Mas ainda assim, em geral não pensamos no infinito como um número; o infinito nesse exemplo é, portanto, potencial. Essas concepções de infinito devem-se principalmente a Aristóteles (384-322 a.C.), que via vários exemplos de infinito potencial na Natureza, como o ciclo (assim ele julgava) das estações do ano. Aristóteles, contudo, negava que pudesse existir infinito atual. Uma reta em geometria costumava ser vista como outro exemplo de infinito potencial: não importa

o quanto se caminha sobre a reta, pode-se sempre ir além.<sup>1</sup> Usando a idéia aristotélica de infinito potencial, o matemático grego Eudoxo de Cnido(408-355 a.C.) elaborou aquilo que se tornaria a semente do Cálculo Integral séculos depois, o *método da exaustão*.<sup>2</sup> Arquimedes(287-212 a.C.) usou esse método para calcular áreas e/ou volumes de figuras como o círculo e a esfera. Filósofos como Plotino(205-270 a.C.), por outro lado, defendiam a existência metafísica do infinito atual, a ser conhecido através de *insights* místicos.

Se o leitor sente que essas noções são vagas e controversas, não está sozinho. Os matemáticos permaneceram, em sua maioria, longe de tais discussões metafísicas. Ainda assim, com o advento do Cálculo Diferencial e Integral no séc. XVII, eles passaram a trabalhar sistematicamente com conceitos bastante mal-definidos e relacionados ao infinito, como a idéia de *infinitesimais* (quantidades que seriam não-nulas, mas menores do que qualquer número) e somas com uma infinidade de termos. Em uma polêmica que se tornou famosa em sua época, o bispo irlandês G. Berkeley(1685-1753), em sua obra *O Analista*, criticou violentamente (e com bastante pertinência) o uso descuidado dessas noções difusas. Felizmente, os matemáticos continuaram seu trabalho sem se importar com tais críticas, e realizaram tremendos avanços. De fato, é uma característica peculiar da ciência que o rigor excessivo imposto no início de uma investigação sufoca a imaginação e a criatividade. No entanto, de um modo geral julgava-se, em concordância com Aristóteles, que só o infinito potencial teria lugar na Matemática.

No séc. XIX, porém, tendo a Matemática alcançado um enorme desenvolvimento, sentiu-se a necessidade de definições mais precisas e um cuidado maior com o rigor das demonstrações. Fundamental na época foi o movimento de “arimetização da Análise”, promovida por nomes como B. Bolzano(1781-1848), A.-L. Cauchy (1789-1857) e K. Weierstrass(1815-1897), para tornar mais rigorosas as bases do Cálculo Diferencial e Integral, libertando-o do conceito de infinitesimal. Esse objetivo foi alcançado definindo-se adequadamente limite de funções, continuidade, séries infinitas, etc. em termos de propriedades dos números reais. O passo seguinte para estabelecer a Análise Matemática em bases sólidas seria uma melhor compreensão matemática dos números reais.

---

<sup>1</sup>Aliás, os termos ‘potencial’ e ‘atual’ derivam-se das noções técnicas em Filosofia de *ato* e *potência*. Em particular, como já deve estar claro do contexto, ‘atual’ não se refere ao presente momento.

<sup>2</sup>Veja, por exemplo, as Refs. [1] para uma descrição do método da exaustão, e para mais detalhes históricos do que apresentado aqui.

Os pioneiros nessa investigação foram principalmente J. Dedekind(1831-1916) e G. Cantor(1845-1918). Tornou-se possível *construir*, em um sentido técnico preciso que não é possível discutir aqui, os números reais a partir dos números racionais, construir estes a partir dos números inteiros, e estes últimos a partir dos números naturais <sup>3</sup>. Em cada passo, podem ser *definidas*, de um modo preciso, as operações de soma, produto, etc., e *demonstradas*, como teoremas, suas propriedades básicas (o leitor interessado pode consultar, por exemplo, a Ref. [2]). O desenvolvimento lógico final então passou a depender exclusivamente dos números naturais.

Seria possível caracterizar os números naturais de forma matematicamente precisa? A resposta positiva a essa pergunta assumiu sua forma definitiva com os *axiomas de Peano*, criados pelo matemático e lógico italiano G. Peano(1858-1932) <sup>4</sup>, a partir dos quais toda a aritmética dos números naturais pode ser obtida. Peano usou os termos primitivos ‘*número (natural)*’, ‘*zero*’ e ‘*sucessor de*’ e cinco axiomas envolvendo estes termos . Veja a Ref.[2] para uma apresentação e discussão dos axiomas de Peano.

Motivado por seus estudos em Análise Matemática, Cantor criou em sua época uma nova disciplina matemática, a *Teoria dos Conjuntos* <sup>5</sup>, que veio a se tornar a base de grande parte da Matemática moderna, e revolucionou o ensino dessa disciplina. No curso de suas descobertas, Cantor (e, em menor grau, Dedekind) deu a primeira caracterização precisa da noção de *infinito* em Ciência, e mostrou que de fato *existem tipos diferentes de infinito*! Falamos hoje do *conjunto*  $\mathbb{N}$  dos números naturais, e ao pensar na *totalidade* dos números, estamos de fato introduzindo o infinito atual na Matemática. Embora isso

---

<sup>3</sup>O leitor com pouca experiência em Matemática superior pode ficar espantado ao ouvir falar em “construir” números. O que se quer dizer é que se definem certos objetos matemáticos cujas propriedades *mimetizam* as propriedades usuais dos números, tornando-os modelos matemáticos, ou versões abstratas, do conceito intuitivo de número. São úteis por terem a precisão que falta ao conceito intuitivo. Esse tipo de processo de abstração está no coração da Matemática.

<sup>4</sup>Lembramos ao leitor que *axiomas* são proposições não demonstradas, envolvendo apenas certos termos não definidos, os *termos primitivos*, a partir das quais se podem derivar, através das regras da lógica, as *proposições demonstradas* ou *teoremas*. Esse é o chamado *método axiomático*. Toda a Matemática moderna, bem como partes de algumas outras ciências, como a Física, baseiam-se no método axiomático.

<sup>5</sup>Cantor elaborou a Teoria dos Conjuntos de forma relativamente intuitiva, que é a maneira como esta disciplina é ensinada nas escolas. Um conjunto de axiomas para a Teoria dos Conjuntos foi apresentado pelo matemático alemão E. Zermelo(1871-1959) entre 1904-08, posteriormente desenvolvidos por T.Skolem(1887-1963) e A. Fraenkel(1891-1965). Neste artigo, usaremos uma abordagem intuitiva à la Cantor.

pareça tão prosaico para nós hoje, que desde pequenos estudamos Matemática na escola através da noção de conjunto, as descobertas de Cantor foram extremamente revolucionárias para a época, e são reconhecidas como estando entre as maiores conquistas intelectuais da história humana.

O restante do Artigo é como segue:

Na Seção 2, mostraremos que o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais, o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros e o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais são infinitos de um mesmo tipo (infinito *enumerável*), mas o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais pertence a uma classe de infinito maior (infinito *não-enumerável*).

Na Seção 3, discutiremos a caracterização de Cantor de conjuntos infinitos, bem como a hierarquia de infinitos introduzida por ele.

Finalmente, no Apêndice, revisamos as definições básicas de: função, função injetora, sobrejetora e bijetora.

## Um, Dois, Três, Infinito

Para entender o grande *insight* de Cantor, vamos considerar uma pergunta simples: o que significa *contar* ?

Quando crianças, em geral só sabemos contar coisas em número pequeno, usando os dedos das duas mãos, por exemplo. Nesse caso, associamos cada objeto a ser contado com um dedo das mãos, de forma que a cada objeto esteja associado exatamente um dedo, isto é, de modo que não haja dois dedos para um único objeto, ou dois objetos para um único dedo. Conseguimos contar desse modo somente tantos objetos quanto podemos associar assim aos dedos das mãos. Se houver mais objetos do que dedos, não conseguiremos, somente usando as mãos, contar esses objetos, mas contaremos assim um subconjunto *próprio* (isto é um subconjunto que não é o conjunto todo) do conjunto desses objetos. Suponha (com o número regular de dedos) que tenhamos um conjunto  $O$  com exatamente 10 objetos, digamos 10 maçãs. Nesse caso, estabeleceremos o que em Matemática se chama uma *bijeção*, ou *correspondência biunívoca* entre o conjunto dos dedos e o conjunto  $O$  de maçãs (veja o Apêndice para uma definição mais precisa): cada dedo corresponde a exatamente uma maçã, não sobram dedos nem maçãs sem seus associados.

Suponha porém que  $O$  tenha 15 elementos. Então não poderemos, só usando os dedos das mãos, estabelecer uma bijeção. Conseguiremos no máximo estabelecer uma bijeção entre o conjunto dos dedos e um subconjunto próprio

$O' \subset O$  com 10 elementos, isto é, 10 maçãs. Se chamamos de  $D$  o conjunto dos 10 dedos das mãos, podemos então estabelecer uma regra que para cada elemento de  $D$  (isto é, cada dedo) associa um único elemento de  $O'$ . Podemos pensar nessa associação matematicamente como uma função  $f : D \rightarrow O'$  que é *injetora*, mas não *sobrejetora* (ver Apêndice).<sup>6</sup>

Podemos, à custa de um ligeiro aumento na abstração, tornar essa descrição mais geral. Seja  $X$  um conjunto qualquer. Se  $X$  é o *conjunto vazio*, isto é, sem elementos, podemos dizer que  $X$  *tem 0 (zero) elementos*, ou que *o número de elementos de  $X$  é zero*. Vamos imaginar agora que  $X$  é o conjunto de estrelas da Via-Láctea. Esse conjunto, embora enorme, é finito. Vamos imaginar, com um esforço adicional de imaginação, que desejemos contá-lo. Nesse caso, começamos escolhendo uma das estrelas, e associando a essa estrela o número 1. A seguir tomamos outra estrela e associamos o número 2, e assim sucessivamente, de modo a rotular cada estrela com um número diferente. Teremos assim a seqüência de números naturais  $1, 2, \dots, N$  até um número  $N$ , correspondendo à última estrela que tomemos. Nesse caso o natural  $N$  é exatamente o que entendemos pelo número de objetos de  $X$ . Note que nesse caso temos uma bijeção entre os conjuntos  $\{1, 2, \dots, N\}$  e  $X$ .

Essa discussão sugere um fato geral interessante. Para comparar o número de elementos de dois conjuntos finitos, não é necessário contá-los separadamente. Em um ônibus, por exemplo, para verificar se há mais assentos ou passageiros, não é necessário contar os assentos e os passageiros. Basta fazer cada passageiro sentar em um assento. Se sobram passageiros, há menos assentos e mais passageiros, e se sobram assentos, ocorre o oposto. *O número de elementos de dois conjuntos é igual se, e somente se, há uma bijeção entre eles*. O gênio de Cantor foi notar que isso pode ser imediatamente generalizado para coleções infinitas, como discutiremos abaixo.

Subindo ainda uma nota na abstração, podemos tornar essas idéias mais precisas. Para cada  $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ , denotaremos por  $I_n$  o conjunto

$$I_n := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Temos então a seguinte definição fundamental.

---

<sup>6</sup>Nesse ponto é preciso mencionar novamente que o termo ‘conjunto’ tem um significado técnico em Matemática diferente do conceito de coleção na linguagem corrente. Embora intuitivamente seja natural considerá-los como tal, as coleções de maçãs e dedos *não são* conjuntos em um sentido matemático. Isso pode ser uma surpresa para o estudante que, lidando com idéias intuitivas, identifica qualquer coleção com conjunto. No entanto, desconsideramos tais sutilezas em prol da clareza de idéias.

**Definição:** Um conjunto  $X$  é dito ser *finito* se, e somente se, for vazio ou se existir  $n \in \mathbb{N}^*$  tal que há uma bijeção entre  $I_n$  e  $X$ . Se  $X$  não é finito então  $X$  é dito ser *infinito*.

É possível mostrar (veja, por exemplo, a Ref.[3]) que, dado um conjunto não-vazio  $X$ , se existirem  $n, n' \in \mathbb{N}^*$  tais que há uma bijeção entre  $X$  e cada um dos  $I_n, I_{n'}$ , então  $n = n'$ . Ou seja, se  $X$  é finito, então está associado a ele de forma única um número natural  $n$ , que é chamado *o número de elementos* de  $X$ . Há várias outras proposições em [3] que garantem que essa definição é “boa” no sentido de que captura várias idéias intuitivas a respeito de conjuntos finitos. Por exemplo, pode-se *provar* que todo subconjunto de um conjunto finito  $X$  com  $n$  elementos é também finito e tem no máximo  $n$  elementos. Também se mostra que se temos conjuntos finitos  $S_1, S_2$  disjuntos, com  $m$  e  $n$  elementos respectivamente, então  $S_1 \cup S_2$  é finito e tem  $m + n$  elementos.

Com a definição acima, temos uma caracterização matematicamente precisa do que significa “contar”: ao menos no caso de conjuntos finitos, *contar* é *estabelecer uma bijeção com algum subconjunto  $I_n$  de  $\mathbb{N}$* .

Mas podemos ir além. É instrutivo demonstrar, de acordo com essa definição, o seguinte fato intuitivamente óbvio:

**Teorema 1 :**  $\mathbb{N}$  não é um conjunto finito.

**Demonstração:** Vamos usar redução ao absurdo. Suponha que  $\mathbb{N}$  fosse finito. Então existiria  $n \in \mathbb{N}^*$  tal que há uma bijeção entre  $I_n$  e  $\mathbb{N}$ . No entanto, seja dada, arbitrariamente, uma função  $\phi : I_n \rightarrow \mathbb{N}$ . Ora, seja  $p = \phi(1) + \dots + \phi(n)$ . Claro que  $p \in \mathbb{N}$ . Note-se ainda que  $p > \phi(i)$  para cada  $i \in I_n$ . Em particular, não existe  $i \in I_n$  tal que  $\phi(i) = p$ . Mas então  $\phi$  não é sobrejetora, e portanto em particular não pode ser bijetora. Mas como  $\phi$  é arbitrária, isso mostra que não pode haver uma bijeção entre  $I_n$  e  $\mathbb{N}$ , contrariando a hipótese. ■

Outros exemplos de conjuntos infinitos são o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros e o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais. De fato, como esses conjuntos contém  $\mathbb{N}$ , se fossem finitos  $\mathbb{N}$  também teria que ser, contrariando o teorema que acabamos de demonstrar.

Os conjuntos infinitos têm propriedades interessantes e anti-intuitivas. Por exemplo, o conjunto  $\mathbb{P}$  dos números naturais pares parece ser intuitivamente “menor” do que  $\mathbb{N}$  (de fato “metade” deste), já que é subconjunto próprio deste. No entanto,  $\mathbb{P}$  pode ser posto em correspondência biunívoca com  $\mathbb{N}$ : basta

associar a cada  $n \in \mathbb{N}$  o número par  $2n$ , isto é,  $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4$ , etc. É um exercício simples mostrar que a função de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{P}$  assim definida é de fato uma bijeção (veja o Apêndice). Ou seja, (anti-)intuitivamente, isso significa que  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{N}$  têm o “mesmo número de elementos”<sup>7</sup>. Pode-se mostrar [3], mais geralmente, que uma condição necessária e suficiente para que um conjunto  $X$  seja infinito é a existência de uma bijeção entre  $X$  e um subconjunto próprio de  $X$ . De fato, Dedekind usou isso como uma definição alternativa de conjunto infinito.

Outro fato surpreendente: existem tantos números inteiros quanto naturais! A função  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par;} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

é uma bijeção (veja o Apêndice para uma prova desse fato). Intuitivamente, essa função corresponde a organizar os inteiros na seguinte ordem:

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\},$$

associando o zero ao primeiro da sequência, o 1 ao segundo, e assim por diante.

Como se não bastasse isso, existem tantos números *racionais* quantos números naturais! A demonstração desse fato notável que apresentamos aqui é um pouco mais complicada, mas pode ser entendida com alguma paciência. Começamos notando que a função de  $\mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Q}$  que leva cada inteiro  $p$  em  $\frac{p}{1}$  é injetora. Agora, lembre que cada racional pode ser escrito, de forma única, como uma fração irredutível  $\frac{p}{q}$ , onde  $p, q \in \mathbb{Z}$ , e podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $q > 0$ . Agora definimos uma função  $\psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  assim:

$$\psi(p/q) = \begin{cases} 2^p 3^q & \text{se } p \geq 0; \\ -2^{-p} 3^q & \text{se } p < 0. \end{cases}$$

Essa função é injetora (veja Apêndice). A seguir, usamos um importante teorema, cuja demonstração não daremos aqui:

---

<sup>7</sup>Observamos, numa nota histórica, que a descoberta desse fato é atribuída a Galileu Galilei(1564-1642), que considerou esse “absurdo” uma prova de que não poderia haver infinito atual em Matemática, uma vez que contradizia a máxima aristotélica ‘o todo é maior que as partes’.

**Teorema 2 (Schröder-Bernstein)** : *Dados conjuntos quaisquer  $X$  e  $Y$ , suponha que existam funções injetoras  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$ . Então existe uma bijeção entre  $X$  e  $Y$ .*

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [4].

Aplicando o Teorema de Schröder-Bernstein à nossa situação, concluímos que existe uma bijeção entre  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$ , e portanto há tantos racionais quanto há inteiros. Mas já vimos que existem tantos inteiros quanto há naturais.

**Definição:** Um conjunto  $X$  é dito ser *infinito enumerável*, ou simplesmente *enumerável*<sup>8</sup> se, e somente se, existir uma bijeção entre  $\mathbb{N}$  e  $X$ .

Nesse sentido, o próprio  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  são enumeráveis. Um fato importante é que é possível mostrar [3] que *subconjuntos de conjuntos enumeráveis ou são finitos, ou são eles mesmos enumeráveis*.

Isso sugere a seguinte pergunta crucial: *Será que todo conjunto infinito é enumerável, isto é, será que todo conjunto infinito tem “o mesmo número de elementos” de  $\mathbb{N}$ ?* A resposta é não. Há genuinamente *mais números reais do que números naturais*.

**Teorema 3 (Cantor)** : *O conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais não é enumerável.*

**Demonstração:** O método usado para esta demonstração é chamado *método da diagonal*, devido a Cantor. Começamos notando que basta mostrar que algum subconjunto de  $\mathbb{R}$  não é enumerável. Se esse for o caso, então o próprio  $\mathbb{R}$  não pode ser enumerável, pois se fosse, qualquer subconjunto seria enumerável (conforme discutido acima) e teríamos uma contradição. O subconjunto  $C$  que queremos considerar é o intervalo  $(0, 1]$  de todos os números reais  $r$  com  $0 < r \leq 1$ . A demonstração de que  $C$  não é enumerável é por contradição. Suponha que  $C$  é enumerável. Então existe uma bijeção  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow C$ . Escreva  $r_n = \alpha(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Essa bijeção nos dá, então, uma listagem  $C = \{r_0, r_1, r_2, \dots\}$  de elementos de  $C$ . Usamos agora o fato de que cada número real  $r_n$  dessa lista pode ser escrito, de maneira única, em forma decimal *infinita* sem uma sequência de zeros no fim [2]:

$$r_n = 0, a_{n0}a_{n1}a_{n2}\dots,$$

---

<sup>8</sup>Alguns autores aplicam o adjetivo ‘enumerável’ também aos conjuntos finitos.



onde  $a_{ni} \in \{0, 1, \dots, 9\}$  para todos  $n$  e  $i$ . Por exemplo,  $0,7 = 0,6999\dots$ , e  $1 = 0,999\dots$ . Considere agora o arranjo duplamente infinito

$$\begin{array}{rcl} r_0 & = & 0, a_{00}a_{01}a_{02}\dots \\ r_1 & = & 0, a_{10}a_{11}a_{12}\dots \\ \vdots & & \vdots \\ r_n & = & 0, a_{n0}a_{n1}a_{n2}\dots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Para cada  $n$ , tome  $b_n = 1$ , se  $a_{nn} \neq 1$  e  $b_n = 8$ , se  $a_{nn} = 1$ . Então  $b = 0, b_0b_1\dots b_n\dots$  é um número real de nosso conjunto  $C$ . Logo,  $b = r_k$ , para algum  $k$ . Porém, isso não pode ocorrer, uma vez que, da maneira como obtivemos  $b$ ,  $b_k$  é certamente diferente de  $a_{kk}$ . Temos assim a uma contradição; logo  $C$  não pode ser enumerável. ■

## Para o Infinito... E Além!

Cantor generalizou a discussão acima para conjuntos quaisquer, introduzindo a noção de *cardinalidade*, ou *tamanho* de uma conjunto  $X$ , denotada por  $|X|$ . Se  $X$  é um conjunto finito, sua cardinalidade é simplesmente seu número de elementos. A definição geral de cardinalidade de um conjunto para incluir conjuntos infinitos é sofisticada, e nos levaria muito além do escopo deste Artigo. Basta dizer que dois conjuntos  $X$  e  $Y$  *têm a mesma cardinalidade*,  $|X| = |Y|$ , se, e somente se, existir uma bijeção entre  $X$  e  $Y$ . Intuitivamente, isto significa que  $X$  e  $Y$  “têm o mesmo número de elementos”. Assim,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  têm a mesma cardinalidade um do outro, mas diferente da de  $\mathbb{R}$ .

É possível ordenar conjuntos por sua cardinalidade. Dados conjuntos  $X$  e  $Y$ , diremos que a *cardinalidade de  $X$  é menor ou igual à de  $Y$* ,  $|X| \leq |Y|$ , se, e somente se, existir uma função *injetora* de  $X$  em  $Y$ . Intuitivamente, isso significa que nesse caso  $X$  tem “o mesmo número de elementos” que algum subconjunto de  $Y$ , que eventualmente poderia ser todo o  $Y$ . O Teorema de Schröder-Bernstein (Teorema 2) acima pode ser reinterpretado como dizendo que se  $|X| \leq |Y|$  e  $|Y| \leq |X|$ , então  $|X| = |Y|$ . Dizemos que a *cardinalidade de  $X$  é (estritamente) menor que a de  $Y$* ,  $|X| < |Y|$ , se, e somente se, existir uma função *injetora* de  $X$  em  $Y$ , mas não existir uma função *sobrejetora* de  $X$  em  $Y$ . Ou seja,  $X$  tem “o mesmo número de elementos” que algum subconjunto

próprio de  $Y$ , mas “menos elementos” que o próprio  $Y$ .  $\mathbb{N}$  é estritamente menor que  $\mathbb{R}$  nesse sentido <sup>9</sup>. Por isso, apesar de serem ambos conjuntos infinitos,  $\mathbb{R}$  é de um tipo de infinito “maior” do que o de  $\mathbb{N}$ .

Pode-se ainda mostrar os seguintes fatos:

- Dados conjuntos  $X$  e  $Y$  quaisquer, uma e apenas uma das seguintes alternativas ocorre:  $|X| < |Y|$ ,  $|Y| < |X|$ , ou  $|X| = |Y|$ . Isto significa que “números infinitos” são ordenados de forma semelhante aos números usuais;
- Se  $X$  é um conjunto infinito, então  $|\mathbb{N}| \leq |X|$ . Ou seja, a cardinalidade de um conjunto infinito enumerável é a menor possível entre as cardinalidades dos conjuntos infinitos. Ou ainda: infinito enumerável é o menor tipo de infinito.

Uma pergunta que se pode fazer agora é: se há mais de um tipo de infinito, e há mesmo um menor tipo de infinito, será que existe o *menor* tipo de infinito? O seguinte teorema mostra que *não*.

**Teorema 4 (Cantor) :** *Dado uma conjunto qualquer  $X$ , denotemos por  $\mathbb{P}(X)$  o conjunto das partes de  $X$ , isto é, o conjunto de todos os subconjuntos de  $X$ . Então  $|X| < |\mathbb{P}(X)|$ .*

Esse teorema significa, intuitivamente, que não importa quão grande seja o conjunto, seu conjunto das partes é ainda maior. Há portanto toda uma hierarquia de infinitos cada vez maiores, sem fim.

Para dar ao leitor uma idéia do impacto histórico dessas idéias, coletamos algumas das frases de matemáticos famosos em relação ao tema.

*“Eu devo protestar veementemente contra o uso do infinito como algo consumado, uma vez que isso nunca é permitido em Matemática.”*

C.F. Gauss(1777-1855), matemático alemão.

---

<sup>9</sup>Embora exista função injetora de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{R}$  (por exemplo, a função que leva cada natural em sua cópia em  $\mathbb{R}$  é injetora), pode-se mostrar se existisse uma função sobrejetora de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{R}$ , então existiria uma função *injetora* de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{N}$ . Mas então, pelo Teorema de Schröder-Bernstein, existiria uma bijeção entre eles, o que não pode ocorrer.

*“Não sei o que predomina na teoria de Cantor - Filosofia ou Teologia, mas estou certo de que não há Matemática ali.”*

L. Kronecker(1823-1891), matemático alemão.

*“Não existe infinito atual; os Cantorianos esqueceram-se disto e caíram em contradições. As gerações posteriores considerarão Mengenlehre [Teoria dos Conjuntos, em alemão] como uma doença da qual se recobram.”*

H. Poincaré(1854-1912), matemático francês.

*“A teoria de Cantor como um todo é um incidente patológico na história da Matemática da qual as futuras gerações vão se horrorizar.”*

L. Brouwer(1881-1966), matemático holandês.

*“A Teoria Axiomática dos Conjuntos é uma casa construída sobre areia.”*

H. Weyl(1885-1955), matemático alemão.

*“Ninguém vai nos tirar do paraíso que Cantor criou para nós.”*

D. Hilbert(1862-1943), matemático alemão.

Finalizamos com uma citação do grande matemático e lógico polonês A. Tarski(1903-1983), com respeito a um outro tema, mas cuja substância resume perfeitamente como vemos a noção de infinito na Matemática em nossos dias<sup>10</sup>:

*“[...]A história da ciência apresenta muitos casos de conceitos que foram declarados como metafísicos (num sentido indeterminado, mas em todo caso depreciativo, do termo) antes do seu sentido ser tornado preciso; contudo, ao receberem uma definição formal*

---

<sup>10</sup>Veja [6], pags. 108-109, para o texto integral.

*e rigorosa, a desconfiança a seu respeito evaporou-se. Como exemplos típicos, podemos mencionar os conceitos de números negativos e números imaginários em Matemática.[...] parece-me que aqueles que deles [isto é, dos conceitos] desconfiaram, com base nas suas alegadas implicações metafísicas, devem congratular-se com o fato de definições precisas de tais conceitos estarem agora disponíveis. Se, em consequência, os conceitos [...] perderem interesse filosófico, então eles apenas partilharão o destino de muitos outros conceitos científicos, e não há que lamentar tal fato.”*

## Apêndice: Elementos de Funções

Tratamos aqui de alguns aspectos básicos acerca de funções. Para uma introdução elementar, porém sistemática, veja [5].

Dados conjuntos  $X$  e  $Y$  quaisquer, uma *função* (ou *aplicação*)  $f$  de  $X$  em  $Y$ , denotada freqüentemente por  $f : X \rightarrow Y$ , é uma regra <sup>11</sup>que, para todo elemento  $x$  de  $X$ , associa um *único* elemento  $f(x)$  de  $Y$ , chamado o *valor* da função  $f$  em (ou no *argumento*)  $x$ . Nesse caso,  $X$  é dito ser o *domínio* da função  $f$  e  $Y$  é o *contradomínio* de  $f$ .

Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita ser *injetora* (ou *injetiva*) se, e somente se, dados elementos quaisquer  $x, x' \in X$ , se  $f(x) = f(x')$ , então  $x = x'$ , ou equivalentemente, se  $x \neq x'$ , então  $f(x) \neq f(x')$ . Em outras palavras, uma função é injetora se não assume o mesmo valor em dois argumentos distintos. A função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x^2$  não é injetora, pois temos, por exemplo,  $g(2) = g(-2) = 4$ .

Vejam os exemplos do texto principal:

A função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$  que a cada  $n \in \mathbb{N}$ , associa o número par  $2n$  é injetora, pois para quaisquer  $n, n' \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = f(n') \Rightarrow 2n = 2n' \Rightarrow n = n'$ .

A função  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  também é injetora. De fato, dados  $n, n' \in \mathbb{N}$ , se  $\varphi(n) = \varphi(n')$ , então  $n$  e  $n'$  ou são ambos pares ou ambos ímpares. No primeiro caso,  $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2} \Rightarrow n = n'$ . O outro caso é análogo.

$\psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  é também injetora. De fato, dados  $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$ , se  $\psi(\frac{p}{q}) = \psi(\frac{p'}{q'})$ ,

<sup>11</sup>O leitor mais exigente notará que, embora intuitivamente nítida, há certa imprecisão nessa definição; por exemplo, o que é exatamente uma “regra”? É possível dar uma definição mais precisa de função, porém isso nos desviaria demais dos fins deste Artigo.

então necessariamente,  $p$  e  $p'$  têm o mesmo sinal. Suponha que sejam ambos não-negativos. Se ambos forem negativos, o argumento é análogo. Temos então  $2^p 3^q = 2^{p'} 3^{q'}$ . Mas a decomposição em fatores primos de um mesmo número é única (Teorema Fundamental da Aritmética). Portanto  $p = p'$  e  $q = q'$ .

Dada uma função  $f : X \rightarrow Y$ , a *imagem* de  $f$ , denotada  $\text{Im}f$ , é o subconjunto de  $Y$  que são valores de  $f$ . Em outras palavras, são aqueles  $y \in Y$  para os quais existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Claro que  $\text{Im}f \subseteq Y$  mas em geral  $\text{Im}f \neq Y$ . Se  $\text{Im}f = Y$ ,  $f$  é dita ser *sobrejetora* (ou *sobrejetiva*). A função  $\psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  acima, por exemplo, não é sobrejetora, já que qualquer número primo maior que três em  $\mathbb{Z}$  já não estará em sua imagem. Já a função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$  acima é claramente sobrejetora.

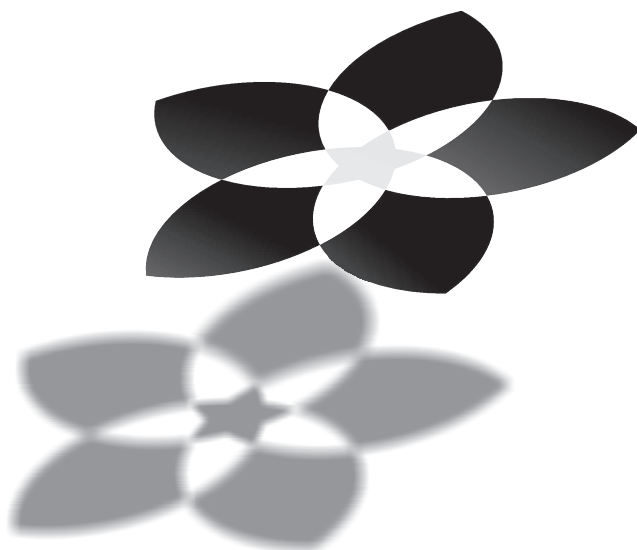
Se uma função é sobrejetora e injetora simultaneamente, então a mesma diz-se ser *bijetora*, ou uma *bijeção*, ou ainda, uma *correspondência biunívoca*. A função  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  acima é uma bijeção. Com efeito, já vimos ser ela injetora. Para ver que é sobrejetora, tome um  $a \in \mathbb{Z}$  arbitrário. Vamos mostrar que existe algum  $n_a \in \mathbb{N}$  tal que  $\varphi(n_a) = a$ . De fato, se  $a \geq 0$ , tome  $n_a = 2a$ , e se  $a < 0$ , tome  $n_a = 2(-a) - 1$ . O leitor pode checar então, usando a definição de  $\varphi$  do texto, que  $\varphi(n_a) = a$ . Mas como  $a$  é arbitrário, todo  $a \in \mathbb{Z}$  é valor de  $\varphi$ , que é portanto uma bijeção.

## REFERÊNCIAS

- [1] C.B. Boyer, *História da Matemática*, 2ª Edição, Ed. Edgar Blücher, São Paulo, 1996. V.J. Katz, *A History of Mathematics - An Introduction*, 2ª Edição, Ed. Addison Wesley Longman, Reading, 1998.
- [2] H.H. Domingues, *Fundamentos de Aritmética*, Atual Editora, São Paulo, 1991.
- [3] E.L. Lima, *Curso de Análise - Vol.1*, 6ª Edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1989.
- [4] M. Aigner e G.M. Ziegler, *As Provas Estão n'O LIVRO*, Ed. Edgar Blücher, São Paulo, 2002.

[5] G. Iezzi e C. Murakami, *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol.1, 7<sup>a</sup> Edição, Atual Editora, São Paulo, 1996

[6] A. Tarski, *A Concepção Semântica da Verdade e os Fundamentos da Semântica*, Existência e Linguagem - Ensaios de Metafísica Analítica (Ed. J. Branquinho), Editorial Presença, Lisboa, 1990.



**Artigo**

---





## Problemas Olímpicos: Análise quanto às Diferentes Técnicas de Resolução

Juliana Duarte Zacchi

juzacchi@yahoo.com.br

Para muitos educadores a “resolução de problemas” é uma grande prioridade no ensino de matemática. No entanto, professores de ciências exatas de faculdades são testemunhas da dificuldade encontrada pelos seus alunos na resolução de problemas, o quanto se sentem perdidos ao se depararem com um problema não rotineiro.

Nos ensinos Fundamental e Médio, a ênfase no estudo de matemática é na aprendizagem e aplicação de algoritmos envolvendo cálculos, o que, muitas vezes, torna o estudo enfadonho.

Há uma forte tendência hoje em dia em contextualizar a matemática, para que o aluno perceba as várias aplicações do conteúdo que aprendeu. Mas, devido a complexidade dessas aplicações, essa idéia rapidamente deixa de ser praticável em sala de aula.

Trabalhar com resolução de problemas não rotineiros em sala de aula, contribui para o desenvolvimento da inteligência, pois o aluno é estimulado a encontrar um caminho não conhecido de antemão (contornando obstáculos) para alcançar um fim desejado.

É muito comum nos depararmos com algumas teorias da didática, ou métodos pedagógicos que, apesar de nos parecer propícios, não são praticáveis. O que os professores mais alegam é que: “Isso toma tempo demais”; “só tenho 3 aulas semanais, não conseguirei cumprir o programa”, etc.

Por essas razões acredita-se que a Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (bem como as outras competições a nível nacional ou internacional) possa ser um forte instrumento para o professor trabalhar com resolução de problemas com seus alunos. Uma das vantagens desta competição é que é uma atividade extra-classe em que o professor não precisa se preocupar com a elaboração dos problemas.

Os problemas olímpicos exigem muita criatividade e imaginação em suas resoluções. Mais do que um “malabarismo” com contas, eles exigem idéias muitas vezes simples mas brilhantes.

São problemas não convencionais, pois exigem pouco uso de fórmulas e não são habitualmente encontrados nos livros didáticos.

Afirmações como estas são geralmente encontradas quando faz-se referência aos problemas olímpicos. Mas, afinal:

- O que caracteriza um problema olímpico?
- No que eles se diferem dos problemas usuais?

Afim de tentar responder à essas questões faz-se aqui uma análise destes problemas quanto às diferentes técnicas de resolução. Esta análise concentra-se nos problemas olímpicos da segunda fase da ORM e baseia-se em uma teoria da didática da matemática de Ives Chevallard.

Uma das preocupações da comissão que elabora estes problemas, é que o conteúdo exigido para sua resolução esteja adequado ao nível da questão. Um problema de nível 2, por exemplo, deve abordar somente conteúdos vistos até a 8ª série.

Os problemas olímpicos, portanto, estão vinculados aos conteúdos dos livros didáticos, porém não “vivem” neles. Dificilmente são encontrados em livros didáticos problemas no estilo olímpico.

## Quadro Teórico

A análise dos problemas olímpicos utilizará conceitos da Teoria Antropológica do Saber de Ives Chevallard.

Chevallard se utiliza metaforicamente de termos ecológicos como *habitat* e *nicho* afim de ilustrar que um saber não vive isolado, ele está ligado a instituições (habitats) e desempenha uma função (nicho).

Aqui o significado de instituição não está necessariamente atrelado a instituições de ensino, é mais amplo, pode ser, por exemplo, um livro didático ou um artigo de revista. Neste caso, o nosso objeto (saber) matemático são os problemas olímpicos e tem como instituição as Olimpíadas de Matemática.

A descrição que Chevallard faz de uma organização matemática será a base para a análise dos problemas olímpicos. Ele as descreve em termos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria relativas a um objeto matemático.

Em relação ao objeto matemático estudado (os problemas olímpicos), temos:

- Tarefa - é uma ação, é a pergunta do problema, por exemplo: calcular, determinar, demonstrar.
- Técnica - o que é feito para realizar a tarefa, a maneira com que se chega à solução do problema (o que foi utilizado). Por exemplo: algoritmos, experimentações.

Obs: é o estudo da técnica que nos permitirá classificar os problemas em tipos ou classes.

- Tecnologia - é o que valida a técnica, é o suporte teórico, o que está por trás. Por exemplo: definições, teoremas, propriedades.
- Teoria - é a *tecnologia* de uma tecnologia, um discurso mais amplo que justifique a tecnologia. Exemplo: álgebra, geometria, teoria de conjuntos.

Para esta análise foi escolhida aqui uma prova da segunda fase da ORM de SC. A prova é do nível 1 do ano de 2001. Para classificar os problemas em termos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, primeiramente apresentamos os enunciados e soluções destes.

*Listagem dos problemas com resolução:*

1. Um trabalhador limpa um terreno em quatro horas e outro trabalhador limpa o mesmo terreno em oito horas. Quanto tempo os dois trabalhadores, trabalhando juntos, levam para limpar o terreno? Dar a resposta em horas e minutos.

*Resolução:* O trabalhador que limpa o terreno todo em 4 horas é duas vezes mais rápido que o trabalhador que limpa o mesmo terreno em 8 horas. Assim, em um mesmo intervalo de tempo, aquele trabalhador limpa o dobro do terreno que este último trabalhador. Portanto, o trabalhador mais rápido limpa  $\frac{2}{3}$  do terreno (gastando  $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$  de hora), enquanto que o outro limpa  $\frac{1}{3}$  do mesmo terreno para a tarefa estar terminada (este trabalhador gasta os mesmos  $\frac{8}{3}$  de hora,  $\frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3}$ ).

Como  $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$  e  $\frac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ min}$ , então  $\frac{8}{3} \text{ h} = 8 \times 20 = 160 \text{ min} = 120 \text{ min} + 40 \text{ min} = 2 \text{ h e } 40 \text{ min}$ .

Portanto, os dois trabalhadores levam 2 h e 40 min para limparem o terreno.

2. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 deseja-se construir números de três algarismos satisfazendo as seguintes condições:
  - (a) Em cada número os algarismos devem estar em ordem crescente da esquerda para a direita, ou seja, o algarismo da centena deve ser menor do que o algarismo da dezena, e este deve ser menor do que o algarismo da unidade.
  - (b) Para quaisquer dois algarismos considerados (ou seja, dentre os sete algarismos acima) deve existir sempre um único número onde estes algarismos aparecem ao mesmo tempo (exemplo: dados os algarismos 1 e 2, devemos ter um e somente um dos números 123, 124, 125, 126 ou 127).

Quantos números é preciso construir de modo que as duas condições sejam satisfeitas? Apresente estes números.

*Resolução:* Vamos começar construindo os números 123, 145 e 167 satisfazendo as condições (a) e (b) para qualquer par que contenha o algarismo 1. A condição (b) ainda não está completamente satisfeita.

Já existe um número com os algarismos 1 e 2, e com 2 e 3 (o número 123), mas não existe ainda nenhum número com os algarismos 2 e 4 ou 2 e 5 ou 2 e 6 ou 2 e 7.

Tentamos então 246 e 257 e esgotamos a condição (b) em relação ao algarismo 2. Falta ainda verificar esta condição para os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7.

Vejam: 347 e 356.

Podemos verificar que estes 7 números satisfazem as condições (a) e (b):

123 246 347  
145 257 356  
167

**Obs:**

- Existem outras soluções possíveis. Por exemplo:

123 247 346  
145 256 357  
167

Estas são as duas únicas soluções possíveis, fixados os números 123, 145 e 167. Note que, fixado o número 123, temos 3 possibilidades para os outros números com o algarismo 1: 145 (e daí 167), 146 (e 157) e 147 (e 156). Finalmente, com os algarismos 1 e 2 temos 5 possibilidades: 123, 124, 125, 126 e 127. Portanto o número total de soluções possíveis é:  $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ .

- O número 7 pode ser obtido da seguinte maneira: com 7 algarismos podemos formar  $C_7^3 = 35$  números (que terão seus algarismos em ordem crescente) distintos de 3 algarismos. Para cada par de algarismos existem 5 possibilidades de formar um número. Portanto,  $35 \div 5 = 7$ .

3. Usando moedas nos valores de 1, 5, 10, 25 e 50 centavos, qual o menor número de moedas necessário para pagar uma conta de 94 centavos? E se a conta for de 99 centavos?

*Resolução:* Para formar 94 centavos necessitaremos de 4 moedas de 1 centavo (não há outra possibilidade). Faltam 90 centavos.

Para formar 90 centavos com o menor número possível de moedas, partimos das maiores moedas:

$$50 + 25 + \dots ?$$

E aí necessitamos de pelo menos uma moeda de 5 centavos.

Assim teremos:

$$90 = 50 + 25 + 5 + 10$$

Qualquer outra possibilidade necessitará mais moedas:

$$90 = 50 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50 + 25 + 5 + 5 + 5$$

etc. Portanto, o menor número para pagar a conta de 94 centavos é 8:

$$94 = 1 + 1 + 1 + 1 + 50 + 25 + 5 + 10$$

Se a conta for de 99 centavos, ainda necessitamos de 8 moedas:

$$99 = 1 + 1 + 1 + 1 + 25 + 50 + 10 + 10$$

4. Observe as igualdades:

$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$4^2 - 3^2 = 7$$

Explique porque a diferença entre os quadrados de dois números consecutivos é sempre um número ímpar.

*Resolução:* Se considerarmos dois números consecutivos, um deles será par e o outro ímpar. O quadrado de um número par é par e o quadrado de um número ímpar é ímpar. Assim, a diferença entre um número par e um número ímpar (ou ímpar e par) será ímpar.

Algebricamente:

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 \text{ (ímpar).}$$

5. Uma sala de oito metros por quatro metros deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados de 25 cm de lado. O dono da sala resolve usar ladrilhos vermelhos e azuis, formando blocos de mesma cor no seguinte formato:



Ele também quer que a sala seja ladrilhada com estes blocos de forma que os blocos da mesma cor não fiquem encostados lado a lado (é permitido que se encostem em um vértice). Será possível ladrilhar a sala com estas

exigências usando um número inteiro de ladrilhos de cada cor? Justifique sua resposta.

*Resolução:* Podemos formar blocos de  $1\text{m} \times 1\text{m}$  com 4 blocos básicos (dados no enunciado) da seguinte maneira:

V	V	V	A
V	A	A	A
A	V	V	V
A	A	A	V

onde A = azul e V = vermelho.

Agora basta juntar 8 colunas, cada uma com 4 blocos destes acima. Teremos portanto:  $8 \cdot 4 = 32$  blocos iguais aos blocos acima, ou seja,  $32 \cdot 4 = 128$  blocos básicos, sendo 64 vermelhos e 64 azuis. Teremos portanto:  $4 \cdot 64 = 256$  ladrilhos azuis e 256 ladrilhos vermelhos.

## Classificação

Para cada problema apresentado acima faz-se uma classificação em termos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria (segundo conceitos de Ives Chevallard).

### ORM - 2001, Nível 1: Problema 1

- i) **Tarefa:** determinar quanto tempo levam os dois trabalhadores para limparem o terreno;
- ii) **Técnica:** operações; reconhecimento do dobro de um número; representação decimal;
- iii) **Tecnologia:** algoritmo das operações; sistema de numeração; sistema de medidas;
- iv) **Teoria:** aritmética.

**ORM - 2001, Nível 1: Problema 2**

- i) **Tarefa:** determinar quantos números são possíveis de se construir satisfazendo as condições propostas e apresentá-los;
- ii) **Técnica:** operações; árvore;
- iii) **Tecnologia:** algoritmo das operações; relação de ordem; sistema de numeração;
- iv) **Teoria:** aritmética; análise combinatória.

**ORM - 2001, Nível 1: Problema 3**

- i) **Tarefa:** determinar o menor número de moedas para pagar a conta;
- ii) **Técnica:** operações; partição de um número;
- iii) **Tecnologia:** algoritmo das operações;
- iv) **Teoria:** aritmética.

**ORM - 2001, Nível 1: Problema 4**

- i) **Tarefa:** explicar porque a diferença entre os quadrados de dois números consecutivos é sempre um número ímpar;
- ii) **Técnica:** operações; reconhecimento de padrões; reconhecimento de números pares; reconhecimento de números ímpares;
- iii) **Tecnologia:** algoritmo das operações;
- iv) **Teoria:** aritmética.

**ORM - 2001, Nível 1: Problema 5**

- i) **Tarefa:** Determinar se é possível ladrilhar a sala com as exigências do dono;
- ii) **Técnica:** reconhecimento de padrões; pavimentação do plano;



- iii) **Tecnologia:** algoritmo das operações;
- iv) **Teoria:** aritmética; geometria.

Abaixo são descritas as técnicas que figuraram dentre os problemas listados anteriormente.

- *Operações:* é a técnica mais elementar. Todos os problemas analisados exigem essa técnica que consiste no uso das quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão);
- *Reconhecimento do dobro de um número:* capacidade de reconhecer quando um número é o dobro de outro;
- *Reconhecimento de números pares e números ímpares:* capacidade de identificar se um número é par ou ímpar;

Reconhecer um número par, por exemplo, exige do aluno uma boa compreensão da definição de números pares. Todas as técnicas desse tipo exigem a compreensão da teoria envolvida.

- *Reconhecimento de padrões:* geralmente o aluno percebe um padrão em seus cálculos quando há uma repetição constante de resultados;
- *Árvore:* técnica bastante utilizada para listar todas as possibilidades para um certo evento. É uma maneira sistemática de listá-las sem repetir qualquer possibilidade ou esquecer de alguma;
- *Partição de um número:* decompor um número natural como soma de naturais.
- *Pavimentação do plano:* dispor figuras geométricas de modo a cobrir uma região do plano sem que haja superposição ou espaços vazios.

Algumas técnicas utilizadas na resolução dos problemas olímpicos também são freqüentemente encontradas nos livros didáticos como, por exemplo, a *representação decimal*.

Em um estudo mais aprofundado desses problemas (ver [1]) técnicas como a *experimentação* e *reconhecimento de padrões* são encontradas com bastante

freqüência o que talvez possa responder em parte as perguntas do início deste artigo: *O que caracteriza um problema olímpico? No que eles se diferem dos problemas usuais?*

Essas técnicas são raramente encontradas na resolução de exercícios de livros didáticos, o que torna os problemas olímpicos diferentes. São técnicas como estas que despertam o raciocínio lógico nos alunos, o que vem a ser uma das características destes problemas.

As questões discursivas exigem que o aluno exponha seu raciocínio de forma clara e compreensível, o que permite a eles uma sistematização do raciocínio e uma melhor compreensão da solução apresentada.

Os problemas olímpicos são formulados de modo que não apresente tão claramente os conceitos matemáticos utilizados em sua resolução, levando o aluno a relacionar as fórmulas, teoremas e resultados que aprende na sala de aula a estas “situações-problema”.

Criatividade e originalidade são necessárias para resolver estes problemas, pois os mesmos geralmente descrevem situações para as quais nenhum processo rotineiro foi previamente aprendido. Ao resolver estes problemas com certa freqüência, o aluno adquire suas mais variadas técnicas, ampliando assim seu conhecimento matemático.

Esta análise feita com uma prova de nível 1 revela que a teoria envolvida nos problemas é essencialmente a aritmética (com algumas noções básicas de geometria e análise combinatória), visto que alunos 5<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> séries ainda não conhecem a álgebra e pouco sabem sobre geometria, por exemplo.

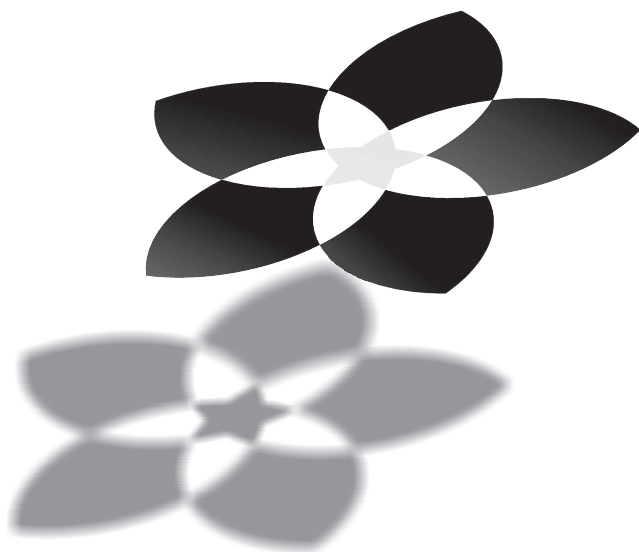
Percebe-se também que as tecnologias envolvidas nesses problemas são bastante elementares, não há nada muito sofisticado, o que nos faz crer que a dificuldade encontrada em suas resoluções consiste mais em interpretar o enunciado e ter uma idéia inicial da resolução.

Julgando de suma importância a resolução de problemas para o desenvolvimento do pensamento lógico e raciocínio crítico dos alunos, a análise apresentada aqui, utilizando conceitos da Teoria Antropológica do Saber de Ives Chevallard, pode em muito auxiliar o professor na hora de escolher os problemas a serem trabalhados com os alunos em sala de aula.

## REFERÊNCIAS

[1] ZACCHI, Juliana Duarte. *Problemas Olímpicos*. 68fls. 2004 (Trabalho de Conclusão de Curso) Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina.





**Artigo**

---



## O Problema da Divisão da Pizza

William Glenn Whitley

Departamento de Matemática, UFSC (Aposentado)

A Professora Carmem Suzane Comitre Gimenez apresentou um problema interessante sobre como cortar uma pizza e distribuir as fatias (*Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina - Nº 2, pg 116, Problema 5*).

Consideramos uma pizza em forma de um disco circular perfeito com centro  $O$  na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Consideramos, também, que a pizza é cortada em oito fatias. Concordamos que todos os cortes passam por um ponto que chamaremos de  $V$  e que os ângulos dos *bicos* das fatias em  $V$  são todos de  $45^\circ$ . Afirmamos que se você dá pedaços alternados para duas pessoas, cada uma receberá 4 pedaços e a quantia total de pizza dada a cada pessoa é a mesma. Veja a Figura 1.

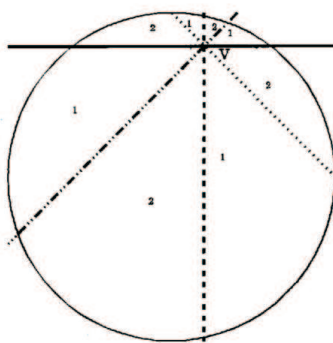


Figura 1

Na Figura 1, marcamos os quatros cortes com estilos de linhas diferentes, etiquetamos os pontos onde os cortes (cordas) interceptam a circunferência e indicamos a distribuição das fatias para a pessoa 1 ou a pessoa 2. Nesta figura notamos que o ponto  $V$  está bem afastado do centro  $O$  da circunferência. Se

um dos cortes passa por  $O$ , a solução é imediata, não sendo discutida aqui. Portanto, podemos girar e/ou refletir o desenho até o ponto  $V$  estar no primeiro quadrante e a corda mais curta ser horizontal.

Na Figura 2, as quatro cordas iniciais são salientadas pelas retas mais grossas, deixando mais clara a divisão do disco nos *pedaços de pizza*. Em seguida, incluímos cópias destas cordas obtidas através de rotações de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$  das cordas originais. Queremos usar as simetrias da figura resultante para apontar pedacinhos menores de áreas iguais nas diferentes fatias. Por último, nas figuras futuras, as fatias que vão para a pessoa 1 ganharão um sombreamento cinza, enquanto as da pessoa 2 permanecerão brancas.

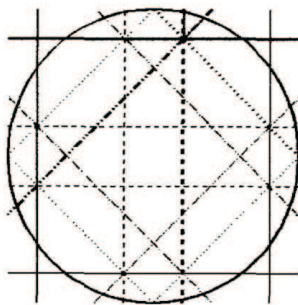


Figura 2

Antes de iniciar esta tarefa, devemos esclarecer um ponto de terminologia. Rotação de  $90^\circ$ , reflexão vertical e reflexão horizontal são termos bastante claros, mas reflexão em  $45^\circ$  é um pouco ambíguo. Afinal, há dois eixos diagonais. Chamaremos a diagonal que desce enquanto progride para a direita (inclinação  $-1$  no sistema de coordenadas cartesianas) de diagonal negativa e o outro (com inclinação  $1$ ) de positiva. Chamamos a atenção para uma situação especial neste desenho. Uma corda, aquela representada pela reta sólida, é curta o suficiente para que o quadrado formado por suas imagens tenha seus vértices fora da circunferência. O quadrado formado pelas cordas pontilhadas tem seus vértices na borda e os outros dois quadrados têm seus vértices no interior do disco. Dependendo de quanto o ponto de intersecção das cordas é distante do centro, esta situação pode se alterar significativamente. Portanto, enquanto a distribuição das *fatias* não se altera, a configuração dos *pedacinhos*



do nosso desenho podem se alterar nos *cantos* perto dos diâmetros dos quadrados. Tentaremos fazer um agrupamento de pedaços que não dependa desta propriedade especial do desenho.

Na Figura 3 vemos as quatro fatias menores acima da corda sólida, cada uma com marcação diferente. Em seguida vemos cópias de duas delas, as duas mais para a esquerda, sob a reflexão pela diagonal positiva e cópias das outras duas sob a reflexão pela diagonal negativa. Como reflexão preserva área, para cada uma destas quatro fatias, achamos uma área equivalente, sempre dentro de uma fatia no outro agrupamento.

Neste momento as quatro fatias menores delimitadas pela corda sólida já foram compensadas por partes de outras fatias. Das fatias menores delimitadas pela corda pontilhada, três já foram compensadas, e uma parte da quarta fatia foi *consumida*. Desejamos compensar o resto desta fatia. Para facilitar os desenhos futuros, anotaremos as áreas já compensadas preenchendo-as com feixes de linhas horizontais. Novas áreas em discussão serão marcadas preferencialmente com feixes de linhas diagonais.

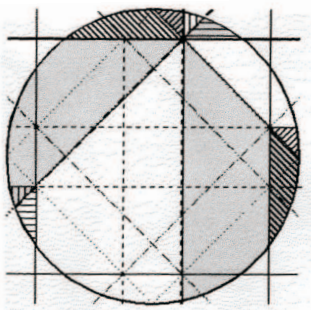


Figura 3

Na busca de um lugar para encaixar esta região, giramos e refletimos a figura à procura de uma região sombreada de formato igual. Achamos duas. Podemos refletir em relação ao eixo vertical ou girar  $90^\circ$  no sentido horário. Optamos por girar. O que aconteceria se você optasse para refletir? Daria para compensar as regiões restantes, fornecendo outra solução? Veja a Figura 4.

Passamos a examinar a *fatia grande* delimitada pelas cordas pontilhada e tracejada. Notamos que é uma região quadrilátera e que os lados opostos

formados por partes das cordas sólida e tracejada são paralelas. Temos assim um trapézio  $T$  que é muito especial, seus ângulos medem ou  $45^\circ$  ou  $135^\circ$ .

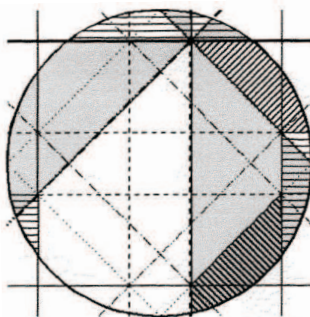


Figura 4

Se examinamos o triângulo  $\triangle XZV$  notamos que os ângulos em  $X$  e  $Z$  são de  $45^\circ$  e o triângulo é isósceles. Assim, a corda tracejada que passa por  $V$  é perpendicular à base e é a sua mediatriz, ou seja,  $\overline{XY} = \overline{YZ}$ . Devido à simetria por reflexão vertical,  $XX'$  é vertical e  $VXX'V'$  é um trapézio com as mesmas bases que  $T$  e a mesma altura. Portanto, eles têm a mesma área. Deste modo, identificamos dois pares de áreas que podem ser compensadas.

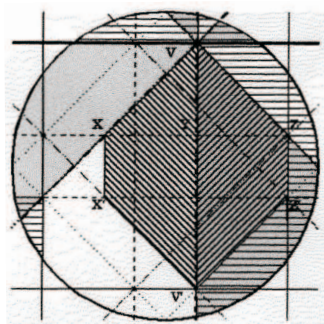


Figura 5

Se pretendemos continuar nossa técnica, tentaremos achar um local para encaixar o que sobrou da *fatia grande tracejada simples-tracejada mista*. Infelizmente, a região que sobrou é toda irregular e temos somente um lugar para encaixá-la, a *fatia tracejada mista-sólida*. Notamos que a região não compensada delimitada pelas cordas sólida e a tracejada mista é uma região convexa. Podemos tentar cortar fora um bico da região que sobra na fatia tracejada simples-tracejada mista na esperança de encaixar um grande pedaço convexo e esperar pela inspiração para acertar os pedaços menores que sobram. Na Figura 6 identificamos uma região promissora e a giramos  $90^\circ$  no sentido horário.

Notamos que sobrou uma região triangular em cada fatia. Afirmamos que estes triângulos são triângulos retângulos isósceles. Notamos também que as suas hipotenusas têm o mesmo comprimento por ambos medirem a distância entre um par de cordas tracejadas paralelas. Portanto, os triângulos são congruentes e têm a mesma área.

Isto conclui a demonstração.

Na realidade, ainda não concluí. Lembra como colocamos a corda menor em cima do desenho e com o vértice dos cortes mais para a direita? Onde usamos este fato na demonstração? Será que não foi necessário ou será que enganamos vocês e usamos sem avisar?

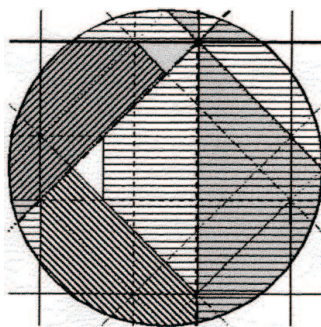
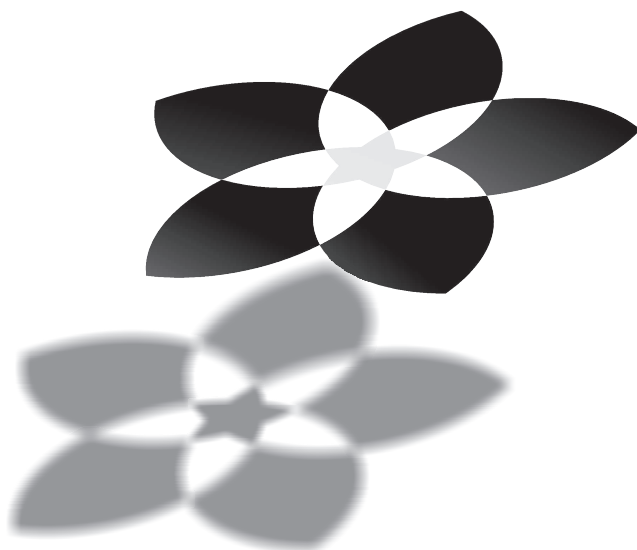


Figura 6

Será que esta é a única solução? Podemos achar outras maneiras de recortar as fatias ou até outras maneiras de agrupar os pedacinhos do nosso desenho? Quantas outras simetrias podem identificar na Figura 2 além daquelas usadas aqui? Divirtam-se.





**Artigo**

---



# Se a Terra não é Plana, quais são as Relações Métricas adequadas para determinarmos Comprimentos e Ângulos?

Celso Melchiades Doria

Dep. de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina  
CEP: 88.040-900, Florianópolis-SC

*O pregador há de ser como quem semeia, e não como quem ladrilha ou azuleja ... O rústico acha documentos nas estrelas para a sua lavoura e o mareante para a sua navegação e o matemático para as suas observações e para os seus juízos. De maneira que o rústico e o mareante, que não sabem ler nem escrever, entendam as estrelas; e o matemático, que tem lido quantos escreveram, não alcança a entender quanto nelas há.- P.e. Antônio Vieira(1608-1697) - Sermão da Sexagésima [5].*

## Introdução

Se a primeira impressão foi de que a Terra era plana, nada mais natural do que descobrir, primeiramente, que num triângulo retângulo  $\triangle ABC$  (fig.1) cuja hipotenusa mede  $a$  e os catetos medem  $b$  e  $c$ , que *o quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos*, ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (1)$$

A identidade 1 é a expressão do famoso *Teorema de Pitágoras*.

Decorre do Teorema de Pitágoras que num triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, cujos lados medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e cujos ângulos internos medem  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , conforme indica a figura 2, que

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\alpha) \\
 b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\beta), \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\gamma).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

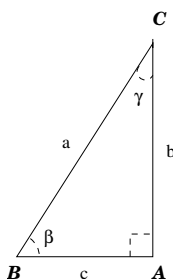
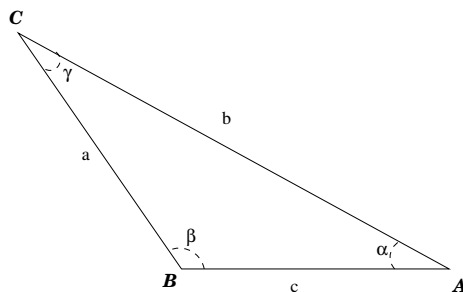


Figura 1: triângulo retângulo

Figura 2: triângulo  $ABC$ 

Porém, a Terra não sendo plana implica que as identidades acima não são as mais adequadas para realizarmos medições sobre a superfície do nosso planeta. É claro, a experiência mostra que quando as medidas realizadas são pequenas em relação ao raio da Terra, então os resultados obtidos pelas identidades 1 e 2 são bastante precisos. É aí que começam os problemas, uma vez que a necessidade de realizarem-se medidas de longa distâncias sobre a Terra é inevitável. O objetivo deste artigo é descrever as relações métricas em triângulos esféricos e mostrar um método de obtê-las. Se assumirmos que a Terra é uma esfera, o principal parâmetro a ser determinado é a medida do seu raio.

## Raio da Terra

### Medida do Raio da Terra

Por volta de 250 a.c., o grego Eratóstenes (276 - 194 a.c.), amigo de Arquimedes e conhecido como *Beta*, por ser o segundo melhor em tudo, desenvolveu um método muito simples para calcular a medida da circunferência da Terra. Hoje em dia sabemos que é de 40.075 km. Considerando que na época



não se sabia qual era o formato da Terra, podemos comparar o cálculo de Eratóstenes à obtenção de uma resposta para a questão atual sobre o formato do Universo (espaço-tempo).

Eratóstenes exercia o cargo de administrador da Biblioteca de Alexandria, no Egito, onde havia vários pergaminhos com conhecimentos diversos, dentre os quais os adquiridos pelos Gregos e pelos Egípcios. A aproximadamente 800 km ao sul de Alexandria havia uma cidade, denominada na época de Syene e hoje conhecida como Aswan, onde Eratóstenes sabia que a posição do Sol, ao atingir o zênite no solstício, era vertical.

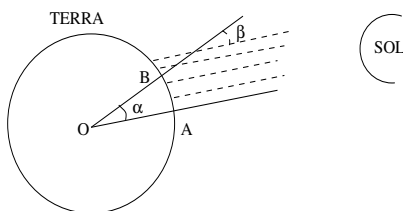


Figura 3: Alexandria e Seyne ,  $\alpha = \beta$

Na fig.3, o ponto A corresponde à cidade de Syene enquanto o ponto B à Alexandria. Eratóstenes concluiu que lhe bastava conhecer o ângulo  $\alpha$  e a distância Aswan-Alexandria para estimar a circunferência da Terra. Isto porque ele conhecia as fórmulas  $AB = R.\alpha \Rightarrow R = \frac{AB}{\alpha}$  e  $C = 2\pi.R$ , da onde

$$C = 2\pi \cdot \frac{AB}{\alpha}. \quad (3)$$

Estas fórmulas, consideradas evidentes nos dias de hoje, eram grosseiramente deduzidas e não dispunham de uma representação algébrica adequada para manipulá-las, tornando o conhecimento e as aplicações acessíveis para poucos.

A idéia de Eratóstenes foi determinar o ângulo  $\alpha$ , o que ele fez considerando as seguintes hipóteses:

1. A Terra é uma Esfera, assim como a Lua.
2. Os raios do sol chegam à Terra praticamente paralelos;

3. O caminho que percorre a menor distância entre Alexandria e Aswan, se continuado, descreve uma circunferência igual a de um grande círculo (Equador)

Desta forma, Eratóstenes simplificou o problema da determinação do ângulo  $\alpha$ . No instante em que o raio de Sol atinge o ponto A ortogonalmente, o mesmo raio ao atingir o ponto B forma um ângulo  $\beta$  com uma estaca fincada ortogonalmente ao chão. Na figura, observamos que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais, uma vez que ângulos opostos pelo vértice são congruentes, assim como ângulos correspondentes também são.

Eratóstenes mediu  $\beta = \frac{\pi}{25}$  e  $\widehat{AB} = 5.000$  estádios <sup>12</sup>, da onde  $C = 2 \cdot 25 \cdot 5000 = 250.000$  estádios. Considerando que 1 estádio correspondia a 157,5 metros, segue que  $C = 39.375$  Km e  $R = 6.266,71$  km. Apesar do método utilizado ser pouco preciso, o resultado obtido é excelente pois ao compará-lo com a medida atual de  $R = 6.378,11$  km, obtido a partir dos 40.075 km de circunferência, o erro é da ordem de 111 km (1,75%).

*“Se tal extraordinário resultado pode ser feito conhecendo-se apenas esta simples propriedade de linhas retas, que de certa forma é evidente, quantos grandes problemas são esperados de um profundo conhecimento da geometria ? Esta questão não pode ocorrer a uma mente inquisidora da verdade; é fundamental determiná-la a não perder tempo em adquirir o conhecimento”*

- Malton (sec. 18), *New Royal Road to Geometry*

## 2º. Método

Os Gregos conheciam um segundo método para o cálculo da circunferência da Terra utilizando uma estrela fixa no céu, em vez do Sol. Este 2º. método é atribuído a Posidonius (135 - 51 a.c.), tutor de Cícero.

Posidonius observou que quando a estrela Canopus encontra-se no horizonte sul de Rhodes, ela vista de Alexandria, ao sul de Rhodes, encontra-se acima do horizonte formando um ângulo de  $\frac{\pi}{24}$ , como mostra a figura 4. Para aplicar este novo método, Posidonius teve que assumir as seguintes hipóteses;

<sup>12</sup> unidade de distância utilizada na Grécia antiga

1. O arco, sobre a superfície da Terra, ligando Rhodes e Alexandria encontra-se sobre um grande círculo,
2. Os raios de luz vindos de Canopus chegam à Terra paralelos,

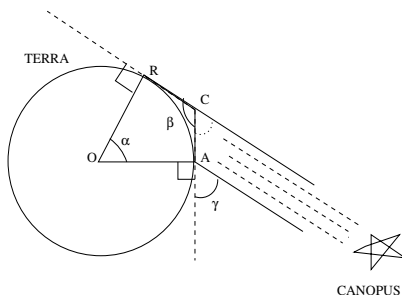


Figura 4: Método de Posidonius ,  $\alpha = \theta$

Posidonius observou que o ângulo central  $\alpha$  media  $\frac{\pi}{24}$ , o que implica, pelo mesmo raciocínio de Eratóstenes, que conhecendo-se o comprimento do arco  $\widehat{AR}$  de Alexandria a Rhodes, a circunferência da Terra seria de  $C = 48.AR$ .

Entretanto, Alexandria está separada de Rhodes pelo Mar Mediterrâneo, donde havia grande dificuldade em determinar o valor de  $\widehat{AR}$ . Com enorme inconsistência, Posidonius utilizou o cálculo de Eratóstenes que havia estimado  $\widehat{AR} = 3750$  estádios. Consequentemente, pelo método de Posidonius, a circunferência da Terra mede  $C = 180.000$  estádios; ou seja  $C = 28.350$  km. Desta forma, o erro obtido é da da ordem de 7%, muito maior do que o obtido por Eratóstenes.

Todo este esforço matemático só teria sentido se os viajantes e navegadores acreditassem no fato de que a Terra é uma esfera. Sem duvida, ao sabermos o valor do raio da terra, fica mais simples obtermos as distâncias, pois o valor de  $\pi$  já era conhecido com precisão de 2 casas decimais.

## Aplicação

O valor de 180.000 estádios(28.350 km), divulgado pelo trabalho amplamente conhecido do geógrafo Grego Strabo (64 a.c. - 23 d.c.), levou a con-

sequências mais profundas do que qualquer outro erro geométrico já cometido. Colombo usou a medida obtida por Posidonius para argumentar a viabilidade de sua proposta de alcançar as Índias navegando para o Oeste. Colombo expôs sua proposta para sábios da época que acreditavam na hipótese do Mundo ser redondo, e que eram encarregados para decidir se a viagem sobre o imenso oceano em pequenos barcos de madeira tinha chance de sucesso. Eles não estavam preocupados se os barcos poderiam cair em alguma espécie de penhasco no fim do Mundo, eles de fato preocupavam-se com a possibilidade do apodrecimento dos barcos e do sacrifício da tripulação que correria riscos de morrer de fome e de sede. A decisão dependia da estimativa para a provável distância que as naus navegariam, a qual dependia das estimativas feitas sobre a circunferência da Terra.

Colombo defendeu sua tese para os conselheiros do Rei e Rainha de Espanha citando o grande astrônomo e geógrafo Ptolomeu que viveu muitos anos após Eratóstenes, Posidonius e Strabo. De acordo com Ptolomeu, um viajante que começasse sua viagem do ponto mais a Oeste no continente europeu, situado no Cabo de São Vicente em Portugal, e rumasse Leste, sobre um mesmo paralelo, até retornar ao ponto de partida, faria a primeira parte da viagem por terra e a segunda por mar. Isto significaria que as terras dos continentes europeu e asiático ocupavam cerca de  $180^\circ$  de um paralelo no hemisfério norte.

Na figura 5 temos que O é o centro da Terra enquanto sobre o mesmo paralelo temos os pontos V e C correspondendo ao cabo de São Vicente e ao extremo leste na China, respectivamente ( $\widehat{VC} = 180^\circ$ ). De acordo com a teoria de Ptolomeu, havia muita água entre a China e Portugal, o que não serviria para os argumentos de Colombo. Assim, ele fez uso da estimativa puramente especulativa de um astrônomo grego chamado Marinus de Tyre, a quem Ptolomeu havia citado apenas para criticá-lo. Seguindo Marinus, Colombo supôs que a distância entre os pontos V e C, por terra, era de  $225^\circ$ . Portanto, o ponto C foi deslocado para  $C_1$  na figura 6.

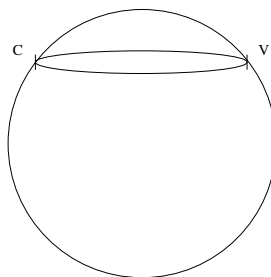


Figura 5

Observando um atlas moderno, observa-se que a distância, em graus, dos extremos dos continentes sobre o paralelo em que encontra-se V, é da ordem de  $120^\circ$ ; o que implica que a distância por mar é da ordem de  $240^\circ$ . De acordo com a estimativa de Colombo, a distância por mar seria de  $360^\circ - 225^\circ = 135^\circ$ .

Utilizar a estimativa de Marinus foi um dos muitos artifícios que Colombo usou para diminuir a distância por mar às Índias. Graças a invenção da imprensa, por volta de 1450, pelo alemão Johannes Gutenberg, o livro do mercador veneziano Marco Polo, descrevendo as suas viagens por terra ao oriente, havia sido publicado. Colombo havia adquirido uma cópia do livro de Marco Polo; este exemplar, sobre o qual Colombo anotava, ainda existe. As anotações mostram como ele foi diminuindo a distância para alcançar as Índias

navegando para Oeste. De acordo com Marco Polo, com um pouco de exagero, a distância, em graus, de V ao ponto no extremo leste da China, sobre o paralelo, localizava-se a  $28^\circ$  mais afastado do que a estimativa de Marinus, deslocando o ponto  $C_1$  para o ponto  $C_2$ , como indica a figura 7. Desta forma, a distância por mar seria de fato de  $360^\circ - (225^\circ + 28^\circ) = 107^\circ$ . Marco Polo afirmou que e as Índias ficavam em algum lugar próximo a Cipango (Japão), o qual Colombo estimou como  $30^\circ$  mais a leste da China.

De acordo com o relato de Marco Polo, Cipango deveria encontrar-se onde está marcada a letra J na figura 7. Consequentemente, a distância por terra de V a C seria de  $225^\circ + 28^\circ + 30^\circ = 283^\circ$ , da onde conclui-se que o arco  $\widehat{JV}$  tem a distância em graus dada por  $360^\circ - 283^\circ = 77^\circ$ ; correspondendo a distância por mar do Cabo de São Vicente a Cipango. Espertamente, Colombo planejou partir das Ilhas Canárias, as quais encontravam-se, segundo estimativas da época, a aproximadamente  $9^\circ$  a oeste do cabo de São Vicente, o que implicaria que a distância a ser navegada seria de uns  $68^\circ$ , desprezando-se o fato das Ilhas Canárias não se encontrarem sobre o mesmo paralelo que o Cabo. Aparentemente, Colombo não tinha a precisão como uma das suas virtudes.

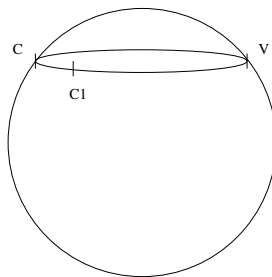


Figura 6

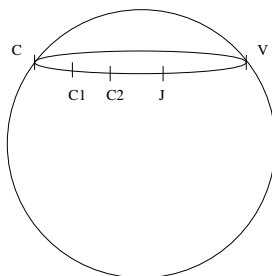
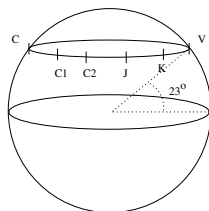


Figura 7

Insatisfeito com os  $68^\circ$  obtidos, ele resolveu cortar mais  $8^\circ$  do seu caminho. Assim, Colombo anunciou ao comitê, espantado pelos argumentos apresentados, que ele chegaria às Índias navegando  $60^\circ$  a Oeste das Ilhas Canárias, o que corresponderia a  $1/3$  da estimativa de Ptolomeu, que na época ainda gozava de grande prestígio.

Figura 8:  $JK = 68^\circ$ , K= Ilhas Canárias e  $\theta = 23^\circ$ 

Para discutir a viabilidade da viagem, era necessário transformar a distância estimada em  $60^\circ$  graus para quilômetros. Aqui o erro de Posidonius cumpriu a sua função dentro dos objetivos de Colombo. Considerando que a circunferência da Terra calculada por Posidonius era de 180.000 estádios, os  $60^\circ$  navegados sobre o equador correspondem a

$$d = \frac{60}{360} \times 180.000 = 30.000 \quad \text{estádios,}$$

ou, em km,  $d = 4.725 \text{ km}$ .

No entanto, Colombo não pretendia navegar ao longo do Equador, mas ao longo de um paralelo de latitude, o que resultaria numa distância ainda menor. Para calcular o raio de um círculo de latitude é necessário saber que a latitude das Ilhas Canárias é de  $23^\circ$ . Isto significaria que a distância deveria ser da ordem de 4.320 km.

Colombo concluiu sua exposição ao comitê dizendo que *O final da Espanha e o começo das Índias não encontram-se muito distantes, o mar que os separa é navegável em poucos dias tendo ventos favoráveis*; ele estimou a viagem em 30 dias. Estes dizeres estão gravados em uma das anotações feitas nas margens de um livro seu sobre cosmografia.

Tendo Colombo como Almirante, a esquadra formada pelas caravelas *Santa Maria, Niña e Pinta*, partiu das Ilhas Canárias em setembro de 1492 e, em 33 dias, no dia 12 de outubro de 1492, alcançou terra a uma distância de  $57^\circ$  a Oeste do ponto de partida, conforme previsto por Colombo. Estas terras não faziam parte do Japão, mas de um Mundo Novo.

## Relações Métricas Esféricas

### Distância sobre a Esfera

Uma vez que a Terra não é plana, os axiomas da geometria euclidiana e as suas consequências não podem ser empregadas para obtermos relações métricas entre comprimentos e ângulos sobre a esfera. A diferença entre as geometrias fica evidente quando observarmos que não há retas sobre uma esfera.

No que segue, vamos assumir que a Terra é uma esfera; de fato, a Terra é achatada nos pólos. Sendo assim, vamos abstrair o problema para a superfície de uma esfera com raio  $R$ .

Uma esfera de raio  $R$  centrada na origem é o conjunto dos pontos

$$\sigma(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Para melhor descrevermos os pontos sobre a esfera  $\sigma(R)$  introduzimos *coordenadas esféricas*. Um sistema de coordenadas esféricas sobre  $\sigma$  é um par  $(U, \phi)$  tal que  $U \subset \sigma$  é um subconjunto aberto de  $\sigma$  e  $\phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow U$  é um difeomorfismo<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup>função diferenciável que é uma bijeção e cuja inversa também é diferenciável

**Exemplo:** Sejam  $N = (0, 0, 1)$  e  $S = (0, 0, -1)$  os pólos norte e sul e  $l = \{(x, 0, z) \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$ . Considere  $U = \sigma - \{N, S\} \cup l$  e  $\phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow U$  definida por

$$\phi(\theta, \psi) = R.(\cos(\theta)\text{sen}(\psi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi), \cos(\psi)). \quad (4)$$

Neste caso, temos que  $(U, \phi)$  é um sistema de coordenadas sobre  $\sigma$  e, se  $p = \phi(\theta, \psi)$ , as coordenadas esféricas de  $p = (x, y, z) \in \sigma(R)$  são  $(\theta, \psi)$  (fig. 9).

Os pontos  $p, q \in \sigma(R)$  definem o plano  $\pi_{pq}$ , que contém a origem e é gerado pelos vetores  $\vec{op}$  e  $\vec{oq}$ ;

$$\pi_{pq} = \{s.\vec{op} + t.\vec{oq} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

A interseção de  $\sigma(R)$  com  $\pi_{pq}$  é uma circunferência que denominamos de *equador* e denotamos por  $\epsilon_{pq}$ . Além disto, os pontos  $p$  e  $q$  dividem o equador  $\epsilon_{pq}$  em dois arcos  $\epsilon_{pq}^1$  e  $\epsilon_{pq}^2$  denominados *segmentos*.

Para obtermos relações métricas sobre  $\sigma(R)$  assumiremos os seguintes axiomas;

**Axioma 1 :** *Dados dois pontos  $p, q \in \sigma(R)$  existe um único equador  $\epsilon_{pq} \subset \sigma(R)$  tal que  $p, q \in \epsilon_{pq}$ .*

**Axioma 2 :** *Os pontos  $p$  e  $q$  dividem o equador  $\epsilon_{pq}$  em dois segmentos  $\epsilon_{pq}^1$  e  $\epsilon_{pq}^2$ .*

**Axioma 3 :** *A distância esférica entre dois pontos distintos  $p, q \in \sigma(R)$  é*

$$d_{\sigma(R)}(p, q) = \inf(L(\epsilon_{pq}^1), L(\epsilon_{pq}^2)).$$

**Axioma 4 :** *Para qualquer par de equadores  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  há uma transformação  $f : \sigma(R) \rightarrow \sigma(R)$  que preserva as distâncias entre pontos de  $\sigma(R)$  e  $f(\epsilon_1) = \epsilon_2$ .*

Ao supormos que o ângulo entre os vetores  $\vec{op}$  e  $\vec{oq}$  mede  $\Omega$ , a distância entre  $p$  e  $q$  (fig.10) é dada por

$$d_{S^2(R)}(p, q) = R.\Omega = R.\arccos\left(\frac{\langle \vec{op}, \vec{oq} \rangle}{R^2}\right) \quad (5)$$



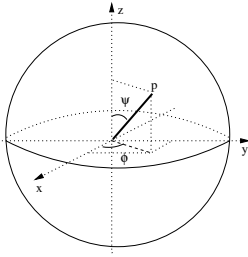


Figura 9: coordenadas esféricas

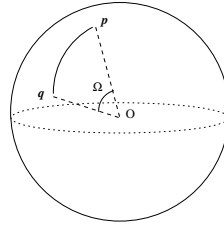


Figura 10: distância esférica

Vamos considerar que, em coordenadas esféricas, os pontos  $p, q \in \sigma(R)$  são descritos por

$$\begin{aligned} p &= R.(\cos(\theta_p)\text{sen}(\psi_p), \text{sen}(\theta_p)\text{sen}(\psi_p), \cos(\psi_p)), \\ q &= R.(\cos(\theta_q)\text{sen}(\psi_q), \text{sen}(\theta_q)\text{sen}(\psi_q), \cos(\psi_q)). \end{aligned}$$

Ao substituírmos na expressão 5 obtemos a seguinte fórmula para a distância:

$$d_{S^2(R)}(p, q) = R.\arccos \left( \cos(\Delta\theta).\cos(\Delta\psi) + 2\text{sen}^2 \left( \frac{\Delta\theta}{2} \right) .\cos(\psi_p).\cos(\psi_q) \right), \quad (6)$$

onde  $\Delta\theta = \theta_q - \theta_p$  e  $\Delta\psi = \psi_q - \psi_p$ .

Se supormos que  $p$  pertence ao plano-xy, isto é,  $\psi_p = \pi/2$ , segue que

$$d_{S^2(R)}(p, q) = R.\arccos (\cos(\Delta\theta).\cos(\Delta\psi)). \quad (7)$$

De acordo com o axioma 4, existe uma transformação em  $\sigma(R)$  preservando a distância e levando  $p$  ao ponto  $(1, 0, 0)$ . Assim, podemos assumir que  $p$  pertence ao plano-xy e  $\psi_p = \pi/2$ . Portanto, a distância entre os pontos  $p$  e  $q$  sobre  $\sigma(R)$  satisfaz a identidade

$$\cos \left( \frac{d_{\sigma(R)}(p, q)}{R} \right) = \cos(\Delta\theta).\cos(\Delta\psi). \quad (8)$$

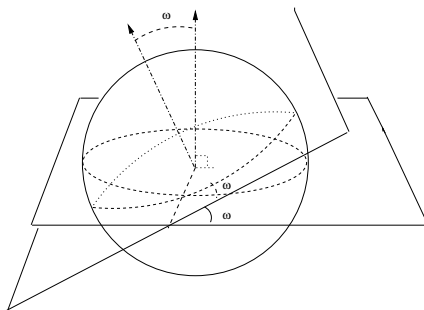


Figura 11: ângulo entre segmentos

**Definição:** O ângulo formado por dois segmentos é igual ao ângulo formado pelos planos que contém os segmentos (fig. 13).

## Triângulos Esféricos

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  sobre  $\sigma(R)$ , quando não pertencem a um mesmo equador, definem um triângulo  $\triangle ABC$  esférico. Assim como na geometria euclidiana, na geometria esférica existem relações entre as medidas dos lados com as medidas dos ângulos de um triângulo.

**Teorema 1 :** *Teorema de Pitágoras Esférico* - Seja  $\triangle ABC$  um triângulo geodésico sobre a esfera  $\sigma(R)$  tal que no vértice  $A$  o ângulo seja retângulo. Suponha que a hipotenusa mede  $a$ , o lado oposto à  $B$  mede  $b$  e  $c$  seja a medida do lado oposto à  $C$ . Então,

$$\cos\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{R}\right). \quad (9)$$

**Demonstração:** De acordo com o Axioma 4, podemos considerar o lado  $AB$  sobre o equador  $\psi = \pi/2$ . Em particular, podemos assumir que

$$A = (1, 0, 0), \quad B = \left(\cos\left(\frac{c}{R}\right), \sin\left(\frac{c}{R}\right), 0\right) \quad \text{e}$$

$$C = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{b}{R}\right), 0, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{b}{R}\right)\right).$$

$$\text{Portanto, } \langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle = \cos\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{R}\right).$$

Conforme dito anteriormente, a nossa experiência cotidiana mostra que a expressão 1 é adequada para resolvermos problemas de medição quando, por exemplo, queremos medir as dimensões de uma construção, ou de terrenos e até as distâncias dentro de uma cidade. Sendo assim, a identidade 1 deve ser obtida a partir de 9 quando os lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  do triângulo são muito pequenos em relação ao raio  $R$ . Por exemplo, para um segmento  $AB$

medindo 10 metros sobre a superfície da Terra temos que  $\frac{10}{6378,11} \sim 1 \text{ mm}$ .

Vejamos o que ocorre ao assumirmos na identidade (6) que  $\frac{a}{R} \sim 0$ ,  $\frac{b}{R} \sim 0$  e  $\frac{c}{R} \sim 0$ .

Segue das séries de Taylor das funções cosseno e seno que

$$\frac{a}{R} \sim 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{a}{R}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2}{2} + o\left(\left(\frac{a}{R}\right)^4\right), \quad (10)$$

$$\sin\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{a}{R} - o\left(\left(\frac{a}{R}\right)^2\right). \quad (11)$$

onde

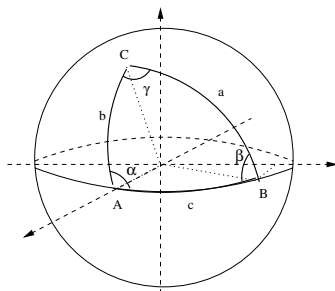


Figura 12

$$\lim_{\frac{a}{R} \rightarrow 0} \frac{o\left(\left(\frac{a}{R}\right)^4\right)}{\left(\frac{a}{R}\right)^2} = 0.$$

As aproximações 10 e 11, quando aplicadas à identidade 9, resultam em

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 + o\left(\frac{a}{R^4}\right) = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{R}\right)^2 + o\left(\frac{b^4}{R^4}\right)\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{R}\right)^2 + o\left(\frac{c^4}{R^4}\right)\right] \quad (12)$$

Consequentemente,

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} = -\frac{1}{4} \frac{b^2 \cdot c^2}{R^2} + \frac{1}{2R^2} \left[ b^2 \cdot o\left(\frac{c^4}{R^4}\right) + c^2 \cdot o\left(\frac{b^4}{R^4}\right) \right] + \quad (13)$$

$$+ \left[ o\left(\frac{a^4}{R^4}\right) - o\left(\frac{b^4}{R^4}\right) - o\left(\frac{c^4}{R^4}\right) \right] - o\left(\frac{b^4}{R^4}\right) \cdot o\left(\frac{c^4}{R^4}\right) \quad (14)$$

Assim, se  $R \gg a$ ,  $R \gg b$  e  $R \gg c$ , então

$$a^2 \sim b^2 + c^2,$$

sendo que no limite  $\frac{a}{R} \rightarrow 0$ ,  $\frac{b}{R} \rightarrow 0$  e  $\frac{c}{R} \rightarrow 0$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Portanto, o Teorema de Pitágoras euclideano deve ser aplicado quando os lados do triângulo são muito pequenos em relação ao raio  $R$ , embora ele só vale nas situações limites descritas acima ou quando  $a$ ,  $b$  e  $c$  são fixos e  $R \rightarrow \infty$ .

Agora, vamos considerar um triângulo qualquer.

**Proposição 1 :** *Lei dos Cossenos - Seja  $\triangle ABC$  um triângulo esférico em  $\sigma$  com ângulos internos medindo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  e cujos lados opostos medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}, \\
\cos(\beta) &= \frac{\cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}, \\
\cos(\gamma) &= \frac{\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)}.
\end{aligned} \tag{15}$$

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, suponha que

$$\begin{aligned}
A &= (1, 0, 0), \quad B = (\cos(\theta_B)\operatorname{sen}(\psi_B), \operatorname{sen}(\theta_B)\operatorname{sen}(\psi_B), \cos(\psi_B)) \\
C &= (\cos(\theta_C), \operatorname{sen}(\theta_C), 0).
\end{aligned} \tag{16}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{a}{R}\right) &= \langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle = \cos(\theta_C - \theta_B)\operatorname{sen}(\psi_B), \\
\cos\left(\frac{b}{R}\right) &= \langle \vec{OA}, \vec{OC} \rangle = \cos(\theta_C), \\
\cos\left(\frac{c}{R}\right) &= \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \cos(\theta_B)\operatorname{sen}(\psi_B);
\end{aligned} \tag{17}$$

da onde segue que,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right) &= \sqrt{\cos^2(\psi_B) + \operatorname{sen}^2(\theta_C - \theta_B)\operatorname{sen}^2(\psi_B)} \\
\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right) &= \sqrt{\cos^2(\psi_B) + \operatorname{sen}^2(\theta_B)\operatorname{sen}^2(\psi_B)}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Os vetores

$$\begin{aligned}
n_{AB} &= \frac{\vec{OA} \times \vec{OB}}{|\vec{OA} \times \vec{OB}|} = \left( \frac{(0, -\cos(\psi_B), \sin(\theta_B)\sin(\psi_B))}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \sin^2(\theta_B)\sin^2(\psi_B)}} \right) \\
n_{BC} &= \frac{\vec{OB} \times \vec{OC}}{|\vec{OB} \times \vec{OC}|} = \frac{(-\cos(\psi_B)\sin(\theta_C), \cos(\psi_B)\cos(\theta_C), \sin(\theta_C - \theta_B)\sin(\psi_B))}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \sin^2(\theta_C - \theta_B)\sin^2(\psi_B)}} \\
n_{CA} &= \frac{\vec{OC} \times \vec{OA}}{|\vec{OC} \times \vec{OA}|} = (0, 0, -1)
\end{aligned} \tag{19}$$

determinam os planos  $\pi_{AC}$ ,  $\pi_{AB}$  e  $\pi_{BC}$ , respectivamente. Considere  $\{n_{AB}, n_{BC}, n_{CA}\}$  uma base orientada de  $\mathbb{R}^3$ . Uma vez que,

$$\cos(\alpha) = - \langle n_{AC}, n_{AB} \rangle,$$

$$\cos(\beta) = - \langle n_{AB}, n_{BC} \rangle,$$

$$\cos(\gamma) = - \langle n_{AC}, n_{BC} \rangle,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\sin(\theta_B)\sin(\psi_B)}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \sin^2(\theta_B)\sin^2(\psi_B)}} \\
\cos(\beta) &= \frac{\cos^2(\psi_B)\cos(\theta_C) - \sin(\theta_C - \theta_B)\sin^2(\psi_B)\sin(\theta_B)}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \sin^2(\theta_B)\sin^2(\psi_B)}\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \sin^2(\theta_C - \theta_B)\sin^2(\psi_B)}} \\
\cos(\gamma) &= \frac{\sin(\theta_C - \theta_B)\sin(\psi_B)}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \sin^2(\theta_C - \theta_B)\sin^2(\psi_B)}}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Da relação 16, temos

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{a}{R}\right) &= \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right) + \sin\left(\frac{b}{R}\right)\sin(\theta_B)\sin(\psi_B) \\
\sin(\theta_C - \theta_B)\sin(\psi_B) &= \sin\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\sin(\theta_B)\sin(\psi_B),
\end{aligned} \tag{21}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta_B)\operatorname{sen}(\psi_B) &= \frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)} \\ \operatorname{sen}(\theta_C - \theta_B)\operatorname{sen}(\psi_B) &= \frac{\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)}. \end{aligned} \quad (22)$$

As expressões 21 aplicadas à 16 resultam nas seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}, \\ \cos(\gamma) &= \frac{\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Analogamente, a identidade para o  $\cos(\beta)$  é obtida a partir da situação na qual os vértices do  $\triangle ABC$  são

$$\begin{aligned} A &= (1, 0, 0), \quad B = (\cos(\theta_B), \operatorname{sen}(\theta_B), 0) \\ C &= (\cos(\theta_C)\operatorname{sen}(\psi_C), \operatorname{sen}(\theta_C)\operatorname{sen}(\psi_C), \cos(\psi_C)). \end{aligned} \quad (24)$$

Neste caso, obtemos

$$\cos(\beta) = \frac{\cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}.$$

**Corolário 1 :** *Lei dos Senos - Num triângulo esférico  $\triangle ABC$ , como na proposição 1, valem as identidades*

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(b)} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(c)}. \quad (25)$$

A seguir, como no caso do Teorema de Pitágoras, vamos analisar as expressões 14 quando  $R \gg a$ ,  $R \gg b$  e  $R \gg c$ . Ao aplicarmos as aproximações 10 e 11 à primeira expressão em 14, segue que:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\left[1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} + o\left(\frac{a^4}{R^4}\right)\right] - \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{R^2} + o\left(\frac{c^4}{R^4}\right)\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{R^2} + o\left(\frac{1}{R^4}\right)\right]}{\left[\frac{b}{R} - o\left(\frac{b^4}{R^2}\right)\right] \cdot \left[\frac{c}{R} - o\left(\frac{c^4}{R^2}\right)\right]} = \\ &= \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} - \frac{1}{4} \frac{b^2 c^2}{R^2}}{bc - \frac{1}{R^3} \cdot \left[b \cdot o\left(\frac{c^4}{R^4}\right) + c \cdot o\left(\frac{b^4}{R^4}\right)\right] + \frac{1}{R^2} o\left(\frac{b^4}{R^4}\right) \cdot o\left(\frac{c^4}{R^4}\right)} + \\ &+ \frac{R^2 \cdot [o\left(\frac{a^4}{R^4}\right) - o\left(\frac{b^4}{R^4}\right) - o\left(\frac{c^4}{R^4}\right)]}{bc - \frac{1}{R^3} \cdot \left[b \cdot o\left(\frac{c^4}{R^4}\right) + c \cdot o\left(\frac{b^4}{R^4}\right)\right] + \frac{1}{R^2} o\left(\frac{b^4}{R^4}\right) \cdot o\left(\frac{c^4}{R^4}\right)} + \\ &+ \frac{\frac{1}{2} [b^2 \cdot o\left(\frac{c^4}{R^4}\right) + c^2 \cdot o\left(\frac{b^4}{R^4}\right)] - \frac{1}{R^2} \cdot o\left(\frac{b^4}{R^4}\right) \cdot o\left(\frac{c^4}{R^4}\right)}{bc - \frac{1}{R^3} \cdot \left[b \cdot o\left(\frac{c^4}{R^4}\right) + c \cdot o\left(\frac{b^4}{R^4}\right)\right] + \frac{1}{R^2} o\left(\frac{b^4}{R^4}\right) \cdot o\left(\frac{c^4}{R^4}\right)}. \end{aligned}$$

Portanto, no limite  $\frac{a}{R} \rightarrow 0$ ,  $\frac{b}{R} \rightarrow 0$  e  $\frac{c}{R} \rightarrow 0$  verificamos a identidade

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \quad (26)$$

## A Área de um Triângulo Esférico

Uma vez que as relações métricas em triângulos esféricos são simples, é natural que haja uma expressão para a área.



Um gomo em  $\sigma$  é uma região limitada por dois segmentos  $\eta$  e  $\rho$  ligando os pontos antípodas  $p = (x, y, z)$  e  $q = (-x, -y, -z)$ , em  $\sigma$ . Em cada um dos vértices  $p$  e  $q$ , os segmentos formam um ângulo  $\theta$  denominado o ângulo do gomo. Um gomo com ângulo  $\theta$  é equivalente, pelo axioma 4, à

$$G_\alpha = \{(\cos(\theta)\sin(\psi), \sin(\theta)\sin(\psi), \cos(\psi)) \mid 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq \psi \leq \pi\}.$$

**Lema 1 :** A área de um gomo com ângulo interno  $\theta$ , em  $\sigma(R)$ , é igual a  $2\theta R^2$ .

**Demonstração:** Utilizando coordenadas esféricas temos que

$$A = R^2 \cdot \int_0^\theta \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi d\theta = 2\theta R^2.$$

Em particular, se  $\theta = 2\pi$  o resultado  $4\pi R^2$  dá a área da esfera.

**Teorema 2 :** A área de um triângulo esférico  $\triangle ABC \subset \sigma(R)$ , cujos ângulos internos medem  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , é

$$A = R^2 \cdot [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi].$$

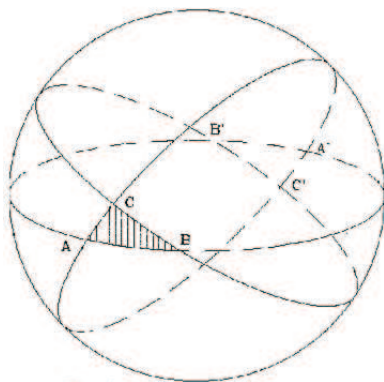


Figura 13

**Demonstração:** Seja  $A$  a área do triângulo, pelo lema anterior a área do gomo  $G_\alpha$  com ângulo  $\alpha$  é

$$A + A_\alpha = 2\alpha R^2,$$

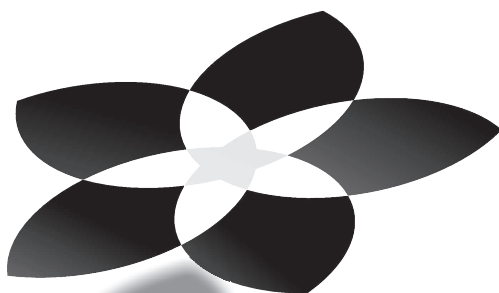
onde  $A_\alpha$  é a área da região complementar ao triângulo no gomo. Uma vez que a área de  $\sigma$  é  $4\pi R^2$  e que  $\triangle \cup G_\alpha \cup G_\beta \cup G_\gamma$  é um hemisfério, segue que

$$A + A_\alpha + A_\beta + A_\gamma = 2\pi R^2$$

Consequentemente,  $A + (2\alpha R^2 - A) + (2\beta R^2 - A) + (2\gamma R^2 - A) = 2\pi R^2$ , e  $A = R^2 \cdot [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] C.M.Doria, *Geometria sobre as Superfícies*, notas.
- [2] J.L.Heilbron, *Geometry Civilized*, Oxford, 1998.
- [3] *Enciclopédia Britânica*, 1995.
- [4] *Enciclopédia Larrousse Cultural*, 1998.
- [5] Eugênio Gomes, *VIEIRA - Sermões*, 3ª edição, Ed. Agir, 1963.



# **Soluções dos Problemas Propostos**

---



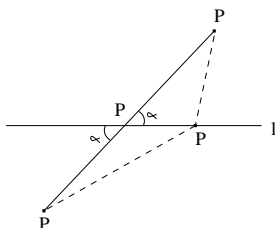
1. *Proposto por Ivan Pontual Costa e Silva, UFSC.* Seja  $L$  uma reta,  $P_1$  e  $P_2$  pontos distintos fora de  $L$  mas coplanares com  $L$ . Mostre que existe um único ponto  $P$  de  $L$  com a propriedade que  $d(P, P_1) + d(P, P_2)$  é mínima, e neste caso, o menor ângulo que  $PP_1$  faz com  $L$  e o menor ângulo que  $PP_2$  faz com  $L$  são iguais.

### SOLUÇÃO (enviada pelo proponente)

Temos duas situações possíveis:

- (i)  $P_1$  e  $P_2$  estão em lados opostos com respeito a  $l$ ;
- (ii)  $P_1$  e  $P_2$  estão do mesmo lado com respeito a  $l$ .

*Caso (i):*



Seja  $\overline{P_1P_2}$  o segmento que une  $P_1$  a  $P_2$ . Estando  $P_1$  e  $P_2$  de lados opostos de  $l$ , há um ponto  $P$  de  $l$  entre  $P_1$  e  $P_2$ . Nesse caso,

$$d(P_1, P_2) = d(P_1, P) + d(P, P_2) \quad (1)$$

Seja  $P'$  um ponto qualquer de  $l$ ,  $P' \neq P$ .  $P'$  não pode ser colinear com  $P_1$  e  $P_2$ , uma vez que a reta  $P_1P_2$  não pode intersectar  $l$  mais de uma vez, e já o fez em  $P$ .

Considere o triângulo com vértices  $P'$ ,  $P_1$  e  $P_2$ . A desigualdade triangular garante que:

$$d(P', P_2) + d(P', P_1) > d(P_1, P_2) \quad (2)$$

Da equação (1), temos portanto:

$$d(P, P_1) + d(P, P_2) < d(P'P_1) + d(P', P_2), \quad (3)$$

isto é,  $d(P, P_1) + d(P, P_2)$  é a menor possível, e  $P$  é o ponto procurado.

Seja  $\alpha$  o menor ângulo que  $\overline{PP_1}$  faz com  $l$ . Nesse caso,  $\alpha$  é menor ou igual a um ângulo reto. Um dos ângulos que  $\overline{PP_2}$  faz com  $l$  é oposto pelo vértice, e portanto, congruente a  $\alpha$ , sendo esse imediatamente o menor ângulo.

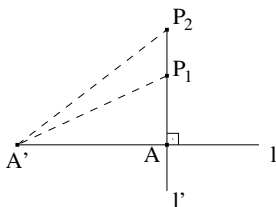
*Caso (ii):*

Seja  $l'$  a perpendicular a  $l$  baixada por  $P_2$ , e seja  $A$  o pé dessa perpendicular em  $l$ . Temos dois subcasos:

(ii)-(a):  $P_1$  está em  $l'$

(ii)-(b):  $P_1$  não está em  $l'$

*Subcaso (ii)-(a):*



Seja  $A'$  ponto arbitrário de  $l$ , com  $A' \neq A$ . Nesse caso,  $A'$  não estão em  $l'$ . Os triângulos  $\triangle P_2AA'$  e  $\triangle P_1AA'$  são triângulos são retângulos e  $P_2A'$  e  $P_1A'$  são as respectivas hipotenusas.

Portanto:

$$d(P_1A') > d(P_1A) \quad (4)$$

$$d(P_2A') > d(P_2A) \quad (5)$$

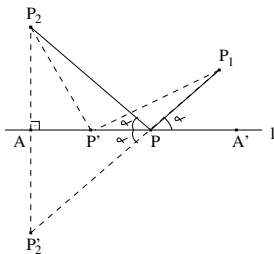
$$\therefore (P_1A') + d(P_2A') > (P_1A) + d(P_2A) \quad (6)$$

E  $A$  é o ponto procurado.

Por construção, o ângulo menor que  $P_1A$  e  $P_2A$  formam com  $l$  são congruentes, sendo ambos retos.

*Subcaso (ii)-(b):*

Seja  $P'_2$  o ponto em  $l'$  simétrico a  $P_2$  com respeito a  $l$  (existe e é único por transporte de segmentos).



$P'_2$  está do lado oposto ao de  $P_1$  com respeito a  $l$ , e portanto, existe um ponto  $P$  fora de  $l$  entre  $P_1$  e  $P'_2$ .  $P \neq A$ . Pelo caso lado-ângulo-lado, temos:

$$\triangle P_2PA \equiv \triangle P'_2PA \quad (7),$$

de onde

$$d(P_2, P) = d(P'_2, P) \quad (8)$$

Seja  $P'$  um ponto qualquer de  $l$ . Se  $P'=A$  temos  $d(P'_2, P') = d(P_2, P')$  (9) por construção. Se  $P' \neq A$ , temos que  $\triangle P'_2P'A \equiv \triangle P_2P'A$  (10) pelo caso lado-ângulo-lado.

Logo

$$d(P'_2, P') = d(P_2, P') \quad (11)$$

Pelo caso (i),

$$d(P_1, P') + d(P'_2, P') > d(P_1, P) + d(P'_2, P) \quad (12)$$

Portanto:

$$d(P_1, P') + d(P_2, P) > d(P_1, P) + d(P_2, P) \quad (13)$$

e P é o ponto procurado.

Finalmente, o ângulo  $\alpha = P_2\hat{P}A$  é o menor ângulo que  $P_2P$  faz com  $l$ , por ser menor que um ângulo reto. Pela congruência de triângulos (7), temos:

$$P'_2\hat{P}A' \equiv P_2\hat{P}A \quad (14)$$

Seja  $A'$  um ponto de  $l$  de modo que P esteja entre A e  $A'$ . O ângulo  $P_1\hat{P}A'$  é oposto pelo vértice a  $P'_2\hat{P}A$ , e portanto congruente a este.

Logo,  $P_1\hat{P}A' \equiv P'_2\hat{P}A$ , sendo este o menor ângulo. ■

2. *Proposto por Andrzej Solecki, UFSC.* Seja  $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 1$ . Quais as 3 raízes reais desta função, sabendo que as mesmas estão em PA? Qual o valor de  $a$ ?

**SOLUÇÃO** (enviada pelo leitor Vilmar Minella Junior)

Represente as 3 raízes em PA:  $x - r$ ,  $x$ ,  $x + r$ . Utilizando-se a relação de Girard, temos:  $x - r + x + x + r = \frac{-b}{1}$ , onde  $b = -3 \Rightarrow x - r + x + x + r = -b \Rightarrow 3x = \frac{-(-3)}{1} \Rightarrow x = 1$ .

Substituindo-se o valor da incógnita  $x$  na equação, encontraremos o valor de  $a$ :  $x^3 - 3x^2 + ax + 1 = 0 \Rightarrow 1^3 - 3(1)^2 + a(1) + 1 = 0 \Rightarrow 1 - 3 + a + 1 = 0 \Rightarrow -1 + a = 0 \Rightarrow a = 1$ .

Para o polinômio ficar divisível, faremos:  $x = 1$  ou  $x - 1 = 0$ . Assim sendo, baixaremos o grau do polinômio.

a) Pelo método da chave:



$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + x + 1 \mid x - 1 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \phantom{+ x + 1} \phantom{\mid x - 1} \\
 -2x^2 + x + 1 \phantom{\mid x - 1} \\
 \underline{2x^2 - 2x} \phantom{+ 1} \phantom{\mid x - 1} \\
 -x + 1 \phantom{\mid x - 1} \\
 \underline{x - 1} \\
 00
 \end{array}$$

b) Pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 1 & -3 & 1 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & -2 & -1 & 0
 \end{array}$$

Desta maneira transformamos a equação de terceiro grau em uma equação de segundo grau :  $x^2 - 2x - 1 = 0$ .

Podemos resolver esta equação pelo método de Báskara , então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 + 4 \Rightarrow \Delta = 8$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2}$$

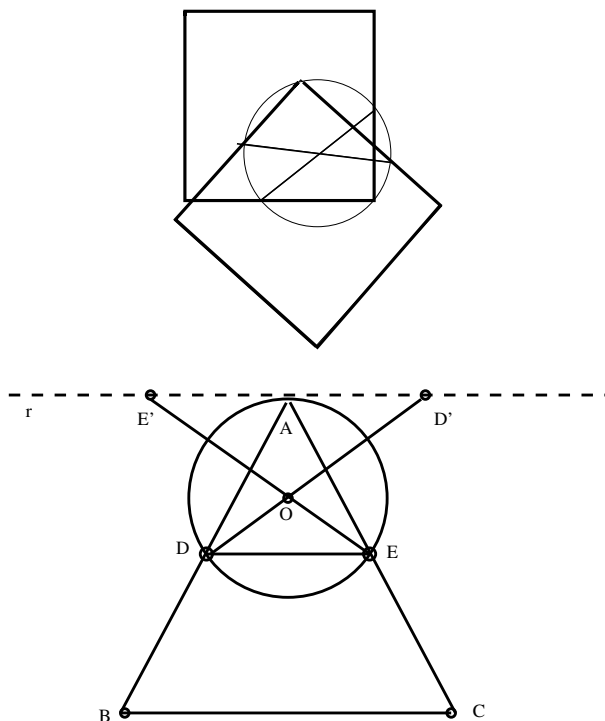
$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

3. *Proposto por Antônio Vladimir Martins, UFSC, retirado do livro Techniques of Problem Solving.* Com um grande quadrado de chumbo, é possível achar o centro de uma pequena circunferência . Mas se você tiver um grande triângulo equilátero, como achar o centro desta mesma circunferência?



**SOLUÇÃO**(enviada pelo graduando Felipe Vieira)

Sobre uma circunferência, a qual estamos interessados em encontrar seu centro, colocamos o vértice  $A$  do triângulo eqüilátero  $ABC$ . Da interseção dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  com essa circunferência resultam os pontos  $D$  e  $E$ . Girando o triângulo eqüilátero  $ABC$  em torno do vértice  $A$ , de modo que o lado  $\overline{AB}$  passe pelo ponto  $E$ , encontramos a reta  $r$  dada pelo ponto lado  $\overline{AC}$  do triângulo em sua nova posição.

Agora, colocamos uma das bases do triângulo eqüilátero sobre a reta  $r$  e deslizamos horizontalmente sobre ela até um dos lados tocar o ponto  $E$  (de maneira que um dos lados do triângulo não coincida com o lado  $\overline{AC}$ ) e obtemos o ponto  $D'$  (dado pelo vértice do triângulo  $ABC$  com a reta  $r$ ).

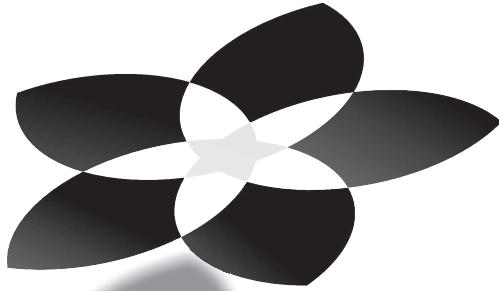
Façamos este mesmo procedimento, girando o triângulo equilátero  $ABC$  em torno do vértice  $A$ , de modo que o lado  $\overline{AC}$  passe pelo ponto  $E$  e assim encontramos o ponto  $E'$ .

Traçando os segmentos  $\overline{DD'}$  e  $\overline{EE'}$  utilizando-se um dos lados do triângulo equilátero obtemos a partir da interseção desses segmentos o centro  $O$  da circunferência.

Observando que  $\overline{EE'} = \overline{DD'}$  e a distância  $\overline{EE'}$  é igual a  $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{lado do triângulo } ABC$ . Prove!

Provamos que é possível encontrar o centro da circunferência utilizando-se de um triângulo equilátero. Será possível encontrar o centro dessa mesma circunferência utilizando-se qualquer polígono regular?





# **Problemas Propostos**

---



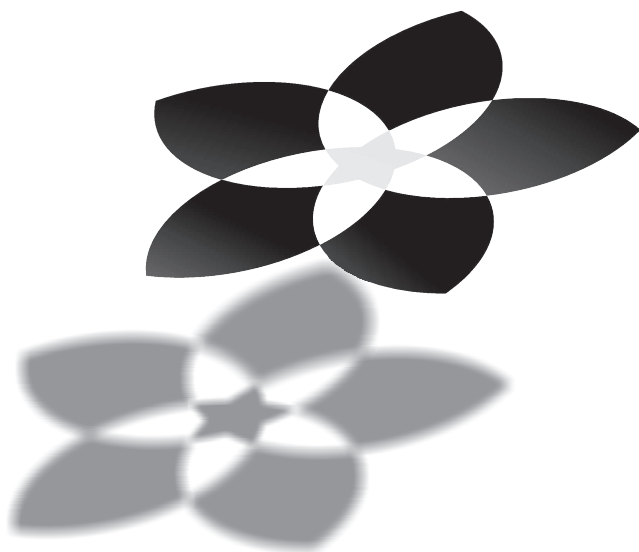
---

*Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições.*

1. *Proposto por César Raitz, UFSC.* Dado um quadrado de centro em  $O$  e cuja medida dos seus lados é  $a$ . Um outro quadrado tem a medida dos seus lados  $b$ , com  $b$  maior que  $a$ , e tal que um dos seus vértices é fixo em  $O$  e gira em torno de  $O$ . Qual deve ser a posição do quadrado maior para que o perímetro da parte comum dos dois quadrados seja mínimo?
2. *Proposto por Jucavo Savie Rocha, mestrando UFSC.* Sejam 16 cartas de baralho, do valete ao ás ( J,Q,K,A) e dos quatro naipes (Ouro, Espada, Copas,Paus), todas distintas. Disponha essas 16 cartas em um quadrado quatro por quatro de forma que em nenhuma linha, coluna ou diagonal se repitam duas cartas de mesma letra ou mesmo naipe.
3. *Proposto por César Raitz, UFSC.* Os lados de um triângulo medem respectivamente 6 cm, 8 cm e 10 cm. Um disco de raio 1 cm rola no interior do triângulo sempre tangente em pelo menos um dos lados do triângulo. No momento em que o centro dos disco chega na posição inicial de partida, depois de ter feito uma volta completa no triângulo, qual é a distância que ele percorreu?
4. *Proposto por Lucas Spillere Barchinski, graduando UFSC.* Qual a probabilidade de amigo oculto com  $n$  pessoas dê certo ( ou seja, ninguém pega a si mesmo)?
5. *Proposto por Fabiano Carlos Cidral, graduando UFSC.* Prove que todo subconjunto de 1003 elementos do conjunto  $A = \{1, 2, 3, \dots, 2004\}$  possui pelo menos dois elementos cuja soma é igual a 2005.







# **Outras Olimpíadas**

---



## Resultados de alunos de SC em outras Olimpíadas

### Resultados na OBM

#### **2004**

##### **Nível 01**

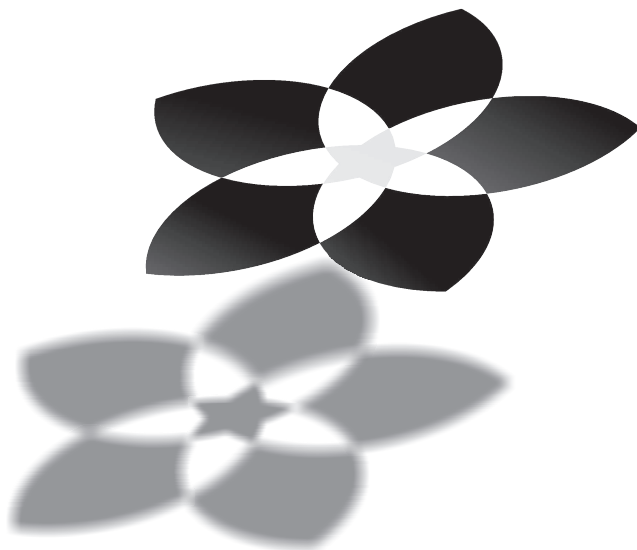
Renan Henrique Finder (Joinville) - Medalha de Prata

Vitor Costa Fabris (Criciúma) - Menção Honrosa

##### **Nível Universitário**

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Menção Honrosa





# Informações Gerais

---



## Envio de Problemas e Soluções

A seção de problemas propostos e soluções é uma seção dinâmica. Contribua propondo problemas e enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

## Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o  $\text{\LaTeX}$ , então o artigo poderá ser submetido neste formato.

## Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) podem cadastrar suas escolas entrando no nosso site ou entrando em contato diretamente conosco (ver abaixo).

Alunos interessados em participar das olimpíadas de matemática podem consultar nosso site para verificar se a sua escola está cadastrada. Caso contrário, devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembremos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

## Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberam

a revista podem nos solicitar o envio da mesma.

## Erramos

Na Revista nº2, têm-se as seguintes alterações:

- i) Na página 103, onde se lê  $(a - b)^2 \leq 0$ , deve-se ler  $(a - b)^2 \geq 0$ ;
- ii) Na página 116, onde se lê  $F_{24} = 2^{24} + 1$ , deve-se ler  $F_{24} = 2^{2^{24}} + 1$ .

## Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

- Nosso site: [www.orm.mtm.ufsc.br](http://www.orm.mtm.ufsc.br)
- Telefone/Fax: (48) 3316809 (PET - Matemática)
- e-mail: [orm@pet.mtm.ufsc.br](mailto:orm@pet.mtm.ufsc.br)
- Endereço: PET - Matemática  
Departamento de Matemática - CFM  
UFSC  
Campus Universitário - Trindade  
88040-900 – Florianópolis/SC