

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina

Nº2, 2005



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Reitor: Lúcio José Botelho

Vice-Reitor: Ariovaldo Bozan

PRÓ-REITORIA DE CULTURA E EXTENSÃO - PRCE

Pró-Reitora: Eunice Sueli Nodari

DEPARTAMENTO DE APOIO À EXTENSÃO - DAEx

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO - PREG

Pró-Reitor: Marcos Laffin

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM

Diretor: Ivan Gonçalves de Souza

Vice-Diretor: Mércles Thadeu Moretti

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Chefe: Nereu Estanislau Burin

Sub-Chefe: Carmem Suzane Comitre Gimenez

Apoio:

INSTITUTO DO MILÊNIO - Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

**CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina/
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],
2004 -
v.: 23 cm

Anual
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas,
exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas.

Comissão da Olimpíada Regional de Matemática de SC:

Coordenador: José Luiz Rosas Pinho

Professores: Carmem Suzane Comitre Gimenez, Eliezer Batista, Licio Hernanes Bezerra, Nereu Estanislau Burin, Waldir Quandt e William Glenn Whitley.

Bolsistas da olimpíada: Aline de Góes, Conrado Damato de Lacerda, João Luís Gonçalves, Rafael Sales Lisboa de Oliveira e Rodrigo Maciel Rosa.

Bolsistas do PET - Matemática: Ana Beatriz Michels, Carla Mörschbacher, Felipe Vieira, Graciele Amorim, Grasielli Gava, Heloísa Cristina da Silva, Juliana Araújo Paz, Karla Christina da Costa Kagoiki, Leonardo Koller Sacht, Louise Reips, Lucas Spillere Barchinski e Monique Müller Lopes Rocha.

Acadêmicos Colaboradores: Alda Dayana Mattos, Edinéia Zarpelon, Jucavo Savie Rocha, Kely Cristina Pasquali e Renata Leandro Becker

Comitê Editorial da Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina:

Alda Dayana Mattos
Ana Beatriz Michels
Graciele Amorim
José Luiz Rosas Pinho
Rodrigo Maciel Rosa
Waldir Quandt
William Glenn Whitley

Editoração Eletrônica:

Alda Dayana Mattos
Ana Beatriz Michels
Graciele Amorim
Rodrigo Maciel Rosa

Tiragem:

1000 exemplares

Arte da Capa:

Renata Leandro Becker

Postagem:

Segundo Semestre de 2004.

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina N.º 2, 2005

ISSN 1679-7612

Sumário

IV ORM (2001)	9
Problemas	11
Nível 1	11
Nível 2	13
Nível 3	15
Soluções	16
Nível 1	16
Nível 2	19
Nível 3	23
Premiados	27
Nível 1	27
Nível 2	28
Nível 3	29
Escolas Participantes	30
V ORM (2002)	33
Problemas	35
Nível 1	35
Nível 2	36
Nível 3	38
Soluções	39
Nível 1	39
Nível 2	42
Nível 3	45
Premiados	48
Nível 1	48
Nível 2	49
Nível 3	51
Escolas Participantes	53

VI ORM (2003)	57
Problemas	59
Nível 1	59
Nível 2	61
Nível 3	63
Soluções	65
Nível 1	65
Nível 2	68
Nível 3	72
Premiados	76
Nível 1	76
Nível 2	78
Nível 3	80
Escolas Participantes	82

ARTIGOS

Pode-se calcular a área de uma luna da parábola usando a Matemática estudada no Ensino Médio? Prof. William Glenn Whitley	89
Médias aritmética, geométrica e harmônica Prof. Licio Hernanes Bezerra	101
Soluções de problemas propostos na revista anterior	107
Problemas propostos	115
Outras olimpíadas	119
Informações gerais	123
Envio de Problemas e Soluções	125
Envio de Artigos	125

Cadastramento 125

Como adquirir a revista 126

Fale Conosco 126

Apresentação

A *Revista da Olimpíada Regional de Matemática (ORM) de Santa Catarina* tem por objetivo divulgar esta Olimpíada e a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). A ORM ocorreu em 2004 em sua 7ª edição contando com o apoio, externamente, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e do Instituto do Milênio - Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira (IM-AGIMB), e internamente das Pró-Reitorias de Cultura e Extensão (PRCE), de Assuntos Estudantis (PRAE) e de Ensino e Graduação (PREG) da Universidade Federal de Santa Catarina. Ela é realizada como um projeto de extensão do Departamento de Matemática, com a participação de um grupo de professores e de alunos com bolsas da PRCE, alunos do PET - Matemática e alunos colaboradores, todos do Curso de Matemática da UFSC.

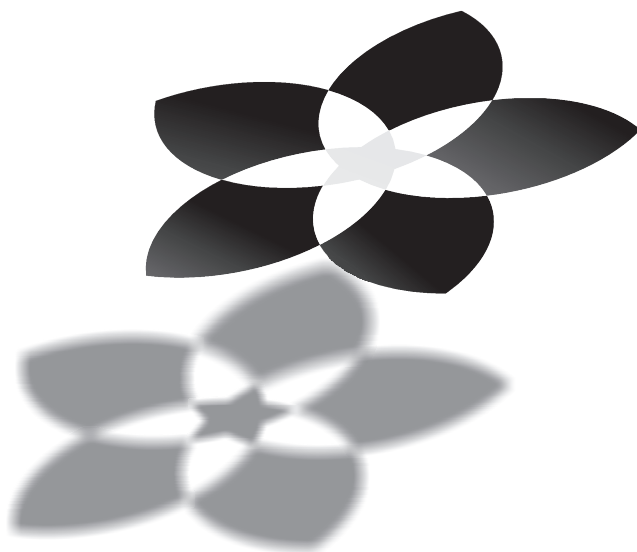
Neste segundo número da Revista apresentamos as provas (com soluções) da IV, V e VI ORM (anos 2001, 2002 e 2003 respectivamente), artigos dos professores da UFSC Lício Hernanes Bezerra e William Glenn Whitley, participantes do projeto da ORM, soluções de problemas propostos no número anterior e novos problemas propostos. Este número foi financiado através do programa PROEXTENSÃO 2003, do Departamento de Apoio à Extensão (DAEx) da PRCE da UFSC, e pelo IM - AGIMB, sendo apresentado na 4ª Semana de Ensino, Pesquisa e Extensão (SEPEX) da UFSC em setembro de 2004.

Solicitamos a todos os interessados que nos enviem sugestões, problemas e soluções de problemas propostos, e que submetam artigos para análise do Comitê Editorial e publicação nesta Revista.

Nossa intenção é atingir o maior número de escolas em Santa Catarina e, se possível, divulgar a ORM por todo o país. As escolas que não tiverem recebido este segundo número poderão solicitar um exemplar entrando em contato conosco ou consultando nossa página. Nossa esperança é que, algum dia, todas as escolas do Estado estejam participando das Olimpíadas de Matemática.

Florianópolis, 14 de outubro de 2004.

José Luiz Rosas Pinho
Coordenador das Olimpíadas de Matemática de Santa Catarina



IV ORM (2001)

Problemas

Nível 1

1. Um trabalhador limpa um terreno em quatro horas e outro trabalhador limpa o mesmo terreno em oito horas. Quanto tempo os dois trabalhadores, trabalhando juntos, levam para limpar o terreno? Dar a resposta em horas e minutos.
2. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 deseja-se construir números de três algarismos satisfazendo as seguintes condições:
 - (a) Em cada número os algarismos devem estar em ordem crescente da esquerda para a direita, ou seja, o algarismo da centena deve ser menor do que o algarismo da dezena, e este deve ser menor do que o algarismo da unidade.
 - (b) Para quaisquer dois algarismos considerados (ou seja, dentre os sete algarismos acima) deve existir sempre um único número onde estes algarismos aparecem ao mesmo tempo (exemplo: dados os algarismos 1 e 2, devemos ter um e somente um dos números 123, 124, 125, 126 ou 127).

Quantos números é preciso construir de modo que as duas condições sejam satisfeitas? Apresente estes números.

3. Usando moedas nos valores de 1, 5, 10, 25 e 50 centavos, qual o menor número de moedas necessário para pagar uma conta de 94 centavos? E se a conta for de 99 centavos?
4. Observe as igualdades:

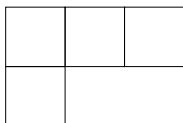
$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$4^2 - 3^2 = 7$$

Explique porque a diferença entre os quadrados de dois números consecutivos é sempre um número ímpar.

5. Uma sala de oito metros por quatro metros deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados de 25 cm de lado. O dono da sala resolve usar ladrilhos vermelhos e azuis, formando blocos de mesma cor no seguinte formato:

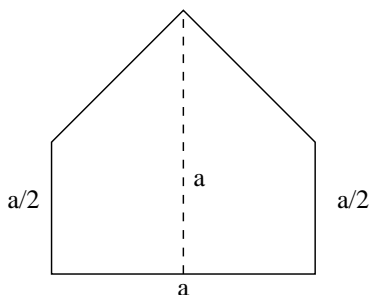


Ele também quer que a sala seja ladrilhada com estes blocos de forma que os blocos da mesma cor não fiquem encostados lado a lado (é permitido que se encostem em um vértice). Será possível ladrilhar a sala com estas exigências usando um número inteiro de ladrilhos de cada cor? Justifique sua resposta.

Você Sabia? Observe o interessante arranjo que se pode obter com os algarismos 3 e 7. Pode-se escrever: $3^3 + 7^3 = 37 \cdot (3 + 7)$ Nessa igualdade, tanto no primeiro membro como no segundo, só figuram os algarismos 3 e 7 numa disposição caprichosa.

Nível 2

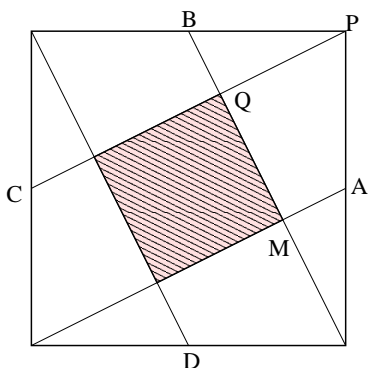
1. Um pintor pinta uma parede quadrada de lado a em oito horas. Outro pintor pinta uma parede de mesmas dimensões em quatro horas. Quanto tempo os dois pintores, trabalhando juntos, levarão para pintar a parede externa de uma casa, segundo a figura?



2. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 deseja-se construir números de três algarismos satisfazendo as seguintes condições:
 - (a) Em cada número os algarismos devem estar em ordem crescente da esquerda para a direita, ou seja, o algarismo da centena deve ser menor do que o algarismo da dezena, e este deve ser menor do que o algarismo da unidade.
 - (b) Para quaisquer dois algarismos considerados (ou seja, dentre os sete algarismos acima) deve existir sempre um único número onde estes algarismos aparecem ao mesmo tempo (exemplo: dados os algarismos 1 e 2, devemos ter um e somente um dos números 123, 124, 125, 126 ou 127).

Quantos números é preciso construir de modo que as duas condições sejam satisfeitas? Apresente estes números.

3. Os pontos A , B , C e D são os pontos médios dos lados do quadrado maior da figura cujo lado mede dez centímetros. Sabendo-se que $PQ = QM$ e $AM = \frac{PQ}{2}$, calcule a área exata do quadrado sombreado.



4. Usando moedas de 1, 5, 10, 25 ou 50 centavos, prove que é possível pagar qualquer conta entre 1 e 100 centavos com no máximo 8 moedas. Qual a menor conta que não pode ser paga com menos de 8 moedas?
5. Em 2001 um homem afirma que terá x anos no ano x^2 . Ele diz ainda que se a sua idade atual for adicionada ao número do seu mês de nascimento, então o resultado será o quadrado do dia do seu nascimento. Em que data ele nasceu (dia, mês, ano)?

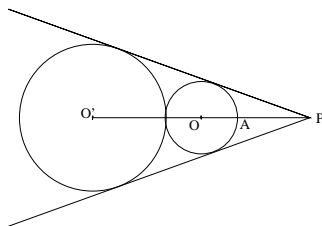
Nível 3

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ para cada par de números reais a e b . Calcule $f(2001)$.
2. De um conjunto de n elementos $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n > 3$, deseja-se construir uma família de subconjuntos com as seguintes condições:
 - (a) Todo subconjunto deve conter exatamente três elementos.
 - (b) Dados dois elementos quaisquer do conjunto C existe um, e somente um subconjunto que contém estes dois elementos.

Qual é o menor valor de n para que se possa construir uma família de subconjuntos satisfazendo as condições acima, e de quantos subconjuntos a família é composta? Apresente uma família destes subconjuntos.

Obs: Um subconjunto não pode conter elementos repetidos.

3. Prove que: se a raiz quadrada de um inteiro é um número racional, então esta raiz quadrada é, de fato, um número inteiro.
4. Dada uma circunferência de raio 1, qual é o triângulo de menor área que é circunscrito a esta circunferência? Qual é a área deste triângulo? Justifique sua resposta.
Obs: Um triângulo é circunscrito a uma circunferência se os seus três lados são tangentes a ela.
5. As circunferências de centro O e O' da figura têm raios R e $2R$, respectivamente, e as retas tangentes a ambas se cruzam no ponto P . Calcule a distância \overline{PA} em função de R .



Soluções

Nível 1

1. O trabalhador que limpa o terreno todo em 4 horas é duas vezes mais rápido que o trabalhador que limpa o mesmo terreno em 8 horas. Assim, em um mesmo intervalo de tempo, aquele trabalhador limpa o dobro do terreno que este último trabalhador. Portanto, o trabalhador mais rápido limpa $\frac{2}{3}$ do terreno enquanto que o outro limpa $\frac{1}{3}$ do mesmo terreno para a tarefa estar terminada. Assim, o tempo gasto é

$$\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3} \text{ de hora.}$$

Como 1 h = 60 min e $\frac{1}{3}$ h = 20 min, então $\frac{8}{3}$ h = $8 \cdot 20 = 160$ min = 120 min + 40 min = 2 h e 40 min.

2. Vamos começar construindo os números 123, 145 e 167 satisfazendo as condições (a) e (b) para qualquer par que contenha o algarismo 1. A condição (b) ainda não está completamente satisfeita.

Já existe um número com os algarismos 1 e 2, e com 2 e 3 (o número 123), mas não existe ainda nenhum número com os algarismos 2 e 4 ou 2 e 5 ou 2 e 6 ou 2 e 7.

Tentamos então 246 e 257 e esgotamos a condição (b) em relação ao algarismo 2. Falta ainda verificar esta condição para os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7.

Vejamos: 347 e 356.

Podemos verificar que estes 7 números satisfazem as condições (a) e (b):

123 246 347
145 257 356
167

Obs:

- Existem outras soluções possíveis. Por exemplo:

123 247 346

145 256 357

167

Estas são as duas únicas soluções possíveis, fixados os números 123, 145 e 167. Note que, fixado o número 123, temos 3 possibilidades para os outros números com o algarismo 1: 145 (e daí 167), 146 (e 157) e 147 (e 156). Finalmente, com os algarismos 1 e 2 temos 5 possibilidades: 123, 124, 125, 126 e 127. Portanto o número total de soluções possíveis é: $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

- O número 7 pode ser obtido da seguinte maneira: com 7 algarismos podemos formar $C_7^3 = 35$ números (que terão seus algarismos em ordem crescente) distintos de 3 algarismos. Para cada par de algarismos existem 5 possibilidades de formar um número. Portanto, $35 \div 5 = 7$.

3. Para formar 94 centavos necessitaremos de 4 moedas de 1 centavo (não há outra possibilidade). Faltam 90 centavos.

Para formar 90 centavos com o menor número possível de moedas, partimos das maiores moedas:

$$50 + 25 + \dots ?$$

E aí necessitamos de pelo menos uma moeda de 5 centavos.

Assim teremos:

$$90 = 50 + 25 + 5 + 10$$

Qualquer outra possibilidade necessitará mais moedas:

$$90 = 50 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50 + 25 + 5 + 5 + 5$$

etc. Portanto, o menor número para pagar a conta de 94 centavos é 8:

$$94 = 1 + 1 + 1 + 1 + 50 + 25 + 5 + 10$$

Se a conta for de 99 centavos, ainda necessitamos de 8 moedas:

$$99 = 1 + 1 + 1 + 1 + 25 + 50 + 10 + 10$$

.

4. Se considerarmos dois números consecutivos, um deles será par e o outro ímpar. O quadrado de um número par é par e o quadrado de um número ímpar é ímpar. Assim, a diferença entre um número par e um número ímpar (ou ímpar e par) será ímpar.

Algebricamente:

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \text{ (ímpar).}$$

5. Podemos formar blocos de 1m x 1m com 4 blocos básicos (dados no enunciado) da seguinte maneira:

V	V	V	A
V	A	A	A
A	V	V	V
A	A	A	V

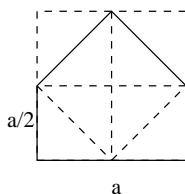
onde A = azul e V = vermelho.

Agora basta juntar 8 colunas, cada uma com 4 blocos destes acima. Teremos portanto: $8 \cdot 4 = 32$ blocos iguais aos blocos acima, ou seja, $32 \cdot 4 = 128$ blocos básicos, sendo 64 vermelhos e 64 azuis. Teremos portanto: $4 \cdot 64 = 256$ ladrilhos azuis e 256 ladrilhos vermelhos.

Nível 2

1. O pintor que pinta a parede quadrada em 4 horas é duas vezes mais rápido do que o pintor que pinta a mesma parede em 8 horas. Assim, em um mesmo intervalo de tempo, aquele pintor pinta o dobro da parede do que este último pintor.

Portanto o pintor mais rápido pinta $\frac{2}{3}$ da parede externa enquanto que o outro pinta $\frac{1}{3}$ da mesma parede para que esta tarefa esteja terminada. Agora podemos subdividir a parede externa em 6 triângulos iguais.

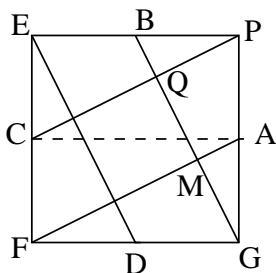


Então, o pintor mais rápido pintará 4 destes triângulos $\left(\frac{2}{3}\right)$ do total e o outro pintará 2 destes triângulos.

Mas 4 triângulos corresponde à metade da parede quadrada. Portanto o trabalhador rápido demorará $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ horas para fazer a sua parte, que é o mesmo tempo do outro pintor $\left(\frac{1}{4} \cdot 8 = 2\right)$.

2. Ver solução do problema 2 do nível 1.
3. Observe inicialmente que os triângulos $\triangle PEC$ e $\triangle FGA$ juntos ocupam metade da área do quadrado de lado 10 cm.
Então a “faixa” $APCF$ (é um paralelogramo) tem área igual à metade da área do quadrado, ou seja,

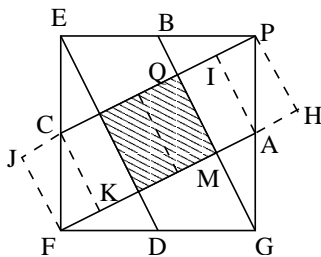
$$\frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$



Prolongando os segmentos \overline{FA} e \overline{PC} e traçando as perpendiculares por P e por F , obtemos dois quadrados de área igual ao quadrado central sombreado. Observe que os triângulos $\triangle PAI$ e $\triangle FCK$ juntos formam uma metade deste quadrado.

Assim, a faixa central é composta de 5 metades daquele quadrado.

Portanto, o quadrado central sombreado é $\frac{2}{5}$ da faixa, e assim sua área será $\frac{2}{5} \cdot 50 = 20 \text{ cm}^2$.



4. Vamos analisar o problema observando qual o número mínimo de moedas necessárias para pagar contas múltiplas de 5 entre 1 e 50 centavos. Qualquer conta entre estes múltiplos será obtida adicionando-se de 1 a 4 moedas de 1 centavo.

conta	moedas
05	5
10	10
15	5 + 10
20	10 + 10
25	25
30	5 + 25
35	10 + 25
40	5 + 10 + 25
45	10 + 10 + 25
50	50

Assim, fica fácil perceber que qualquer conta entre 1 e 50 centavos não necessita mais do que 7 moedas (note que $44 = 5 + 10 + 25 + 1 + 1 + 1 + 1$ e $49 = 10 + 10 + 25 + 1 + 1 + 1 + 1$ são as únicas que não podem ser pagas com menos de 7 moedas). Para pagar qualquer conta entre 51 e 100 centavos, basta adicionar a moeda de 50 centavos às contas acima, e assim não passaremos de 8 moedas.

A análise acima ainda nos mostra que $94 = 50 + 44 = 50 + 5 + 10 + 25 + 1 + 1 + 1 + 1$ é a menor conta que não pode ser paga com menos de 8 moedas. A conta de 99 centavos será outra (e somente estas duas) que não pode ser paga com menos de 8 moedas.

5. Devemos procurar quadrados perfeitos maiores do que 2001. O primeiro deles será $45^2 = 2025$ (note que $44^2 = 1536$). Este número pode ser x^2 , e portanto $x = 45$, ou seja, o homem teria 45 anos em 2025, e assim ele teria nascido em $2025 - 45 = 1980$. (Note que o próximo quadrado perfeito é $46^2 = 2116$, que não serve, pois o homem não poderia ter 46 anos em 2116 se já é nascido em 2001).

A idade do homem em 2001 é portanto $2001 - 1980 = 21$ anos.

Agora, $21 + m = d^2$ (onde m é o mês de nascimento e d é o dia de nascimento). Como m varia entre 1 e 12, então $21 + m$ varia entre 22 e 33. O único quadrado perfeito nesta faixa é 25. Logo, $m = 4$ (abril), e assim $d = 5$.

A data de nascimento deste homem é portanto 05/04/1980.

Nível 3

1. Basta fazer:

$$f(0) = f(0 \cdot 2001) = f(0) + f(2001) \Rightarrow f(2001) = 0$$

Esta função é identicamente nula.

2. O conjunto C tem pelo menos 4 elementos. Suponhamos que um subconjunto seja formado por a_1 , a_2 e a_3 . Com um quarto elemento, digamos a_4 , necessitaremos ainda de pelo menos outros 3 elementos para formar subconjuntos com a_1 e a_4 , com a_2 e a_4 e com a_3 e a_4 (para satisfazer (b)). Então não é possível satisfazer as duas condições com menos de 7 elementos.

Vamos ver que $n = 7$ é o menor valor para construir a família, apresentando uma destas famílias:

$$\begin{aligned} &\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_4, a_6\}, \{a_3, a_4, a_7\}, \\ &\{a_1, a_4, a_5\}, \{a_2, a_5, a_7\}, \{a_3, a_5, a_6\}, \\ &\{a_1, a_6, a_7\}. \end{aligned}$$

Note que as condições (a) e (b) estão satisfeitas.

São os 7 subconjuntos da família.

Obs: É possível construir outras famílias com os 7 elementos. Por exemplo:

$$\begin{aligned} &\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_4, a_7\}, \{a_3, a_4, a_6\}, \\ &\{a_1, a_4, a_5\}, \{a_2, a_5, a_6\}, \{a_3, a_5, a_7\}, \\ &\{a_1, a_6, a_7\}. \end{aligned}$$

3. Se $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, onde p e q são naturais, $q \neq 0$, então $n = \frac{p^2}{q^2}$ ou $nq^2 = p^2$.

Os expoentes dos fatores primos de p^2 devem ser pares (se $p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, então $p^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}$).

Os expoentes dos fatores primos de q^2 também são pares. Segue-se que os expoentes dos fatores primos de n também devem ser pares, ou seja,

$$n = n_1^{2\gamma_1} n_2^{2\gamma_2} \dots n_l^{2\gamma_l}.$$

Portanto, $\sqrt{n} = n_1^{\gamma_1} n_2^{\gamma_2} \dots n_{k_l}^{\gamma_{k_l}}$, que é um número inteiro.

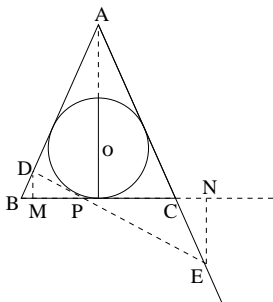
4. Observemos que nenhum lado do triângulo (qualquer um deles circunscrito) e nenhuma altura podem ser menores ou iguais ao diâmetro da circunferência (igual a 2). Para triângulos com base próxima de 2, a altura será tão grande quanto se queira, e para triângulos com alguma altura próxima de 2, a base será tão grande quanto se queira. Podemos ter assim triângulos circunscritos a circunferência com áreas tão grandes quanto queiramos.

Vejamos agora que dentre todos os triângulos circunscritos à circunferência de raio 1 e com um ângulo fixado, o triângulo isósceles (cuja base é oposta àquele triângulo) é o que tem a menor área.

Na figura abaixo, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles com $AB = AC$. Considere agora um outro triângulo circunscrito qualquer $\triangle ADE$. Note que \overline{DE} cruza \overline{BC} em um ponto P e que $BP < CP$.

Os triângulos $\triangle PDM$ e $\triangle PEN$ ($\overline{DM} \perp \overline{BP}$ e $\overline{EN} \perp \overline{PC}$) são semelhantes, e como $PM < BP < CP < PN$, temos que $DM < EN$. Assim,

$$\text{Área } \triangle PDB = \frac{BP \cdot DM}{2} < \frac{CP \cdot EN}{2} = \text{Área } \triangle PCE.$$



Portanto, ao formarmos o $\triangle ADE$, em relação ao $\triangle ABC$, perde-se a área do $\triangle PDB$ e ganha-se a área do $\triangle PCE$, que é maior. Logo:

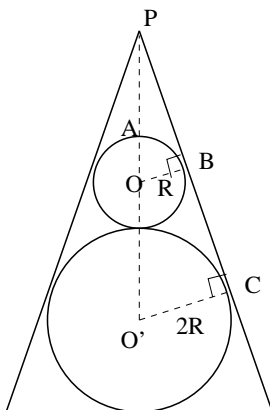
$$\text{Área } \triangle ADE > \text{Área } \triangle ABC.$$

Agora considerando que existe um triângulo circunscrito de área mínima, e que este triângulo deve ser isósceles do ponto de vista de qualquer de seus ângulos, chegamos a conclusão que tal triângulo deve ser equilátero, cuja altura será $3 \cdot 1 = 3$ e portanto de área igual a $\frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{3}$.

5. Na figura temos $\overline{OB} \perp \overline{PB}$ e $\overline{O'C} \perp \overline{PC}$ (B e C pontos de tangência). Os triângulos retângulos $\triangle POB$ e $\triangle PO'C$ são semelhantes (são retângulos e tem um ângulo agudo igual: o ângulo $\angle OPB = \angle OPC$). Então

$$\frac{PO}{R} = \frac{PO + OO'}{2R} = \frac{PO + 3R}{2R} \Rightarrow 2PO = PO + 3R \Rightarrow PO = 3R$$

Logo, $PA = PO - R = 2R$.



Premiados

(em ordem alfabética por nível e por tipo de medalha)

Nível 1

Ouro

- Filippe Frigo Furtado (Colégio Centro Educacional Visão)

Prata

- Daniel Vinícius da Rocha Zunino (Colégio Dom Bosco)
- Danilo Nunes do Carmo (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Jefferson Isberner de Santana (E.M. Erwin Prade)
- Nelisa Helena Rocha (Colégio Catarinense)

Bronze

- Carla da Silva de Carvalho (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Daniel Linhares Bittencourt (Centro Educacional Menino Jesus)
- Elisa Faoro Schwinden (Colégio Catarinense)
- Eloah Cristina Melo (Colégio Coração de Jesus)
- Roberta Muriel Longo Roepke (E.M. Erwin Prade)

Menção Honrosa

- Felipe Cavichioli (Centro Educacional Menino Jesus)
- Giovanni Duarte Raitz (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Guilherme Silveira Wolff (Centro Educacional Menino Jesus)
- José Roberto Cordeiro (Colégio Catarinense)
- Paola Chagas Pereira (Colégio Coração de Jesus)
- Renan Machado Capaverde (Educandário Imaculada Conceição)
- Vitor Cesar Kanitz (E.M. Erwin Prade)

Nível 2

Ouro

- Felipe Paupitz Schlichting (Colégio Coração de Jesus)
- Guilherme Rohden Echelmeier (Colégio de Aplicação da UNIVALI)

Prata

- André Luiz Tomelin (Colégio Catarinense)
- Guilherme Claudino (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Guilherme Sada Ramos (Educandário Imaculada Conceição)
- José Artur Silveira Teixeira (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Luckas Frigo Furtado (Colégio Centro Educacional Visão)
- Viviam Giacomelli Pedroso (Colégio Coração de Jesus)

Bronze

- Ana Caroline Corrêa Faúla (Colégio Catarinense)
- Douglas Kazumi Lopes Ugochi (Educandário Imaculada Conceição)
- Fabíola Sara Stofela Sarolli (Colégio Dom Bosco)
- Gustavo Henrique Nihei (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Hanna Kurihara e Silva (E.B.M. Beatriz de Souza Britto)
- Ismael Alberto Schonhorst (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Karine Piacentini Coelho da Costa (E.B.M. Beatriz de Souza Britto)
- Lucas Veit Braun (Educandário Imaculada Conceição)
- Maria Eduarda Dias Brinhosa (Educandário Imaculada Conceição)
- Rafael Peralta Muniz Moreira (Centro Educacional Menino Jesus)

- Rafael Steinwandter (Educandário Imaculada Conceição)

Menção Honrosa

- Ana Beatriz Senna (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Bruno Leonardo Schneider (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Daniel Rudolph (E.M. Erwin Prade)
- Fernanda Nascimento Lisbôa (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Glaucia Ferrari (E.M. Padre Martinho Stein)
- Guilherme Silva Remor de Oliveira (Centro Educacional Menino Jesus)
- Márcio Lucas Maes Junior (Educandário Imaculada Conceição)
- Taynah Bastos Lima da Silva (Colégio Dom Bosco)
- Thaisy Fernandes (Colégio Catarinense)
- Vinicius Stramosk (Colégio Dom Bosco)

Nível 3

Ouro

- Jairo Krás Mengue (Escola Agrotécnica Federal de Sombrio)

Prata

- Leonardo Kunrath (Escola Elisa Andreoli)

Bronze

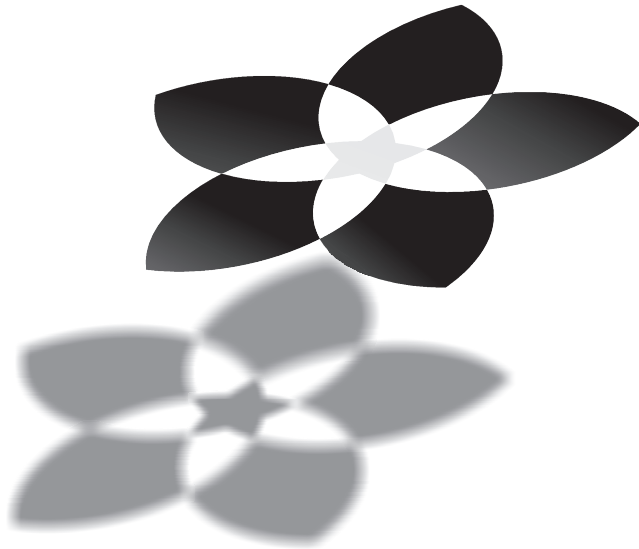
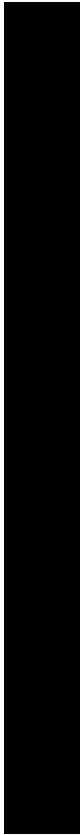
- Déborah Silva Alves (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Gabriel Weiss Maciel (Colégio Catarinense)
- Ricardo Besen Hillesheim (Escola Elisa Andreoli)

Escolas Participantes

1. Centro Educacional Aconchego (Balneário Camboriú)
2. Centro Educacional Estrela Guia (Balneário Camboriú)
3. Centro Educacional Lucaz (Florianópolis)
4. Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis)
5. Centro Educacional Príncipe Ali (São José)
6. Centro de Educação Cantinho Feliz (Timbó)
7. Colégio Carrossel (Palhoça)
8. Colégio Catarinense (Florianópolis)
9. Colégio Cenecista Antônio Carlos (Antônio Carlos)
10. Colégio Centro Educacional Visão (São José)
11. Colégio Coração de Jesus (Florianópolis)
12. Colégio da Polícia Militar Feliciano Nunes Pires (Florianópolis)
13. Colégio de Aplicação da UFSC (Florianópolis)
14. Colégio de Aplicação da UNIVALI (Itajaí)
15. Colégio Dom Bosco (Rio do Sul)
16. Colégio Dom Jaime Câmara (São José)
17. Colégio dos Santos Anjos (Joinville)
18. Colégio Energia (Florianópolis)
19. Colégio Marista (Criciúma)
20. Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí)
21. Colégio Superação (Videira)
22. Curso e Colégio Camboriú (Balneário Camboriú)

23. Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis)
24. Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul (Rio do Sul)
25. Escola Agrotécnica Federal de Sombrio (Santa Rosa do Sul)
26. E.B.M. Beatriz de Souza Britto (Florianópolis)
27. Escola Elisa Andreoli (São José)
28. E.E.B. Irmã Maria Tereza (Palhoça)
29. E.E.B. João Colin (Joinville)
30. E.E.B. Julia Miranda de Souza (Navegantes)
31. E.M. Erwin Prade (Timbó)
32. E.M. Padre Martinho Stein (Timbó)
33. Estabelecimento de Ensino Peart (Balneário Camboriú)

Você Sabia? Que se tivermos uma cópia reduzida de um mapa e colocarmos esta cópia em qualquer posição sobre o mapa original, desde que ela fique inteiramente contida no mapa original, então haverá um único ponto (localidade) na cópia coincidente com um ponto no mapa original?



V ORM (2002)

Problemas

Nível 1

1. Quantos números de quatro algarismos distintos podem ser escritos de modo que algarismos pares não apareçam juntos? (Não considere números começando com zero.)
2. Calcular a média aritmética de três números (isto é, somá-los e dividir por três) é o mesmo que calcular a média aritmética de dois deles (somar os dois e dividir por dois) e, com o resultado calcular a média aritmética com o terceiro número?
3. Explique por que $2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \dots + 2^{52}$ é múltiplo de 10.
4. Uma pessoa necessita bombear água de um lugar para outro usando um cano de 50mm de diâmetro. Não encontrando cano desta dimensão decide comprar dois canos de 25mm de diâmetro. Explique se ele conseguirá bombear a mesma quantidade de água (ou mais, ou menos) por hora.
5. Quantas seqüências completas se pode formar com os algarismos 1, 2 e 3 de modo que:
 - a) Não apareçam ...11..., ...22... ou ...33... (um mesmo algarismo não pode se repetir consecutivamente).
 - b) Nenhum par de algarismos pode se repetir ao longo da seqüência.

OBS: Uma seqüência é completa se não for mais possível continuá-la obedecendo as condições (a) e (b) acima.

Exemplos:

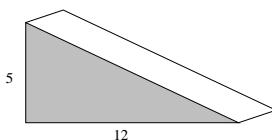
12313... é o início de uma seqüência possível.

123 22... não pode.

12 3 12... não pode.

Nível 2

1. $2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \dots + 2^{52}$ é múltiplo de 10? Explique sua resposta.
2. Se $x + y = 2002$, qual o maior valor que pode assumir o produto $x \cdot y$? Explique.
3. Uma rampa como a figura abaixo é recoberta com um carpete. Se no lugar da rampa fizermos 4 degraus, o mesmo carpete poderia ser reaproveitado, cobrindo totalmente a escada formada? Sobraria ou faltaria carpete? Qual o efeito que um aumento do número de degraus teria na quantidade de carpete necessário para cubri-los?



4. Quantas seqüências completas, e qual o maior tamanho de seqüência, se pode formar com os algarismos 1, 2 e 3 de modo que:
 - a) Não apareça ...11..., ...22... ou ...33... (um mesmo algarismo não pode se repetir consecutivamente).
 - b) Nenhum par de algarismos podese repetir ao longo da seqüência.

OBS: Uma seqüência é completa se não for mais possível continuá-la obedecendo as condições (a) e (b) acima.

Exemplos:

12313... é o início de uma seqüência possível.

123 22... não pode.

12 3 12... não pode.

5. Um pai deposita na conta do filho uma mesada de R\$ 50,00 em 1º de janeiro. O filho gasta metade e guarda na conta a outra metade. Em 1º de fevereiro, mais R\$ 50,00 são depositados, e o filho gasta metade do total que tinha na conta e guarda a metade. Prosseguindo assim todo mês, quanto dinheiro ficará na conta do filho no dia 31 de dezembro deste mesmo ano?

Você Sabia? Que se um calculista se dispusesse a efetuar o produto dos números naturais $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots$ até chegar a 100.000, o produto obtido teria nada menos de 456.572 algarismos?

Nível 3

1. Sejam \underline{a} e \underline{n} números inteiros positivos, e seja

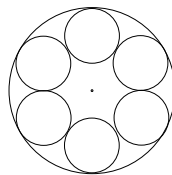
$$x = 2^{a+1} + 2^{a+2} + \dots + 2^{a+4n}.$$

Mostre que x é múltiplo de 10.

2. Um retângulo tem dimensões \underline{a} e \underline{b} . É sempre possível construir um quadrado com um vértice em uma das diagonais, e os outros três vértices sobre três lados distintos do retângulo, de modo que nenhum vértice do quadrado coincida com qualquer vértice do retângulo? Caso seja possível, calcule o comprimento do lado do quadrado em função de \underline{a} e \underline{b} .

3. Prove que $3^{200} - 2^{200} - 3^{199} - 2^{199}$ é múltiplo de 6.

4. Uma circunferência tem raio R . São construídas \underline{n} circunferências iguais, tangentes interiormente à circunferência de raio R , e tangentes entre si, de modo que a primeira e a n -ésima também se tangenciam (veja exemplo na figura ao lado, onde $n=6$). Calcule o raio destas circunferências em função de R e de n .



5. Qual o tamanho da maior seqüência que se pode formar com n símbolos distintos, a_1, a_2, \dots, a_n , de modo que:

- a) Nenhum símbolo se repita consecutivamente.
- b) Nenhum par de símbolos se repita ao longo da seqüência.

Indique como construir uma seqüência daquele tamanho.

Exemplos:

$a_1 a_2 a_1 a_3 a_2 a_4 \dots$ é o início de uma seqüência possível.

$a_1 a_2 \underline{a_3 a_3} \dots$ não pode.

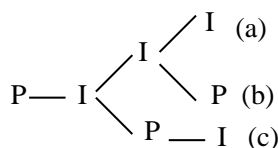
$\underline{a_1 a_2} a_3 \underline{a_1 a_2} \dots$ não pode.

Soluções

Nível 1

1. São 5 algarismos pares: 0, 2, 4, 6 e 8. São também 5 algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7 e 9. Há quatro possibilidades para um número começar (casa da unidade do milhar) com um algarismo par (não pode começar com o zero). Para um segundo algarismo par nesse número há ainda quatro possibilidades (considera-se agora o zero e desconsidere o primeiro algarismo par). Para um número começando com algarismo ímpar é quase o mesmo, exceto pelo fato que ele pode começar com qualquer um dos 5 algarismos ímpares. Temos então as árvores: (P = Par; I=Ímpar).

Começando com par:



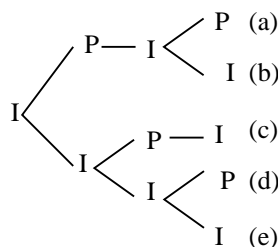
$$(a) 4 \times 5 \times 4 \times 3 = 240$$

$$(b) 4 \times 5 \times 4 \times 4 = 320$$

$$(c) 4 \times 5 \times 4 \times 4 = 320$$

$$(a) + (b) + (c) = 880$$

Começando com ímpar:



$$(a) 5 \times 5 \times 4 \times 4 = 400$$

$$(b) 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$$

- (c) $5 \times 4 \times 5 \times 3 = 300$
 (d) $5 \times 4 \times 3 \times 5 = 300$
 (e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$
 (a)+(b)+(c)+(d)+(e) = 1420

Total: $1420 + 880 = 2300$.

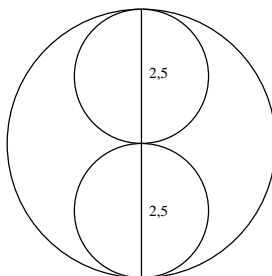
Obs: Lembrar que o número deve ter todos os algarismos distintos.

2. A resposta é não. Basta tomar um exemplo: Sejam 0, 0 e 6 estes números.

$$\text{Então: } \frac{0+0+6}{3} \neq \frac{\frac{0+0}{2}+6}{2} = 3.$$

$$\text{Obs: } \frac{a+b+c}{3} = \frac{\frac{a+b}{2}+c}{2} \Leftrightarrow a+b=2c.$$

3. Note que: $2^2 = 4$ e $2^4 = 16 \Rightarrow 2^2 + 2^4 = 20$. E, $2^6 = 64$ e $2^8 = 256 \Rightarrow 2^6 + 2^8 = 320$. Assim, cada soma $2^2 + 2^4$, $2^6 + 2^8$, $2^{10} + 2^{12}$ etc, termina em zero. Note que o expoente da segunda parcela de cada uma dessas somas é múltiplo de 4: 4, 8, 12 etc. Como $52 = 4 \times 13$, então $2^{50} + 2^{52}$ termina em zero. No final somamos todas essas somas (são 13) que terminam em zero, e o resultado terminará em zero e, portanto, múltiplo de 10.
4. Ele irá bombear menos água com os 2 canos de 25mm (2,5cm) de diâmetro. Basta olhar para a figura:



5. Vamos fazer uma árvore começando com um dos algarismos (por exemplo 1) e contar todas as seqüências possíveis obedecendo (a), (b), (c), e depois multiplicamos por 3:

Nível 2

1. Ver resposta da questão 3 do Nível 1.
2. Suponha $x \geq y$. Escrevemos $x = a + 1001$ e $y = 1001 - a$. Teremos

$$x.y = (1001 + a)(1001 - a) = (1001)^2 - a^2$$

e este resultado é sempre menor do que $(1001)^2$, exceto no caso em que $a = 0$, ou seja, quando $x = y = 1001$.

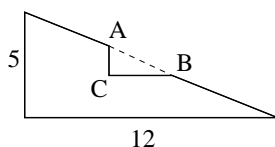
Portanto o maior valor é:

$$x.y = (1001)^2.$$

Outro raciocínio: Pense que $x + y = 2002$ é o semi-perímetro de um retângulo. Então $x.y$ será sua área.

Note que, partindo de $x = 1$ e $y = 2001$, conforme aumentarmos x e diminuirmos y correspondentemente, a área $x.y$ aumentará, exceto quando tivermos $x = y = 1001$, quando ela começará a diminuir.

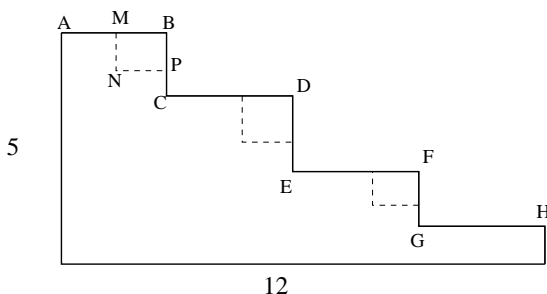
3. Vamos desenhar a escada com um degrau (em qualquer posição):



Note que $AC + BC > AB$ (qualquer lado de um triângulo é menor do que a soma dos outros dois). Assim, com apenas um degrau já necessitaríamos mais carpete (faltaria carpete). O mesmo ocorre com quatro degraus.

A segunda pergunta permite duas interpretações:

- a) Acrescentando degraus em uma “escada” onde há ainda trechos em rampa (ou seja, no caso em que degraus são colocados no lugar da rampa). Neste caso, pelo mesmo raciocínio acima, vamos necessitar mais carpete.
- b) Temos uma escada de fato (sem trechos em rampa) e queremos acrescentar degraus:



Neste caso, não se altera o comprimento do carpete, pois o trecho $AB + BC = AM + MN + NP + PC$. O total do comprimento do carpete é: $5+12=17$.

4. Vamos fazer uma árvore começando com um dos algoritmos (por exemplo 1) e contar todas as seqüências possíveis obedecendo (a), (b), (c), e depois multiplicamos por 3 (Ver solução do problema 5 do Nível 1):

Logo: $3 \times 8 = 24$. Portanto, são 24 seqüências possíveis.

O maior tamanho é 7 (seqüências de 7 algoritmos), atingidas em 6 das 8, no total: $3 \times 6 = 18$.

5. Em 31/01 o filho terá $50 \left(\frac{1}{2} \right)$ na conta.

Em 28/02 (ou 29/02) terá: $\left(50 \left(\frac{1}{2} \right) + 50 \right) \left(\frac{1}{2} \right) = 50 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \right)$

Em 31/03 terá: $\left(50 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \right) + 50 \right) \frac{1}{2} = 50 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \right)$

\vdots

Em 31/12 terá: $50 \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{12}} \right)}_S$.

Quanto é S ? Vejamos:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{12}} \quad \left(\times \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{13}}$$

$$S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{13}},$$

$$S \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{13}},$$

$$S \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{13}},$$

$$S = 1 - \frac{1}{2^{12}} = 1 - \frac{1}{4096} = \frac{4095}{4096}$$

Assim, o filho terá na conta $50 \cdot \frac{4095}{4096}$ reais (quase R\$ 50,00), ou seja, aproximadamente 49,98779297 reais.

Nível 3

1. $x = 2^a(2 + 2^2 + \dots + 2^{4n})$ Note que: $2 + 2^2 = 6$ e

$$2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24 \Rightarrow 6 + 24 = 30. \text{ Agora:}$$

$$(2^5 + 2^6) + (2^7 + 2^8) = (32 + 64) + (128 + 256) = 96 + 384 = 480$$

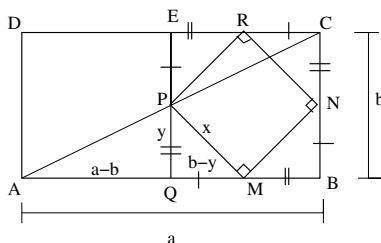
Assim, em grupo de quatro, teremos somas que terminam em zero. Note que a quarta parcela de cada soma é tal que o expoente é sempre múltiplo de 4. Assim, temos n grupos, cada um múltiplo de 10. Logo x é múltiplo de 10.

Outra forma:

$$x = 2^a \underbrace{(2 + 2^2 + \dots + 2^{4n})}_{PG} = 2^a \left(\frac{2 - 2 \cdot 2^{4n}}{1 - 2} \right) = 2^a \cdot 2 \cdot (2^{4n} - 1) = 2^{a+1} \cdot (16^n - 1)$$

Como 16^n termina em 6, $16^n - 1$ termina em 5. Logo, $16^n - 1$ é múltiplo de 5 e $2^{a+1} \cdot (16^n - 1)$ é múltiplo de 10.

2. Suponha que o problema tenha solução como na figura abaixo. Então, se traçarmos por P (o vértice do quadrado que está na diagonal do retângulo) a paralela aos lados \overline{BC} e \overline{AD} , teremos as congruências: $\triangle PQM \cong \triangle MBN \cong \triangle NCR \cong \triangle REP$ ($\hat{QPM} \doteq \hat{BMN} \doteq \hat{CNR} \doteq \hat{PRE}$ e $PM = MN = NR = RP$)



Segue-se que $PQ = MB = NC = RE = y$ e $EP = CR = BN = QM$, e portanto $QBCE$ é um quadrado. Daí $QM = b - y$.

Então de $\triangle PQA \sim \triangle CBA$:

$$\frac{y}{a-b} = \frac{b}{a} \Rightarrow ay = b(a-b) \Rightarrow y = \frac{b(a-b)}{a} \Rightarrow b-y = \frac{b^2}{a}$$

$$\triangle PQM : x^2 = y^2 + (b - y)^2 \Rightarrow x^2 = y^2 + y^2 - 2by + b^2 \Rightarrow x^2 = 2y(y - b) + b^2$$

$$\Rightarrow x^2 = b^2 - \frac{2b^3(a - b)}{a^2} \Rightarrow x = \sqrt{b^2 - \frac{2b^3(a - b)}{a^2}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - 2ab + 2b^2} \Rightarrow x = \frac{b}{a} \sqrt{(a - b)^2 + b^2}.$$

Se $a = b$ então o quadrado coincidiria com o próprio retângulo (que seria um quadrado), e portanto, neste caso, não é possível.

$$3. \quad 3^{200} - 2^{200} - 3^{199} - 2^{199} = 3^{200} - 3^{199} - (2^{200} + 2^{199}) = 3^{199}(3 - 1) - 2^{199}(2 + 1) = 3^{199} \cdot 2 - 2^{199} \cdot 3 = 6(3^{198} - 2^{198}).$$

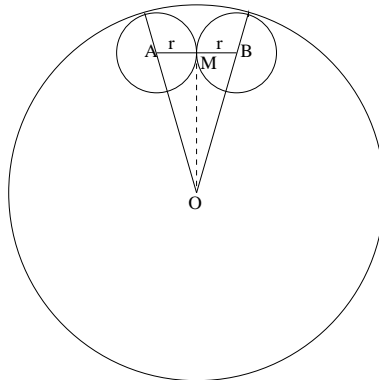
4. Seja r o raio dos círculos menores. Note que $\triangle OAB$ é isósceles e

$$\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n} = \frac{360^\circ}{n}. \text{ Como } AM = BM, \text{ temos que } \triangle OMB \text{ é retângulo}$$

$$\text{em } M \text{ e } \widehat{MOB} = \frac{\pi}{n} = \frac{180^\circ}{n}. \text{ Assim, } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{BM}{OB} = \frac{r}{R - r}. \text{ Logo,}$$

$$r\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right) = R\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow r = \frac{R\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$



5. O primeiro termo da seqüência poderá aparecer no máximo n vezes nesta seqüência: $(n-1)$ vezes junto (à esquerda) de cada um dos outros $(n-1)$ termos e mais uma vez no final da seqüência. Todos os outros $(n-1)$ termos poderão então aparecer no máximo $(n-1)$ vezes (antes de cada um dos outros $n-1$ termos). Assim, o maior tamanho possível de seqüência será:

$$n + (n-1)(n-1) = n + n^2 - 2n + 1 = n^2 - n + 1$$

Vejamos que é possível construir uma seqüência assim:

$$\underbrace{(a_1 a_2 a_1 a_3 a_1 a_4 \dots a_1 a_n)}_{2(n-1)} \underbrace{(a_2 a_3 a_2 a_4 \dots a_2 a_n)}_{2(n-2)} \underbrace{(a_3 a_4 a_3 a_5 \dots a_3 a_n)}_{2(n-3)} \dots$$

$$\dots \underbrace{(a_{n-2} a_{n-1} a_{n-2} a_n)}_{2[n-(n-2)]} \underbrace{(a_{n-1} a_n)}_{2[n-(n-1)]} \underbrace{(a_1)}_1$$

O tamanho desta seqüência é:

$$2 \left[(n-1) + (n-2) + \dots + \underbrace{[n - (n-1)]}_1 \right] + 1 = 2 \cdot \frac{[1 + (n-1)](n-1)}{2} + 1$$

$$= n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1.$$

Premiados

(em ordem alfabética por nível e por tipo de medalha)

Nível 1

Ouro

- Tiago Madeira (Colégio Salesiano Itajaí)

Prata

- Danilo Nunes do Carmo (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Helena Albino de Souza (Colégio Catarinense)
- Gabriela Guimarães Gonçalves (Colégio dos Santos Anjos)

Bronze

- Guilherme Kawase Falk (Educandário Imaculada Conceição)
- Jéssica Pauli de Castro Bonson (Educandário Imaculada Conceição)
- Kelvin Muller Pinotti (Colégio Salesiano Itajaí)
- Leonardo Pinheiro Samarão (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Paula do Vale Pereira (Educandário Imaculada Conceição)
- Rebeca Kurihara e Silva (E.B.M. Beatriz de Souza Britto)
- Vinicius da Silveira Segalin (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Vitor Cesar Kanitz (E.M. Erwin Prade)

Menção Honrosa

- Amanda Cristhie Trümmer da Silva (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Arthur Otto Krause (Centro de Educação Cantinho Feliz)
- Fábio de Oliveira Tabalipa (Colégio Dom Jaime Câmara)

- Luan Ramos Pereira (Colégio Servos de Maria)
- Mariane Maísa Lembeck (E.M. Padre Martinho Stein)
- Rafael Lorenzetti (Colégio Santo Antônio)
- Vanessa Fischer dos Santos (Colégio Santo Antônio)

Nível 2

Ouro

- Guilherme Claudino (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Guilherme Rohden Echelmeier (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Hanna Kurihara e Silva (E.B.M. Beatriz de Souza Britto)
- Márcio Lucas Maes Junior (Educandário Imaculada Conceição)
- Vicente Matheus Moreira Zuffo (Colégio Superação)

Prata

- Bárbara Carolina Dressel (Colégio dos Santos Anjos)
- Bruno Bernado Teixeira (Colégio Carrossel)
- Carolina Faller Moura (Colégio Dom Bosco)
- Fabíola Sara Stofela Sarolli (Colégio Dom Bosco)
- Filippe Frigo Furtado (Colégio Centro Educacional Visão)
- Greice Berkenbrock (Colégio Santo Antônio)
- Heloisa Pamplona Cunha (Colégio Dom Bosco)
- Ismael Alberto Schonhorst (Colégio Dom Jaime Câmara)
- José Artur Silveira Teixeira (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Paola Chagas Pereira (Colégio Coração de Jesus)

- Roberta Muriel Longo Roepke (E.M. Erwin Prade)

Bronze

- Elisa Faoro Schwinden (Colégio Catarinense)
- José Roberto Cordeiro (Colégio Catarinense)
- Ivo Ferreira da Silva Minikowski (Colégio Salesiano Itajaí)
- Jefferson Isberner de Santana (E.M. Erwin Prade)
- Jullian Hermann Creutzberg (Instituto Maria Auxiliadora)
- Laís Lúcia Frey (Centro Educacional Fraiburgo)
- Leonardo Silva Alves (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Natan Vinícius Zeferino (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Haifang Nehls (Colégio Santo Antônio)
- Simoni Claudiano Semptikowski (Instituto Maria Auxiliadora)
- Vinicius Stramosk (Colégio Dom Bosco)

Menção Honrosa

- Arisa Ribas Cardoso (Centro Educacional Fraiburgo)
- Giovanni Duarte Raitz (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Giovanni Triches (Instituto Maria Auxiliadora)
- Helen Germann Patricio (Colégio Murialdo)
- Lais Simon Olivo (Colégio Servos de Maria)
- Letícia Ferreira Siegel (Centro Educacional Roda Pião)
- Lorena Schmitt Müller (Centro Educacional Estrela Guia)
- Luciano Zelesio Adriano (E.E.F. Prof^a Marcília de Oliveira)

- Márcio Luís Nunes da Silva Júnior (Colégio Santo Antônio)
- Mônica Kuskowski (Instituto Maria Auxiliadora)
- Nelisa Helena Rocha (Colégio Catarinense)
- Ricardo Lucio Alves (E.E.F. Prof^a Marcília de Oliveira)
- Thalisson Marroni Fernandes (Centro Educacional Roda Pião)
- Vinícius Gorges (E.E.B. Tenente Alselmo José Hess)
- Vinícius Ribeiro Niedzwiecki (Colégio Coração de Jesus)

Nível 3

Ouro

- Felipe Paupitz Schlichting (Colégio Coração de Jesus)

Prata

- Bruno Henrique de Abreu (Colégio Catarinense)
- Guilherme Sada Ramos (Colégio Coração de Jesus)
- Ricardo Bese Hillesheim (Escola Elisa Andreoli)

Bronze

- Alan Schmitt Mafra (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Diego Machado Vieira (Colégio Energia - Florianópolis)
- Diogo Alexandre Nascimento (Colégio São Francisco)
- Gabriel de Freitas Camacho (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Geyson Brustolin (Colégio Centro Educacional Visão)
- Guilherme de Calazans Chevarria (Colégio Energia - Florianópolis)
- Iaçanã Kammers Andrade (Centro Federal de Educação Tecnológica SC)

- Lucas Lolli Savi (Colégio Energia - Florianópolis)

Menção Honrosa

- André Brombini da Silva (E.E.B. João Colin)
- André Luiz Tomelin (Colégio Catarinense)
- Bruno Leonardo Schneider (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Otavio May (Colégio dos Santos Anjos)
- Roberto Ehlert (Centro Federal de Educação Tecnológica - Uned Jaraguá)

Escolas Participantes

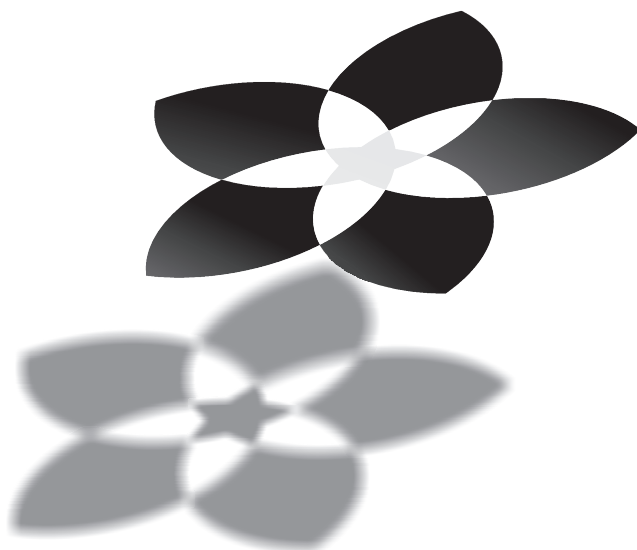
1. Centro de Educação Cantinho Feliz (Timbó)
2. Centro Educacional Estrela Guia (Balneário Camboriú)
3. Centro Educacional Energia (Criciúma)
4. Centro Educacional Fraiburgo (Fraiburgo)
5. Centro Educacional Integrado Jaraguense (Jaraguá do Sul)
6. Centro Educacional Machado de Assis (Joinville)
7. Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis)
8. Centro Educacional Roda Pião (Palhoça)
9. Centro Federal de Educação Tecnológica - Uned Jaraguá (Jaraguá do Sul)
10. Centro Federal de Educ. Tecnológica de Santa Catarina (Florianópolis)
11. Colégio Alpha Objetivo (São José)
12. Colégio de Aplicação da UFSC (Florianópolis)
13. Colégio de Aplicação da UNIVALI (Itajaí)
14. Colégio Bom Jesus (Palhoça)
15. Colégio Camboriú (Balneário Camboriú)
16. Colégio Carrossel (Palhoça)
17. Colégio Catarinense (Florianópolis)
18. Colégio Cenecista Antônio Carlos (Antônio Carlos)
19. Colégio Centro Educacional Visão (São José)
20. Colégio Coração de Jesus (Florianópolis)
21. Colégio Decisão (Florianópolis)
22. Colégio Dehon - UNISUL (Araranguá)

23. Colégio Dom Bosco (Rio do Sul)
24. Colégio Dom Jaime Câmara (São José)
25. Colégio dos Santos Anjos (Joinville)
26. Colégio Energia (Araranguá)
27. Colégio Energia (Florianópolis)
28. Colégio Estadual Julia Miranda de Souza (Navegantes)
29. Colégio Geração (Florianópolis)
30. Colégio Margirus (Balneário Camboriú)
31. Colégio Marista (Criciúma)
32. Colégio Murialdo (Araranguá)
33. Colégio da Polícia Militar Feliciano Nunes Pires (Florianópolis)
34. Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí)
35. Colégio Santo Antônio (Joinville)
36. Colégio São Bento (Criciúma)
37. Colégio São Francisco (Gaspar)
38. Colégio São José (Itajaí)
39. Colégio Servos de Maria (Turvo)
40. Colégio Sigma (Lages)
41. Colégio Super Ativo (Joaçaba)
42. Colégio Superação (Videira)
43. Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis)
44. Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul (Rio do Sul)
45. Escola Agrotécnica Federal de Sombrio (Santa Rosa do Sul)

46. E.B. Almirante Carvalhal (Florianópolis)
47. E.B.M. Beatriz de Souza Britto (Florianópolis)
48. E.B.M. Osvaldo dos Reis (Itapema)
49. Escola Elisa Andreoli (São José)
50. E.E.B. Adolfo José Martine (Bom Jardim da Serra)
51. E.E.B. Barão de Antonina (Mafra)
52. E.E.B. Catulo da Paixão Cearense (Sombrio)
53. E.E.B. Irmã Maria Tereza (Palhoça)
54. E.E.B. João Colin (Joinville)
55. E.E.B. João Colodel (Turvo)
56. E.E.B. Jorge Schutz (Turvo)
57. E.E.B. Miguel Couto (Schroeder)
58. E.E.B. Pedro Américo (Agrolândia)
59. E.E.B. Prof^o José Rodrigues Lopes (Garopaba)
60. E.E.B. Prof^a Eloísa Maria Prazeres de Faria (Biguaçu)
61. E.E.B. Rudolfo Luzina (Nova Erechim)
62. E.E.B. São João (Agrolândia)
63. E.E.B. Tenente Alselmo José Hess (Luís Alves)
64. E.E.B. Vereador Guilherme Zuege (Joinville)
65. E.E.B. Vidal Ramos Júnior (Lages)
66. E.E.B. Presidente Juscelino Kubitschek (São José)
67. E.E.E.B. João Gaya (Luís Alves)
68. E.E.F. Prof^a Marcília de Oliveira (São José)

69. E.I.E.B. Cacique Vannhkre (Ipuacu)
70. E.M.E.F. Maria Nilda Salai Stähelin (Jaraguá do Sul)
71. E.M.E.F. Rodolpho Dornbusch (Jaraguá do Sul)
72. E.M. Erwin Prade (Timbó)
73. E.M. Governador Ivo Silveira (Balneário Camboriú)
74. E.M. Maurício Germer (Timbó)
75. E.M. Padre Martinho Stein (Timbó)
76. E.M. Prof^a Karin Barkemeyer (Joinville)
77. Escola Normal e Ginásio Madre Tereza Michel (Criciúma)
78. Escola Prefeito Avellino Müller (Biguaçu)
79. Escola Prof^o Leopoldo Hanof (Orleans)
80. Escola Prof^a Virgínia da Silva Gonçalves (Monte Carlo)
81. Instituto Estadual de Educação (Florianópolis)
82. Instituto Maria Auxiliadora (Rio do Sul)

Você Sabia? Escolha um número natural maior do que 1 e calcule a soma dos quadrados dos seus algarismos. Pegue o número encontrado e repita a operação, calculando a soma dos quadrados dos seus algarismos. Repetindo esse processo sucessivamente, quando a sequência calculada termina em 1, dizemos que o número submetido ao processo é um número “feliz”, caso contrário, ele é chamado de número “triste”. Por exemplo, pode-se verificar que o número 4.599 é feliz fazendo as seguintes contas:
 $4^2 + 5^2 + 9^2 + 9^2 = 203$; $2^2 + 0^2 + 3^2 = 13$; $1^2 + 3^2 = 10$; $1^2 + 0^2 = 1$.



VI ORM (2003)

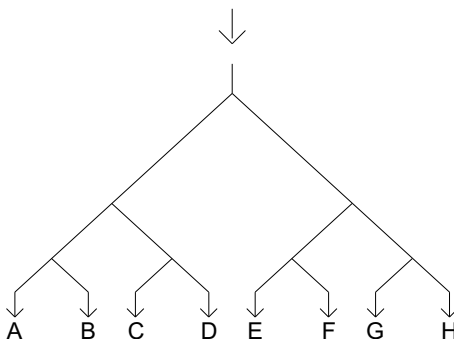
Problemas

Nível 1

1. Um grupo de 120 estudantes vai a um parque de diversões. $\frac{7}{10}$ deles andam na roda gigante; $\frac{3}{4}$ descem no tobogã; $\frac{4}{5}$ vão à montanha russa e $\frac{17}{20}$ viajam no trem fantasma.

Quantos estudantes, no mínimo, vão a todos os brinquedos?

2. Bolas são colocadas sucessivamente num caminho inclinado com bifurcações como mostra o desenho. Em cada bifurcação há uma chave que direciona a bola para direita ou para a esquerda. Assim que cada bola passa por uma bifurcação, a chave nesta bifurcação muda de posição (se a bola passou para a direita, a próxima bola passará para a esquerda). Inicialmente, todas as chaves estão posicionadas de modo a direcionar as bolas para a esquerda. Por exemplo: a 1ª bola cairá na posição A e a 2ª bola cairá na posição E. Em que posição cairá a 388ª bola?



3. Uma pessoa nasceu em uma data tal que o dia, mês e o ano de nascimento são números primos e cuja soma é igual a 2003. Sabe-se também que o número do dia é menor que o número do mês e que esta pessoa não fez ainda aniversário neste ano. Qual a data de nascimento desta pessoa?

4. Pode-se alterar a maneira de escrever um número de três formas diferentes:
- 1^a) Refletir verticalmente
 - 2^a) Refletir horizontalmente
 - 3^a) Girar meia volta

Por exemplo, o número 1689 se transforma em:

1986, na 1^a forma

9861, na 2^a forma

6891, na 3^a forma

Quais são os números de quatro algarismos que não se modificam em nenhuma destas alterações?

Observação: Os números 11 e 88 mantêm a sua forma em qualquer uma das três alterações.

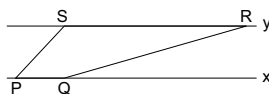
5. Felicidade é uma pequena cidade num país distante onde não há gatos abandonados. Cada casa da cidade tem o mesmo número de gatos. Sabe-se que existem pelo menos duas casas na cidade e, em cada casa, há pelo menos dois gatos.

O número total de gatos da cidade está entre 150 e 200.

Qual o número de casas na cidade e quantos gatos há em cada casa, se exigirmos que o número total de gatos da cidade é tal que há uma única solução para o número de casas e de gatos em cada casa?

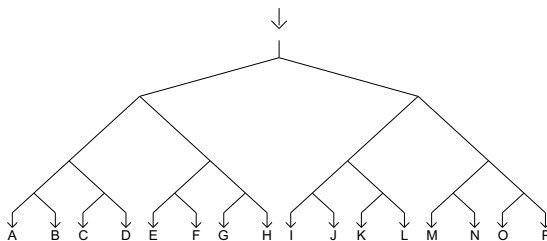
Nível 2

1. Considere duas retas paralelas x e y fixas e um segmento de reta \overline{AB} . Seja C um ponto qualquer entre A e B . Se $PQRS$ é um quadrilátero tal que \overline{PQ} está na reta x e tem o mesmo comprimento de \overline{AC} , e \overline{RS} está na reta y e tem o mesmo comprimento de \overline{CB} , mostre que a área de $PQRS$ não depende da posição do ponto C no segmento \overline{AB} e nem da posição dos lados \overline{PQ} e \overline{RS} nas retas x e y respectivamente.



2. Bolas são colocadas sucessivamente num caminho inclinado com bifurcações como mostra o desenho.

Em cada bifurcação há uma chave que direciona a bola para direita ou para a esquerda. Assim que cada bola passa por uma bifurcação, a chave nesta bifurcação muda de posição (se a bola passou para a direita, a próxima bola passará para a esquerda). Inicialmente, todas as chaves estão posicionadas de modo a direcionar as bolas para a esquerda. Por exemplo: a 1ª bola cairá na posição A e a 2ª bola cairá na posição I. Em que posição cairá a 682ª bola?



3. Considere a seqüência de números em que cada termo “descreve” o termo anterior: o 1º termo é 4, o 2º é 14 (ou seja, lendo o 1º termo da seqüência dizemos “um (algarismo) quatro”), o 3º termo é 1114 (um *um* e um *quatro*), o 4º termo será 3114 (três *uns* e um *quatro*), etc.

Calcule os três últimos algarismos (unidade, dezena e centena) da soma dos 2003 primeiros termos da seqüência.

4. Dois irmãos, de idades diferentes, nasceram em datas tais que o dia, o mês e o ano do nascimento são números primos e cuja soma, para cada um dos irmãos, é igual a 2003. Sabe-se também que, para os dois irmãos, o número do dia é menor que o número do mês.
Qual a data de nascimento de cada um deles?
5. No início do século vinte, uma comunidade estava sendo castigada por uma terrível seca. Os habitantes suplicaram a ajuda do seu santo padroeiro, acendendo-lhe uma vela especial em 27/09/1901. Esta vela tinha um metro de altura e demorava 5 anos para queimar completamente. Como a seca continuava, os fiéis acendiam uma nova vela todo dia 27/09. A partir de 1906, além de continuar a acender uma vela nova por ano, os fiéis também substituíam as velas que se acabavam. Em janeiro de 1913 finalmente vieram as chuvas. Com o fim da seca, os habitantes deixaram de acender uma nova vela por ano mas, em agradecimento ao santo padroeiro, continuaram a substituir as velas que se acabavam, todo dia 27 de setembro de cada ano. Qual será a soma dos comprimentos das velas acesas ao final de 27 de setembro de 2003?

Nível 3

1. Considere uma seqüência de números em que cada termo “descreve” o termo anterior: o 1º termo é 1, o 2º é 11 (ou seja, lendo o 1º termo da seqüência dizemos “um (algarismo) *um*”), o 3º termo é 21 (dois “*uns*”) etc.
 - a) Prove que não pode aparecer o algarismo 4 em nenhum termo da seqüência.
 - b) Pode aparecer “...333...” em algum termo da seqüência?

2. Sejam duas funções S e T definidas por $S(x) = -\frac{1}{x}$ e $T(x) = x + 1$. A composição de S e T , denotada por $S \circ T$, é definida como $(S \circ T)(x) = S(T(x))$. Calcule a expressão de $(S \circ T)^{2003}(x)$.

Observação:

$$(S \circ T)^1(x) = (S \circ T)(x)$$

$$(S \circ T)^{n+1}(x) = (S \circ T)(S \circ T)^n(x), \text{ para todo } n \geq 1$$

3. Considere um quadrado $ABCD$ com lado de comprimento a fixado. Desenha-se um outro quadrado $OPMN$, com vértice O no centro do quadrado $ABCD$, com lado de comprimento l .
 - a) Calcule a área da interseção dos dois quadrados, em função de a e l , no caso em que os lados \overline{ON} e \overline{OP} do quadrado $OPMN$ estão, respectivamente, sobre as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} do quadrado $ABCD$.
 - b) Considere agora o comprimento l um número positivo qualquer. Determine os valores possíveis de l (em função de a) para os quais a área da interseção dos dois quadrados não varia, conforme o quadrado $OPMN$ gira em torno do ponto O . Determine ainda o valor desta área em função de a e l .
4. Dois irmãos, de idades diferentes, nasceram em datas tais que o dia, o mês e o ano do nascimento são números primos e cuja soma, para cada um dos irmãos, é igual a 2003. Sabe-se também que, para os dois irmãos, o número do dia é menor que o número do mês.
Qual a data de nascimento de cada um deles?

5. O operário Jorge decide participar de um sistema de aposentadoria suplementar, oferecido pela firma Acme Anuidades Limitada. Todo ano Jorge depositará a quantia de R\$ 1.000,00 na sua conta na firma que investirá o montante e retornará um lucro de 2% ao ano para seu Jorge. Mas por seus serviços prestados, a Acme cobrará uma taxa de administração de 7% sobre o montante ao ano. O pagamento dos rendimentos dos depósitos e a cobrança da taxa de administração será feita uma vez por ano em 30 de dezembro.

Mostre que o saldo do seu Jorge na Acme nunca alcançará R\$ 20.000,00, independentemente do número de anos que contribua.

Soluções

Nível 1

1. $120 \times \frac{7}{10} = 84$ andam na roda gigante $\Rightarrow 120 - 84 = \underline{36}$ não andam na roda gigante.

$120 \times \frac{3}{4} = 90$ andam no tobogã $\Rightarrow 120 - 90 = \underline{30}$ não andam no tobogã.

$120 \times \frac{4}{5} = 96$ vão à montanha russa $\Rightarrow 120 - 96 = \underline{24}$ não vão à montanha russa.

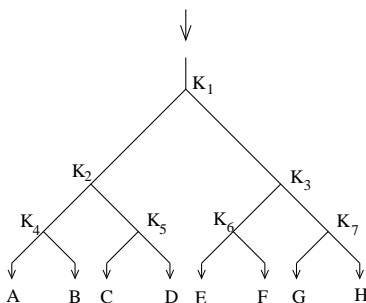
$120 \times \frac{17}{20} = 102$ viajam no trem fantasma $\Rightarrow 120 - 102 = \underline{18}$ não viajam no trem fantasma.

A situação extrema é aquela em que as crianças que não andaram em um determinado brinquedo andaram nos outros três. Ou seja, é a situação em que qualquer criança andou em pelo menos três brinquedos. Neste caso, não andaram em um brinquedo:

$$36 + 30 + 24 + 18 = 108 \text{ crianças}$$

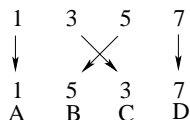
Restam portanto, $120 - 108 = \underline{12}$ crianças (no mínimo) que teriam andado em todos os brinquedos.

2. Considere as oito primeiras bolas.

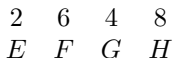


É fácil ver que as bolas de número ímpar cairão à esquerda da chave K_1 , e as pares à direita desta chave.

A chave K_2 distribuirá alternadamente os ímpares para a esquerda e direita, e as chaves K_4 e K_5 novamente o farão. Assim, a distribuição dos quatro primeiros ímpares será dada por:



Analogamente, com os pares teremos ao final:



Agora, a oitava bola terá virado as chaves K_1 , K_3 e K_7 para a esquerda. A bola 6 (a última a passar pela chave K_6) vira a chave K_6 para a esquerda. A bola 7 virou as chaves K_5 e K_2 para a esquerda e a bola 5 virou a chave K_4 para a esquerda. Note que as bolas citadas são as quatro últimas (entre 8). Assim, após a oitava bola passar, as chaves estão na mesma posição do início (todas para a esquerda). As próximas 8 bolas (9 a 16) se distribuirão igualmente: a 9ª em A ($9 = 1 + 8$), a 10ª em E ($10 = 2 + 8$) etc.

Portanto, a bola $388 = 8 \times 48 + 4$ cairá onde caiu a bola 4, ou seja em G.

3. Os meses primos são: 2, 3, 5, 7 e 11.

Como a pessoa não fez aniversário ainda neste ano, ela só pode ser do mês 11 (novembro - esta prova da ORM foi redigida em setembro). As possibilidades de dia-mês-ano são então: (todas com soma 2003)

$2/11/1990 \Rightarrow$ mas 1990 é par e não primo.

$3/11/1989 \Rightarrow$ mas 1989 é múltiplo de 9 ($1 + 9 + 8 + 9 = 27$)

$5/11/1987 \Rightarrow$ é a única possível resposta

$7/11/1985 \Rightarrow$ mas 1985 é múltiplo de 5.

Resposta: a pessoa nasceu em 5 de novembro de 1987.

OBS: Como esta é a única possibilidade de resposta, não é necessário verificar que 1987 é primo.

4. Os únicos algarismos que não se modificam em qualquer uma das formas são: 1 (um- com a grafia dada), 0 e 8.

Qualquer número com estes algarismos não se modificará na 1ª alteração. Porém, na 2ª e na 3ª, para um número de quatro algarismos, serão trocados os algarismos da unidade de milhar e unidade, e os algarismos da centena e dezena. Portanto, para as 2ª e 3ª formas de alterações, estes algarismos devem ser os mesmos (note que nenhum destes algarismos se transforma em outro). Então as possibilidades são:

DEZENA DE MILHAR	: 1 e 8 (0 não pode ser).
CENTENA	: 0, 1 e 8.
DEZENA	: igual a centena.
UNIDADE	: igual a dezena de milhar.

Portanto, os números são:

1	0	0	1
1	1	1	1
1	8	8	1
8	0	0	8
8	1	1	8
8	8	8	8

5. Se o total de gatos na cidade for um número composto (com mais de um fator primo) então haverá mais de uma possível solução para o problema. Por exemplo, se houvesse 160 gatos na cidade, poderíamos ter 20 casas, cada uma com 8 gatos, ou 8 casas, cada uma com 20 gatos.

Portanto, a única possibilidade (considerando que há mais de uma casa na cidade, e que em cada casa há mais de um gato), é que o número total de gatos da cidade seja o quadrado de um número primo.

O único quadrado de primo entre 150 e 200 é $13^2 = 169$. (Note que $11^2 = 121$ e $17^2 = 289$).

Portanto, há 13 casas na cidade, cada uma com 13 gatos (que os supersticiosos esperam que ainda por cima não sejam pretos....).

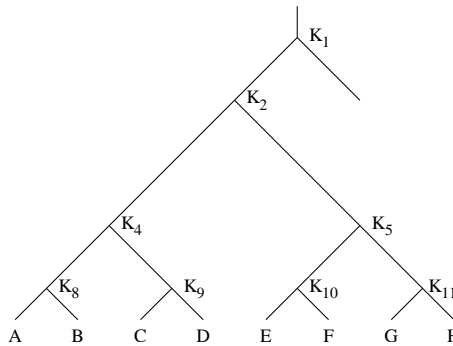
Nível 2

1. Seja h a distância entre as paralelas (isto é, o comprimento do segmento perpendicular a estas retas com extremidades em cada uma delas). Considere o quadrilátero $PQRS$ e os triângulos $\triangle PQR$ e $\triangle PSR$. Tais triângulos têm altura h , se suas bases forem consideradas PQ e SR respectivamente. Então:

$$A_{PQRS} = A_{\triangle PQR} + A_{\triangle PSR} = \frac{PQ \cdot h}{2} + \frac{SR \cdot h}{2} = \frac{PQ + SR}{2} h.$$

Como $AC = PQ$ e $CB = SR$, temos que $PQ + SR = AC + CB = AB$. Portanto $A_{PQRS} = \frac{AB \cdot h}{2}$. Logo a área de $PQRS$ independe do ponto C de AB .

2. Considere as 16 primeiras bolas. É claro que as bolas ímpares cairão à esquerda da bifurcação K_1 , e as bolas pares cairão à direita de K_1 . A bifurcação K_2 redistribuirá as bolas ímpares alternadamente. Assim todas as ímpares chegarão na bifurcação K_2 e em seguida serão redistribuídas da seguinte maneira:



As bolas 1, 5, 9, 13 irão para a bifurcação K_4 e as bolas 3, 7, 11, 15 para a bifurcação K_5 . Seguindo o mesmo processo em K_4 as bolas serão redistribuídas entre as bifurcações K_8 e K_9 e em K_5 para K_{10} e K_{11} . Desta maneira teremos:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 9 & 5 & 13 & 3 & 11 & 7 & 15 \\ A & B & C & D & E & F & G & H \end{array}$$

Analogamente, as pares ficarão:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 10 & 6 & 14 & 4 & 12 & 8 & 16 \\ I & J & K & L & M & N & O & P \end{array}$$

Após a 16ª bola passar, todas as bolas estarão posicionadas para a esquerda, como no início. Assim, a 682ª bola: $682 = 16 \times 42 + 10$, ficará na posição da bola 10, ou seja, em *J*.

3. Os primeiros termos da sequência são:

$$\begin{array}{l} 1^\circ \dots 4 \\ 2^\circ \dots 14 \\ 3^\circ \dots 1114 \\ 4^\circ \dots 3114 \\ 5^\circ \dots 132114 \\ 6^\circ \dots 1113122114 \\ \vdots \end{array}$$

Note que, a partir do 3º termo (inclusive) os números terminam em 114, e sempre será assim pois para um final $\dots 114$ teremos $\dots \times 114$ (na verdade, a partir do 5º termo terminará em 2114). Portanto, somando do 3º ao 2003º termo (são 2001 números) teremos um final igual a 114 (pois $2001 \times 114 = 228114$). Somando este final aos dois primeiros termos teremos $\dots 114 + 14 + 4 = \dots 132$. Assim os algarismos são:

$$\begin{array}{ccc} \text{centena} & \text{dezena} & \text{unidade} \\ 1 & 3 & 2 \end{array}$$

4. Os meses primos são 2, 3, 5, 7 e 11, mas eliminamos o mês 2, pois nesse caso o dia teria que ser 1, que não é primo. Então as possibilidades são:

Mês 3	2/3/1998	o ano é par.
Mês 5	2/5/1996	o ano é par.
	3/5/1995	múltiplo de 5.
Mês 7	2/7/1994	o ano é par.
	3/7/1993	data possível.
	5/7/1991	data possível.
Mês 11	2/11/1990	o ano é par.
	3/11/1989	múltiplo de 9.
	5/11/1987	data possível.
	7/11/1985	múltiplo de 5.

Há 3 datas possíveis, mas $1991 = 11 \times 181$. Logo as datas são 5/11/1987 e 3/7/1993.

5. Vamos estabelecer que quando falarmos no ano x estaremos nos referindo à situação do dia 27/09, imediatamente após alguma vela acabar de se extinguir e imediatamente após acendermos uma nova vela (ou seja, digamos no final do dia 27/09, como foi feita a pergunta no problema). Assim, em 1901 temos uma vela de 1m de comprimento acesa. Em 1902, temos uma vela de $\frac{4}{5}$ m (a 1ª vela) mais uma de 1m acesas etc. Consideremos a situação em 1906, ou seja, com 6 velas acesas. Teremos os comprimentos:

1ª vela	1m	(substituída)
2ª vela	$\frac{1}{5}$ m	(acesa em 1902)
3ª vela	$\frac{2}{5}$ m	(acesa em 1903)
4ª vela	$\frac{3}{5}$ m	(acesa em 1904)
5ª vela	$\frac{4}{5}$ m	(acesa em 1905)
6ª vela	1m	(recém acesa)

A soma dos comprimentos das 5 primeiras velas é 3m, e esta situação não mudará daí em diante. Em 1907 teremos, da 1^a para a 5^a vela: $\frac{4}{5}$ m, 1m (substituída), $\frac{1}{5}$ m, $\frac{2}{5}$ m e $\frac{3}{5}$ m, totalizando 3m novamente. A situação das próximas 5 velas (da 6^a à 10^a) será a mesma, a partir de 1910. Assim, a partir deste ano, teremos sempre $3 + 3 = 6$ m de velas acesas para estas 10 primeiras velas. Em 1912 teremos um total de 12 velas acesas, e este será o total de velas sempre acesas daí em diante pois, a partir de 1913, não são acesas novas velas, apenas são substituídas as que se extinguem. Vamos então acompanhar a situação das velas 11 e 12:

$$1912: \quad \frac{4}{5} + 1 = 1\frac{4}{5}$$

$$1913: \quad \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = 1\frac{2}{5}$$

$$1914: \quad \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

$$1915: \quad \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$1916: \quad 1 + \frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}$$

$$1917: \quad \frac{4}{5} + 1 = 1\frac{4}{5}$$

Assim, de 5 em 5 anos a soma dos comprimentos das 2 velas se repete. De 1912 a 2003 temos: $2003 - 1912 = 91 = 5 \times 18 + 1$ anos. Portanto, em 2003, aquelas duas velas estarão na mesma situação que estavam em 1913, ou seja, $\left(1 + \frac{2}{5}\right)$ m. Assim, em 2003 (no final do dia 27/09/2003) teremos 12 velas acesas com um comprimento total de: $3 + 3 + \left(1 + \frac{2}{5}\right) = 7,4$ m.

Nível 3

1. Vejamos alguns termos da seqüência:

$1^{\circ} \dots 1$
 $2^{\circ} \dots 11$
 $3^{\circ} \dots 21$
 $4^{\circ} \dots 1211$
 $5^{\circ} \dots 111221$
 $6^{\circ} \dots 312211$
 \vdots

Já vemos que podem aparecer os algarismos 1, 2 e 3.

- (a) Se aparecesse o algarismo 4 em algum termo da seqüência então, no termo anterior deveríamos ter “4 algarismos 1”, ou “4 algarismos 2”, ou “4 algarismos 3” (suponha que esta seja a primeira vez que aparecesse 4). Analisaremos “4 algarismos 1”, ou seja $\dots 1111 \dots$. Que interpretação pode ser dada a isto?

As possibilidades, para o termo anterior a este último, seriam: “11 algarismos 1 e 1 algarismo x”, o que implica em um número crescente de algarismos 1 retrocedendo nos termos da seqüência; ou “111 algarismos 1” (pior ainda). Note que “1 algarismo 1 e 1 algarismo 1” não é permitido. O mesmo ocorreria com “4 algarismos 2” e “4 algarismos 3”. Logo, 4 não pode aparecer.

- (b) Não pode aparecer $\dots 333 \dots$ em um termo da seqüência pois, caso contrário, teríamos as possibilidades para o termo anterior: “33 algarismos 3” (piorando a situação em termos anteriores), ou “3 algarismos 3 e 3 algarismos x”, mas neste caso, o termo anterior teria $\dots 333 \dots$ novamente. Assim retrocedendo na seqüência, isso exigiria $\dots 333 \dots$ em todos os termos da seqüência.

2. Note que:

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)) = S(x+1) = -\frac{1}{x+1}$$

$$(S \circ T)^2(x) = (S \circ T)\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{1}{-\frac{1}{x+1} + 1} = -\frac{x+1}{x}$$

$$(S \circ T)^3(x) = (S \circ T) \left(-\frac{x+1}{x} \right) = -\frac{1}{-\frac{x+1}{x} + 1} = -\frac{x}{-1} = x.$$

Assim, $(S \circ T)^3 = I$ (identidade). Como $2003 = 667 \times 3 + 2$, então

$$(S \circ T)^{2003}(x) = (S \circ T)^2(x) = -\frac{x+1}{x}.$$

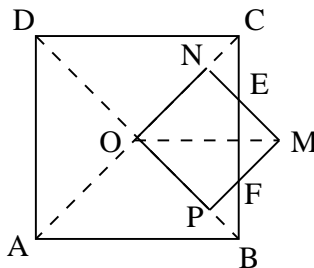
3. (a)

Vamos calcular a área do triângulo isósceles FME .

Note que como $\widehat{OME} = \widehat{OMF} = 45^\circ$, então $\widehat{FEM} = \widehat{EFM} = 45^\circ$. Além disso, $OM = l\sqrt{2}$ e $OG = \frac{a}{2}$. Ainda, $GM = GE = GF = l\sqrt{2} - \frac{a}{2}$.

Então

$$A_{\triangle FME} = \frac{EF \cdot GM}{2} = GF \cdot GM = \left(l\sqrt{2} - \frac{a}{2} \right)^2.$$



Assim:

$$\begin{aligned} A_{OPFEN} &= l^2 - \left(l\sqrt{2} - \frac{a}{2} \right)^2 = \left(l(1 - \sqrt{2}) + \frac{a}{2} \right) \left(l(1 + \sqrt{2}) - \frac{a}{2} \right) \\ &= a \cdot l\sqrt{2} - \frac{a^2}{4} - l^2. \end{aligned}$$

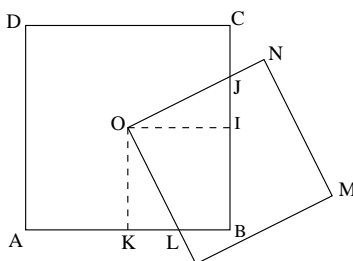
Observação: Note que se $l\sqrt{2} \leq \frac{a}{2}$ então a área será igual a l^2 (veja o item (b)), pois $A_{\triangle FME} = 0$.

(b)

Se $0 \leq l \leq \frac{a\sqrt{2}}{4}$, então a área da interseção é igual a l^2 .

Se $l \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$ então a área da interseção é constante e igual a $\frac{a^2}{4}$.

$$\triangle OJI \equiv \triangle OLK: \begin{cases} OI = OK \\ \widehat{OIJ} = \widehat{OLK} = 90^\circ \\ \widehat{JOI} = \widehat{LOK} \end{cases}$$



4. Ver solução do problema 4 do nível 2.
5. Podemos pensar em duas possibilidades (que o problema deixa em aberto), para o primeiro ano de rendimentos a taxa:
 - (a) Sobre o capital C ($C = 1.000$) é aplicado o lucro de 2%, e sobre o mesmo capital é aplicada a taxa de 7%. Teremos então um montante final de: $C(1 + 0,02 - 0,07) = 0,95C$.
 - (b) Sobre o capital C é aplicado o lucro de 2%, e sobre o montante resultante $(1,02C)$ é aplicada a taxa de 7%. Teremos então o montante final de:

$$1,02C - 0,07(1,02)C = (1,02)(0,93)C = \left(1 + \frac{2}{100}\right) \left(1 - \frac{7}{100}\right) C =$$

$$\left(1 - \frac{5}{100} - \frac{14}{10^4}\right) C < 0,95C.$$

Vamos então mostrar que, mesmo no caso (a), não se chegará a 20.000. No segundo ano teremos, após depositar C novamente:

$0,95(1 + 0,95)C$ e, somando-se mais C teremos no 3ºano na firma $C(1 + 0,95 + (0,95)^2)$.

Ora,

$$1 + 0,95 + (0,95)^2 + \dots < \frac{1}{1 - 0,95} = 20.$$

Logo, a quantia (saldo) nunca passará de $20C = 20.000$.

Premiados

(em ordem alfabética por nível e por tipo de medalha)

Nível 1

Ouro

- Lourival Tenfen Junior (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Renan Henrique Finder (Centro Educacional Menino Jesus)
- Vinícius Rios Fuck (Colégio Elisa Andreoli)

Prata

- Carlos Filipe Klahold (Colégio dos Santos Anjos)
- Daniel Slongo Gonzalez (Educandário Imaculada Conceição)
- Jéssica Pauli de Castro Bonson (Educandário Imaculada Conceição)
- José Carlos Medeiros (Colégio Santo Antônio)
- Leonardo de Bortoli (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Pedro Henrique Platt Bordin (Colégio Coração de Jesus)
- Philippi Farias Rachadel (Educandário Imaculada Conceição)
- Pietro José Bertuzzi (Colégio Elisa Andreoli)

Bronze

- André Mateus Netto Spillere (Colégio São Bento)
- Fernando Bordin Telles (Colégio Salesiano Itajaí)
- Gisele Simonetti (E.E.B. Orestes Guimarães)
- Guilherme Kawase Falk (Educandário Imaculada Conceição)
- Gustavo David Ludwig (Colégio Coração de Jesus)

- Leonardo Broering Jahn (Centro Educacional Roda Pião)
- Lucas Boppré Niehues (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Paula do Vale Pereira (Educandário Imaculada Conceição)
- Rhuan Ricardo Cattoni (E.E.B. Profº Júlio Scheidemantel)
- Sâmia Pauli Fiates (Colégio Coração de Jesus)

Menção Honrosa

- Acácio Antônio Andruczewicz (E.M. Maurício Germer)
- Carlos Eduardo Rosar Kós Lassance (Colégio Catarinense)
- Eduardo Recktenvald Graeff (Colégio Catarinense)
- Fábio Theiss (E.E.B. Profº Heriberto Joseph Müller)
- Felipe Moreira Guilayn Santos da Silva (Colégio Coração de Jesus)
- Juarez Angelo Piazza Sacenti (Colégio Carrossel)
- Juliana Tavares Nascimento (E.B.M. Beatriz de Souza Britto)
- Larissa Miranda Heinisch (Colégio Coração de Jesus)
- Larissa Orsi Rodrigues Pereira (Colégio Salesiano Itajaí)
- Larissa Vendruscolo (Centro Educacional de Fraiburgo)
- Leonardo Domingues Schlossmacher (Escola Barão do Rio Branco)
- Leonardo Sgnaolin (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Vitor Costa Fabris (Colégio São Bento)
- Yuji Ezaki (Colégio Nova Era - Unidade Norte)
- Yuri da Silva V. Boas (Colégio Catarinense)

Nível 2**Ouro**

- Daniel Linhares Bittencourt (Centro Educacional Menino Jesus)
- José Roberto Cordeiro (Colégio Catarinense)
- Leonardo Pinheiro Samarão (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Roberta Muriel Longo Roepke (E.M. Erwin Prade)

Prata

- Bianca Ana Coelho (Centro Educacional Roda Pião)
- Danilo Nunes do Carmo (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Filippe Frigo Furtado (Colégio Visão)
- Guilherme Zapelini Kurschus (Educandário Imaculada Conceição)
- Laura Nunes Ferreira Schuch (Colégio Catarinense)
- Sérgio Luiz do Nascimento Filho (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Thomas Eduardt Hafemann (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)
- Vitor Cesar Kanitz (E.M. Erwin Prade)

Bronze

- Adriano Reinaldo Timm (E.M. Padre Martinho Stein)
- Artur Vinícius Zimmermann Fontes (Colégio Coração de Jesus)
- Bruno Bernado Teixeira (Colégio Carrossel)
- Marcelo Cesa (Colégio Santo Antônio)
- Nelisa Helena Rocha (Colégio Catarinense)
- Ricardo Maurino Melo (Centro Educacional Roda Pião)

- Tiago Madeira (Colégio Salesiano Itajaí)
- Vanessa Fischer dos Santos (Colégio Santo Antônio)

Menção Honrosa

- Amanda Pereira Medeiros (Colégio Dehon)
- Bernardo Casimiro Fonseca de Oliveira (Educandário Imaculada Conceição)
- Dante Tomio Neto (Áster Centro Educacional)
- Dayse Dias (Centro Educacional Roda Pião)
- Elisa Faoro Schwinden (Colégio Catarinense)
- Giovani Duarte Raitz (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Ivo Ferreira da Silva Minikowski (Colégio Salesiano Itajaí)
- Jefferson Isberner de Santana (E.M. Erwin Prade)
- José Norberto Guiz Fernandes Corrêa (Colégio Elisa Andreoli)
- Lucas Brianez Fontoura (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Lucas Werner (Colégio Dehon - Araranguá)
- Maurício Comin Nazário (E.E.B.M. Aurora Péterle)
- Paola Chagas Pereira (Colégio Coração de Jesus)
- Ramon Squersato (Colégio Elisa Andreoli)
- Sasha Andrey Bernhardt (Escola Barão do Rio Branco)
- Vinícius da Silveira Segalin (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Vinícius Ribeiro Niedzwiecki (Colégio Coração de Jesus)

Nível 3**Ouro**

- Felipe Paupitz Schlichting (Colégio Coração de Jesus)
- Guilherme Rohden Echelmeier (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Leandro Augusto Lichtenfelz (Escola Barão do Rio Branco)
- Luiz Fernando Schrickte (Escola Barão do Rio Branco)

Prata

- Bruno Felipe Bauler (Escola Barão do Rio Branco)
- Bruno Leonardo Schneider (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Geyson Brustolin (Colégio Visão)
- José Artur Silveira Teixeira (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Leonardo Koller Sacht (Sociedade Educacional de Santa Catarina)
- Luckas Frigo Furtado (Colégio Visão)
- Philipp Albert Schroeder (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)

Bronze

- Alan Schmitt Mafra (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Carla Medina Ribeiro Protta (Centro Federal de Educação Tecnológica SC)
- Filipe Souza Régis (Colégio Elisa Andreoli)
- Gustavo Henrique Nihei (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Rafaél Bini (Colégio Dom Bosco)
- Thiago Roberto dos Santos (Escola Barão do Rio Branco)

Menção Honrosa

- André de Oliveira Traple (Colégio Salesiano Itajaí)
- Ari Silveira Anselmo Junior (Colégio Energia - Florianópolis)
- Bruna Ghizoni Vieira (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Déborah Silva Alves (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Evelini Plácido (Sociedade Educacional de Santa Catarina)
- Hanna Kurihara e Silva (Colégio Catarinense)
- Henrique Antônio Calbo Perdoncini (Sociedade Educacional de Santa Catarina)
- Laís Lúcia Frey (Centro Educacional Fraiburgo)
- Mariell Schappo (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Rafael Peralta Muniz Moreira (Colégio Catarinense)
- Thomas Schröder (Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul)
- Yuri Kaszubowski Lopes (Sociedade Educacional de Santa Catarina)

Escolas Participantes

1. Associação Educacional Manchester S/C Ltda (Joinville)
2. Associação Francisquense de Ensino (São Francisco do Sul)
3. Áster Centro Educacional (Balneário Camboriú)
4. Centro Educacional Fraiburgo (Fraiburgo)
5. Centro Educacional Bom Jesus (Palhoça)
6. Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis)
7. Centro Educacional Roda Pião (Palhoça)
8. Centro Educacional Timbó (Timbó)
9. Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina (Florianópolis)
10. Colégio Alpha Objetivo (São José)
11. Colégio Atlântico (Itapema)
12. Colégio Bom Jesus Santo Antônio (Blumenau)
13. Colégio Carrossel (Palhoça)
14. Colégio Catarinense (Florianópolis)
15. Colégio Cenecista “Antônio Carlos” (Antônio Carlos)
16. Colégio Cenecista José Elias Moreira Joinville
17. Colégio Coração de Jesus (Florianópolis)
18. Colégio da Univille (Joinville)
19. Colégio de Aplicação da UFSC (Florianópolis)
20. Colégio de Aplicação da UNIVALI (Itajaí)
21. Colégio de Navegantes Ferreira Piske (Navegantes)
22. Colégio Decisão (Florianópolis)

23. Colégio Dehon (Araranguá)
24. Colégio Dehon (Tubarão)
25. Colégio Dom Bosco (Rio do Sul)
26. Colégio Dom Jaime Câmara (São José)
27. Colégio dos Santos Anjos (Joinville)
28. Colégio Elisa Andreoli (São José)
29. Colégio Energia (Florianópolis)
30. Colégio Energia (Tubarão)
31. Colégio Energia - Unidade Palhoça (Palhoça)
32. Colégio Francisco José Ferreira Neto (São José)
33. Colégio João Gaya (Luís Alves)
34. Colégio La Salle (São Miguel do Oeste)
35. Colégio Marista (Criciúma)
36. Colégio Marista Frei Rogério (Joaçaba)
37. Colégio Marista São Francisco (Chapecó)
38. Colégio Marista São Luís (Jaraguá do Sul)
39. Colégio Nova Era Unidade Norte (Joinville)
40. Colégio Nova Era Unidade Sul (Joinville)
41. Colégio Padre Agostinho (São José)
42. Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí)
43. Colégio Santo Antônio (Joinville)
44. Colégio São Bento (Criciúma)
45. Colégio São José (Itajaí)

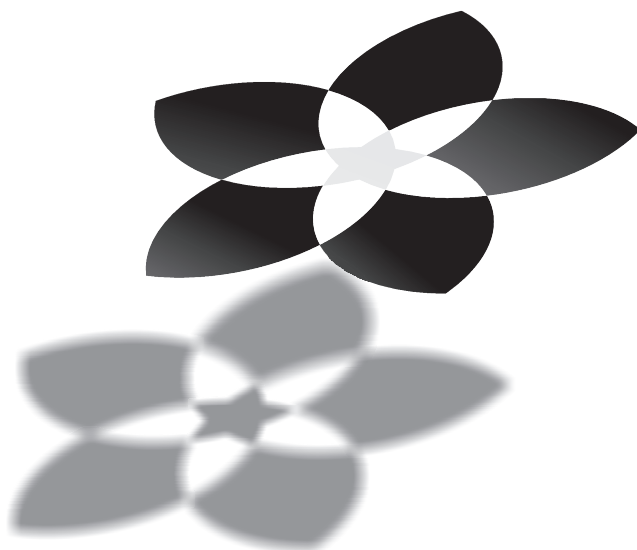
46. Colégio Superação (Videira)
47. Colégio Tradição (Florianópolis)
48. Colégio UNIVEST (Lages)
49. Colégio Visão (São José)
50. Conjunto Educacional Dr. Blumenau (Pomerode)
51. Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis)
52. Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul (Rio do Sul)
53. Escola Agrotécnica Federal de Sombrio (Santa Rosa do Sul)
54. Escola Barão do Rio Branco (Blumenau)
55. E.B. Almirante Carvalhal (Florianópolis)
56. E.B.M. Beatriz de Souza Britto (Florianópolis)
57. E.B.M. Profº Anísio Teixeira (Florianópolis)
58. E.E.B. Alberico Azevedo (São Miguel do Oeste)
59. E.E.B. Barão de Antonina (Mafra)
60. E.E.B. Campos Verdes (Jaguaruna)
61. E.E.B. Cônego Rodolfo Machado (Biguaçu)
62. E.E.B. Coronel Antônio Lehmkuhl (Águas Mornas)
63. E.E.B. Dayse Werner Salles (Florianópolis)
64. E.E.B. de Lages (Lages)
65. E.E.B. Dr. Tufi Dippe (Joinville)
66. E.E.B. Frei Policarpo (Gaspar)
67. E.E.B. Gonçalves Dias (Fraiburgo)
68. E.E.B. Henrique Fontes (Tubarão)

69. E.E.B. Irineu Borhausen (Florianópolis)
70. E.E.B. Irmã Maria Tereza (Palhoça)
71. E.E.B. João Colin (Joinville)
72. E.E.B. João Frassetto (Criciúma)
73. E.E.B. Marechal Bormann (Chapecó)
74. E.E.B. Monsenhor Gregório Locks (Brusque)
75. E.E.B.M. Aurora Péterle (Siderópolis)
76. E.E.B. Orestes Guimarães (São Bento do Sul)
77. E.E.B. Pedro Américo (Agrolândia)
78. E.E.B. Profº Benonívio João Martins (Palhoça)
79. E.E.B. Profº Carlos Zipperer Sobrinho (São Bento do Sul)
80. E.E.B. Profº Heleodoro Borges (Jaraguá do Sul)
81. E.E.B. Profº Heriberto Joseph Müller (Blumenau)
82. E.E.B. Profº José Rodrigues Lopes (Garopaba)
83. E.E.B. Profº Júlio Scheidemantel (Timbó)
84. E.E.B. Profº Juvenal Cardoso Zanella (Timbó)
85. E.E.B. Profº Laércio Caldeira de Andrada (São José)
86. E.E.B. Profª Adelina Regis (Videira)
87. E.E.B. Profª Julia Miranda de Souza (Navegantes)
88. E.E.B. Profª Justina da Conceição Silva (Imbituba)
89. E.E.B. Profª Valdete Inês Piazero Zinabros (Jaraguá do Sul)
90. E.E.B. Padre Anchienta (Florianópolis)
91. E.E.B. Presidente Juscelino Kubitschek (São José)

92. E.E.B. Presidente Roosevelt (Florianópolis)
93. E.E.B. Rosa Torres de Miranda (Florianópolis)
94. E.E.B. São João (Agrolândia)
95. E.E.B. São João Batista de La Salle (Concórdia)
96. E.E.B. Simão José Hess (Florianópolis)
97. E.E.B. Sólon Rosa (Curitibanos)
98. E.E.B. Tânia Mara F. e S. Locks (Biguaçu)
99. E.E.E.B. Germano Timm (Joinville)
100. E.E.E.M. Dr. Ruben Roberto Schmidein (Joinville)
101. E.E.F. Bairro das Nações (Timbó)
102. E.E.F. Prof^a Marcília de Oliveira (São José)
103. E.E. Osvaldo Aranha (Joinville)
104. E.E.M. Abdon Batista (Jaraguá do Sul)
105. E.E.M. Antônio Paschoal Apóstolo (Florianópolis)
106. E.E.M. Prof^o Roberto Grant (São Bento do Sul)
107. E.M.E.F. Maria Nilda Salai Stähelin (Jaraguá do Sul)
108. E.M. Erwin Prade (Timbó)
109. E.M. Maurício Germer (Timbó)
110. E.M. Padre Martinho Stein (Timbó)
111. E.M. Prof^a Karin Barkemeyer (Joinville)
112. Escola Sarapiquá Ltda (Florianópolis)
113. Instituto Estadual de Educação (Florianópolis)
114. Instituto Maria Auxiliadora (Rio do Sul)

115. Instituto São João Batista Viane (Lages)
116. Sociedade Educacional de Santa Catarina (Joinville)
117. Sociedade Educacional Verde Vale Ltda - Colégio Energia (Blumenau)

Você Sabia? $x, x + 2p, x + 4p, x + 6p, x + 8p$, etc, são denominados números congruentes (ou cõngruos), quando representados no mesmo ponto da circunferência trigonométrica.



Artigo

Pode-se calcular a área de uma luna da parábola usando a Matemática estudada no Ensino Médio?

William Glenn Whitley

Dep. de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina
CEP: 88.040-900, Florianópolis-SC

O cálculo da área de uma luna da parábola, também conhecido como o problema da quadratura da parábola, foi efetuado pela primeira vez por Arquimedes em torno do ano 240 a.C. e é baseado nas propriedades dos triângulos de Arquimedes. Antes de tentar resolver o problema, devemos deixar claros os significados dos termos usados.

A **parábola** é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa do mesmo plano, que não passa pelo ponto. O ponto fixo chama-se **foco** da parábola e a reta fixa, **diretriz** da parábola. Dados dois pontos distintos A e B da parábola, a **luna** delimitada por A e B é a região do plano delimitado pelo segmento \overline{AB} e pelo arco da parábola entre A e B . (veja a Figura 1)

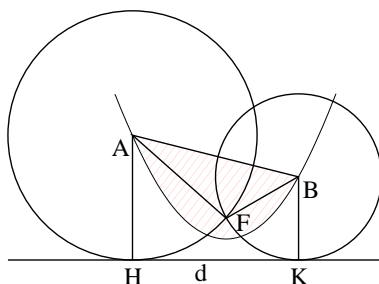


Figura 1

Nesta figura, a letra F indica o foco da parábola, a letra d indica a reta diretriz da parábola, A e B representam dois pontos da parábola e as letras H e K representam suas projeções perpendiculares sobre a reta d . Incluímos também desenhos de duas circunferências, uma com centro em A e passando por H e F , e a outra com centro em B e passando por F e K . Assim confirmamos que A e B são eqüidistantes de F e d , como era esperado. A região sombreada é a luna da parábola delimitada por A e B , e o cálculo da sua área é o objetivo do nosso estudo.

A maioria dos leitores atuais, ao ouvir a palavra área, pensa num número seguido de uma expressão de medida padrão, como *metros quadrados* ou *hectares*. Os gregos tinham outra idéia de área. Eles pensavam num quadrado que podia ser preenchido completamente por pedaços da região, sem sobrar pedaços. Por isso esses problemas têm o nome clássico de *problemas de quadratura*. Resolveremos o problema nos dois sentidos, inicialmente no sentido clássico, e, em seguida, no sentido moderno, com o uso de equações e coordenadas cartesianas.

A Solução Clássica

Consideremos a notação usada na Figura 1, em que P é uma parábola com foco F e reta diretriz d , A e B são pontos de P , e H e K são suas projeções perpendiculares em d .

Notamos que a parábola divide o plano em três partes: os pontos da própria parábola, os pontos *internos* da parábola (que são aqueles mais perto do foco do que da diretriz) e os pontos *externos* da parábola que são aqueles que estão mais longe do foco do que da diretriz. Se Q é um ponto da parábola e y é uma reta que passa por Q , então y é dito ser tangente a P no ponto Q se todos os pontos de y , salvo Q , são externos a P .

Um triângulo de Arquimedes é um triângulo cujos lados consistem de duas tangentes a uma parábola e uma corda unindo os pontos de tangência. Vamos considerar a corda que une os pontos de tangência da parábola como sendo a base do triângulo.

O primeiro passo da nossa solução consiste em construir um triângulo de Arquimedes cuja base é o segmento \overline{AB} . Para isto, teremos que incluir mais informação no nosso desenho. Traçamos os segmentos \overline{HF} e \overline{FK} e suas respectivas mediatrizes. Como a mediatriz do segmento \overline{HF} contém todos os pontos eqüidistantes de H e F , ela passa por A . Do mesmo modo, a mediatriz de \overline{KF} passa por B .

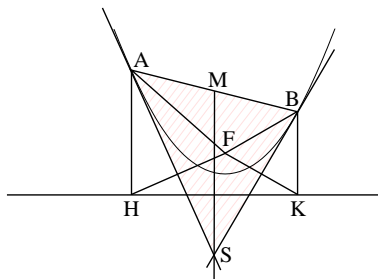


Figura 2

Afirmamos que as mediatrizes são tangentes à parábola e que não são paralelas. Portanto, elas se cruzam num ponto que chamaremos de S . Afirmamos também que a terceira mediatriz do triângulo $\triangle HFK$ passa pelo ponto S , é paralela ao eixo da parábola e determina um ponto M no segmento \overline{AB} , que é o ponto médio de \overline{AB} (veja a Figura 2). Nossa tarefa é justificar todas estas afirmações. Denote por r a mediatriz de \overline{HF} . Seja Q um ponto de r diferente de A . Se Q pertence a d , é óbvio que está mais longe de F do que de d . Limitamo-nos a considerar pontos fora de d . Notamos que a distância de Q a d é a distância de Q a T , sua projeção perpendicular em d . Como Q é diferente de A , T é diferente de H e $\triangle HQT$ é um triângulo retângulo com hipotenusa \overline{HQ} - o lado oposto ao ângulo reto em T . Deste modo a distância de F a Q é a mesma distância de Q a H , que por sua vez, é maior que de Q a T . Provamos que todos os pontos de r , salvo A , estão no exterior da parábola e que r é a tangente a P em A . Do mesmo modo, a mediatriz s de \overline{FK} é tangente a P em B .

Suponhamos por um momento que r e s sejam paralelas. Por construção de r , temos que r e a reta t determinada por \overline{HF} são perpendiculares. Como t é perpendicular a r e r é paralela a s , t é perpendicular a s . Por outro lado, s e a reta u determinada por K e F são perpendiculares. Deste modo, ou t e u são paralelas ou são iguais. Não são paralelas porque têm o ponto F em comum. Assim, devem ser iguais. Mas isto acarreta a igualdade de A e B , que não é verdade. Como permitir que r e s sejam paralelas nos leva a um absurdo, concluímos que r e s não são paralelas. Como não são paralelas, encontram-se num ponto S .

Denotamos por v a reta mediatriz do segmento \overline{HK} . Como t , u e v são distintas entre si, e todas perpendiculares a d , elas formam um feixe de três retas paralelas. Como v é a mediatriz de \overline{HK} , H e K estão em lados opostos de v , e por conseqüência, A e B estão em lados opostos de v . Deste modo v corta \overline{AB} num ponto M . Como v corta a transversal \overline{HK} em segmentos de comprimentos iguais, pelo teorema de Tales, cortará \overline{AB} em segmentos de comprimentos iguais. Concluimos que M é ponto médio de \overline{AB} e v é a mediana da base do triângulo de Arquimedes $\triangle ABS$.

Isto nos dá o seguinte teorema: *A mediana da base de um triângulo de Arquimedes é paralela ao eixo da parábola.*

No desenho, a mediatriz v de \overline{HK} , além de passar pelo ponto médio M de \overline{AB} , aparenta passar por S . Verificaremos que isto é verdade. Lembramos que S pertence tanto a r como a s ; assim as distâncias de H a S e de S a F são iguais, bem como as distâncias de S a F e de F a K . O resultado é que S é equidistante de H e K , e pertence a sua mediatriz v .

Na Figura 2, temos os pontos A e B em “lados opostos do foco F ” e, mais ainda, F está dentro da luna. As conclusões tiradas até o momento dependem desta configuração especial? É claro que não, porque, em momento algum, fizemos referência às posições relativas de A , B ou F .

Para facilitar os argumentos a seguir, oferecemos a Figura 3.

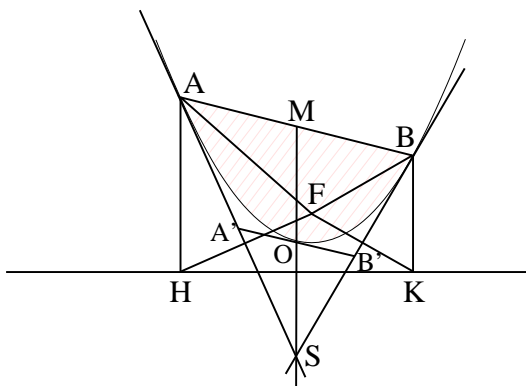


Figura 3

O segmento \overline{SM} determina na parábola um ponto O . A reta w , tangente à parábola no ponto O , não pode ser paralela à reta \overleftrightarrow{AS} . Se fosse, S e A estariam no mesmo lado de w , enquanto S e M estariam em lados opostos de w (O está entre M e S). Como resultado, A e M estariam em lados opostos de w , e w teria que cortar o segmento \overline{AM} num ponto do interior da parábola, coisa que uma reta tangente não pode fazer. Do mesmo modo, w não pode ser paralela a \overleftrightarrow{BS} . Assim w cortará \overline{SA} e \overline{SB} em pontos que chamaremos de A' e B' , respectivamente. Então, os triângulos $\triangle AA'O$ e $\triangle BB'O$ são também triângulos de Arquimedes. De acordo com o teorema acima, as medianas m_1 e m_2 das suas bases são também paralelas ao eixo e são, portanto, paralelas a SO .

Neste momento, temos as retas \overleftrightarrow{AH} , \overleftrightarrow{BK} , \overleftrightarrow{SO} , m_1 e m_2 . Por construção, as duas primeiras são perpendiculares a d e, portanto, paralelas ao eixo da parábola. Como as três últimas são paralelas ao eixo, todas as cinco retas são paralelas.

Notamos que as retas \overleftrightarrow{AS} , \overleftrightarrow{AO} e \overleftrightarrow{AB} são transversais a este feixe de paralelas. Primeiramente, lembramos que M é o ponto médio de \overline{AB} e, em seguida, que m_1 corta \overline{AO} no seu ponto médio. Usamos o teorema de Tales para concluir que m_1 divide \overline{AM} em dois segmentos de comprimentos iguais. E m_2 corta \overline{MB} em pedaços de comprimentos iguais, assim o comprimento de cada um destes segmentos é um quarto do comprimento de \overline{AB} .

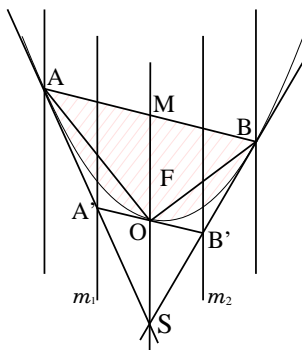


Figura 4

Podemos continuar a usar o teorema de Tales observando as transversais \overleftrightarrow{AS} e \overleftrightarrow{AB} e, em seguida, \overleftrightarrow{SB} e \overleftrightarrow{AB} e, por último, $\overleftrightarrow{A'B'}$ e \overleftrightarrow{AB} . Como \overleftrightarrow{AB} está dividido em quatro segmentos do mesmo comprimento, A' e B' são pontos médios de \overleftrightarrow{AS} e \overleftrightarrow{SB} , respectivamente, e O é o ponto médio de $\overleftrightarrow{A'B'}$.

Considere os triângulos $\triangle SAB$ e $\triangle SA'B'$. Acabamos de provar que o comprimento de \overleftrightarrow{SA} é o dobro do comprimento de $\overleftrightarrow{SA'}$ e que o comprimento de \overleftrightarrow{SB} é o dobro do comprimento de $\overleftrightarrow{SB'}$, observando que o ângulo $\angle S$ é comum aos dois triângulos e é o ângulo subentendido pelos pares de lados correspondentes. Deste modo, comprovamos que $\triangle SAB$ e $\triangle SA'B'$ são semelhantes e, por consequência, os ângulos $\angle SAB$ e $\angle SA'B'$ são congruentes, e o comprimento de \overleftrightarrow{AB} é o dobro do comprimento de $\overleftrightarrow{A'B'}$. Assim, $\overleftrightarrow{A'B'}$ é paralela a \overleftrightarrow{AB} e o ponto O é o ponto médio de \overleftrightarrow{SM} . O resultado de nossa investigação é o seguinte teorema.

TEOREMA DE ARQUIMEDES: *A mediana à base de um triângulo de Arquimedes é paralela ao eixo, a linha média paralela à base é uma tangente, e seu ponto de intersecção com a mediana da base é um ponto da parábola.*

Agora podemos determinar a área J da luna da parábola dentro do triângulo de Arquimedes $\triangle ASB$ construído.

A tangente $\overleftrightarrow{A'B'}$ e os segmentos \overleftrightarrow{OA} e \overleftrightarrow{OB} dividem o triângulo em quatro pedaços: 1. o *triângulo interno* $\triangle AOB$, dentro da luna; 2. o *triângulo externo* $\triangle A'SB'$, fora da luna; 3. e 4. dois *triângulos residuais* $\triangle AOA'$ e $\triangle BOB'$, que são triângulos de Arquimedes. Estudaremos como a área do triângulo $\triangle ASB$ está distribuída entre estes sub-triângulos.

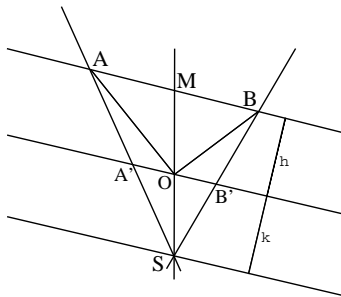


Figura 5

Na Figura 5, incluímos uma terceira paralela que passa por S . Como O é o ponto médio de \overline{SM} , as distâncias perpendiculares, h e k , entre as paralelas têm de ser iguais. Considere os sub-triângulos (de Arquimedes) $\Delta A'OA$ e $\Delta B'OB$. Suas bases $\overline{A'O}$ e $\overline{B'O}$, respectivamente, têm o mesmo comprimento e h é a altura de cada um destes triângulos. Assim, eles têm a mesma área, que denotaremos por x . O sub-triângulo externo $\Delta A'SB'$ tem a mesma altura k que os triângulos anteriores, mas sua base é o dobro da base de qualquer um deles. Assim, sua área será $2x$. Quando comparamos o sub-triângulo interno ΔAOB com o sub-triângulo externo $\Delta A'SB'$, notamos que têm as mesmas alturas, h e k , respectivamente, e que o comprimento da base \overline{AB} é o dobro do comprimento da base $\overline{A'B'}$. Deste modo, a área do sub-triângulo interno é o dobro, $4x$, do sub-triângulo externo.

Considere que Δ represente a área do triângulo de Arquimedes inicial, ΔASB . Em nossa discussão acima, notamos que esta área está subdividida como segue: dois sub-triângulos de Arquimedes, cada um com área x ; um sub-triângulo externo com área $2x$; e um sub-triângulo interno com área $4x$. Fica claro que x é um oitavo de Δ .

A *regra do jogo* é a seguinte: ficar com o(s) sub-triângulo(s) interno(s), desprezar o(s) sub-triângulo(s) externo(s) e manter os novos triângulos de Arquimedes para nova análise. Notamos que, no primeiro passo, guardamos duas vezes a área que descartamos. Isto é, dois terços da parte da área do triângulo original que está identificada fica 'dentro da luna'. Seguimos em frente analisando os novos triângulos de Arquimedes, sabendo que eles representam somente um quarto da área Δ .

Como cada um dos dois triângulos residuais é um triângulo de Arquimedes, cada um pode ser subdividido em um triângulo interno, um triângulo externo e dois novos triângulos residuais que, novamente, são triângulos de Arquimedes. Lembrando que são sub-triângulos internos e externos de triângulos de Arquimedes, temos que cada triângulo interno é duas vezes maior que o correspondente triângulo externo. Juntando os pedaços, temos regiões internas e externas maiores e novamente na proporção de dois para um. Temos agora quatro triângulos residuais para serem reprocessados.

Continuando desta forma, cobrimos (quase toda) a luna com triângulos internos e a parte do primeiro triângulo original ΔABS , que não está na luna, com triângulos externos. A soma de todos os triângulos internos deve também ser duas vezes maior que a soma de todos os triângulos externos. Em outras palavras:

TEOREMA DE ARQUIMEDES: *A parábola divide o triângulo de Arquimedes em seções cuja razão é 2:1.*

Ou ainda:

A área de uma luna da parábola é dois terços da área do correspondente triângulo de Arquimedes.

Arquimedes chegou a essa conclusão por um método um pouco diferente. Ele achou a área da seção adicionando as áreas de todos os sucessivos triângulos internos.

Se Δ representa a área do triângulo de Arquimedes ASB , então a área do triângulo interno correspondente é a metade de Δ , a área do triângulo externo correspondente é um quarto de Δ , e a área de cada um dos dois triângulos residuais é um oitavo de Δ . Portanto, os triângulos de Arquimedes sucessivos tem as áreas

$$\Delta, \frac{\Delta}{8}, \frac{\Delta}{8^2}, \dots;$$

os correspondentes triângulos internos possuem a metade dessa área; e, como cada triângulo interno gera dois novos triângulos de Arquimedes, obtemos a soma de todas as áreas dos sucessivos triângulos internos

$$\frac{1}{2} \left[\Delta + 2 \cdot \frac{\Delta}{8} + 2^2 \frac{\Delta}{8^2} + 2^3 \frac{\Delta}{8^3} + \dots \right]$$

Os colchetes contém uma série geométrica com razão $\frac{1}{4}$, cuja soma é igual

$$\frac{\Delta}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \Delta.$$

Assim, obtemos, novamente, para a área da seção o valor $J = \frac{2}{3} \Delta$.

Como $\overleftrightarrow{A'B'}$ é tangente à parábola em O , a distância h é a altura da seção (veja Figuras 4 e 5). Lembrando que $2h$ é a altura do triângulo ΔASB , concluímos que $\Delta = AB \cdot h$ e, portanto, $J = \frac{2}{3} \cdot AB \cdot h$, ou seja,

a área limitada pela seção da parábola é igual a dois terços do produto da base pela altura da seção.

Utilizando esse resultado, podemos expressar a área da seção de uma parábola cuja equação é $y^2 = 2px$ em termos das coordenadas de dois pontos na parábola

$A = (r, s)$ e $B = (u, v)$. Consideraremos um caso especial. Consideremos que A e B estão no primeiro quadrante e que r é menor que u . Neste caso afirmamos que

$$J = \frac{2}{3}uv - \frac{2}{3}rs - (u - r) \cdot \frac{v + s}{2}.$$

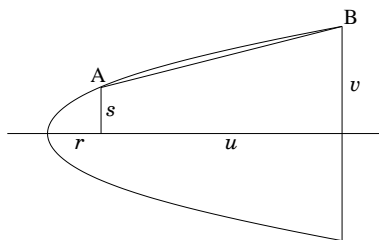


Figura 6

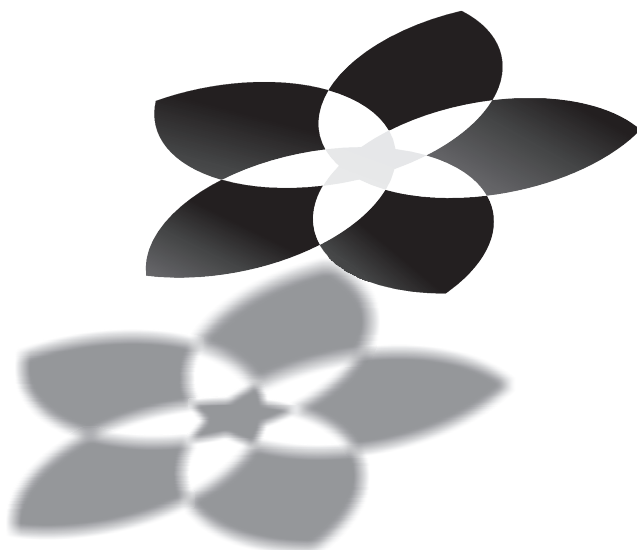
Denote o ponto $(r, -s)$ por A^* e $(u, -v)$ por B^* . Considere a grande luna determinada por $\overline{BB^*}$. Sua base tem comprimento $2v$ e a sua altura é u . Assim sua área é $\frac{2}{3}2vu = \frac{4}{3}vu$. A luna menor determinada por $\overline{AA^*}$ tem base $2s$ e altura r ; assim, sua área é $\frac{4}{3}rs$. Se removemos a luna menor da luna maior, obtemos uma região de área $\frac{4}{3}(uv - rs)$. Esta região continua grande demais. Ela contém o trapézio AA^*B^*B cuja área é $\frac{1}{2}(2v + 2s)(u - r)$. Quando removemos o trapézio não obtemos nossa luna, obtemos duas lunas idênticas: uma determinada por \overline{AB} e outra determinada por $\overline{A^*B^*}$. Pela simetria da parábola estas duas lunas têm a mesma área. Como resultado obtemos a fórmula prometida:

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}(uv - rs) - (u - r) \cdot (v + s) \right) = \frac{2}{3}uv - \frac{2}{3}rs - (u - r) \cdot \frac{v + s}{2}.$$

Como devemos alterar a fórmula obtida se A e B estão em lados diferentes da parábola?

Atividades

1. Liste as ferramentas matemáticas usadas na solução do problema.
2. Qual é a importância deste problema?
3. Os físicos nos dizem que há um tipo de simetria entre um raio de luz e seu reflexo ao bater em um objeto: a normal à tangente ao objeto no ponto é a bissetriz do ângulo formado por um raio de luz na sua entrada e do seu reflexo. Mostrar que: a) um raio de luz emanando do foco, ao refletir-se na parábola, é paralelo ao eixo da parábola ou b) o reflexo de um raio de luz paralelo ao eixo da parábola passa pelo foco da parábola.



Artigo

Médias aritmética, geométrica e harmônica

Licio Hernanes Bezerra

Dep. de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina
CEP: 88.040-900, Florianópolis-SC

Este texto é uma introdução à desigualdade que relaciona médias harmônica, geométrica e aritmética de n números reais positivos. A maior parte do que é apresentado aqui foi traduzido e adaptado de um livro de problemas de olimpíadas russas de matemática ([1]).

A média aritmética de n números positivos a_1, a_2, \dots, a_n é definida por

$$A_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

A média geométrica desses números é, por sua vez, definida por

$$G_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

E a média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos dos números:

$$H_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

O primeiro resultado sobre essas médias é o seguinte: $G_2(a, b) \leq A_2(a, b)$. Ou seja,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Para verificar isso, notemos que, como são números positivos, o resultado acima é equivalente a

$$4ab \leq (a+b)^2,$$

isto é,

$$(a-b)^2 \leq 0,$$

que é obviamente verdadeiro. Observemos que a igualdade vale ($2\sqrt{ab} = a + b$) se e somente se $a = b$. Outra forma equivalente a essas desigualdades é

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Se pensarmos agora, em termos geométricos, que a e b são lados de um retângulo, a desigualdade

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

significa que a área do retângulo é menor que o quadrado do seu semiperímetro. Assim, se a pergunta for qual é o retângulo com perímetro $2p$ que tem área máxima, a resposta é o quadrado cujo lado é $p/2$. A seguir, vamos discutir alguns problemas sobre essas desigualdades, propostos e resolvidos em [1].

(1) Prove que se $a + b = 1$, em que a, b são números positivos, então

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Prova: definindo $x = a + \frac{1}{a}$, $y = b + \frac{1}{b}$, temos, pelas desigualdades acima, que

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2,$$

pois $a + b = 1$. Mas, $ab \leq 1/4$, pela relação entre as médias geométrica e aritmética, de a e b . Logo, $1 + \frac{1}{ab} \geq 5$ e, assim, temos que

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{25}{4}.$$

(2) Mostre que, para quaisquer números positivos a, b, c ,

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

A prova decorre da seguinte desigualdade

$$A_2(a, b).A_2(b, c).A_2(c, a) \geq G_2(a, b).G_2(b, c).G_2(c, a).$$

(3) Prove que, se a, b, c são inteiros positivos, $\frac{(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Prova (a prova seguinte é uma prova diferente da encontrada em [1]): supondo que $0 < a \leq b \leq c$, sejam $r = b - a$, $s = c - b$. Assim,

$$\begin{aligned} abc &= (b-r)b(b+s) = b^3 + (s-r)b^2 - brs = \\ &= \left[b + \frac{s-r}{3}\right]^3 - 3b\frac{(s-r)^2}{9} - \frac{(s-r)^3}{27} - brs = \\ &= \left(\frac{3b+s-r}{3}\right)^3 - \frac{(s-r)^2}{9}\left[2b + \frac{3b+s-r}{3}\right] - brs = \\ &= \frac{(a+b+c)^3}{27} - \frac{(s-r)^2}{9}\left[2b + \frac{a+b+c}{3}\right] - brs \leq \frac{(a+b+c)^3}{27} \end{aligned}$$

O teorema seguinte é uma generalização dos resultados anteriores.

Teorema das Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica: sejam a_1, a_2, \dots, a_n números reais positivos. Então $H_n(a_1, \dots, a_n) \leq G_n(a_1, \dots, a_n) \leq A_n(a_1, \dots, a_n)$. E a igualdade vale se e só se todos os números são iguais.

Prova (por indução em n): o teorema é verdadeiro para $n = 2$. Vamos supor, por indução, que o teorema vale então para $n \geq 2$. Sejam agora $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ números reais positivos, tais que a_{n+1} é o maior deles. Então

$$a_{n+1} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

(verifique isso, usando a propriedade de ordem: se $a \geq b$, $a \geq c$ então $2a \geq b+c$). Denotando $A_n(a_1, \dots, a_n)$ por A_n e $A_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1})$ por A_{n+1} , temos que

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1}.$$

Como $a_{n+1} \geq A_n$, $a_{n+1} = A_n + b$, com $b \geq 0$. Note que, se os números não são todos iguais, $b > 0$. Logo,

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + A_n + b}{n+1} = A_n + \frac{b}{n+1}.$$

Então, $(A_{n+1})^{n+1} = (A_n)^{n+1} + (A_n)^n.b + \dots$, ou seja,

$$(A_{n+1})^{n+1} \geq (A_n)^{n+1} + (A_n)^n.b = (A_n)^n(A_n + b) = (A_n)^n.a_{n+1}$$

Pela hipótese de indução, $(A_n)^n \geq a_1 \dots a_n$. Assim, $(A_{n+1})^{n+1} \geq a_1 \dots a_n.a_{n+1}$, isto é,

$$A_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) \geq G_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}).$$

Para mostrar que $H_n(a_1, \dots, a_n) \leq G_n(a_1, \dots, a_n)$, basta ver que

$$A_n\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right) \geq G_n\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$$

(conclua a prova a partir daí).

Verifique como fica cada desigualdade na prova do teorema acima se os números não forem todos iguais.

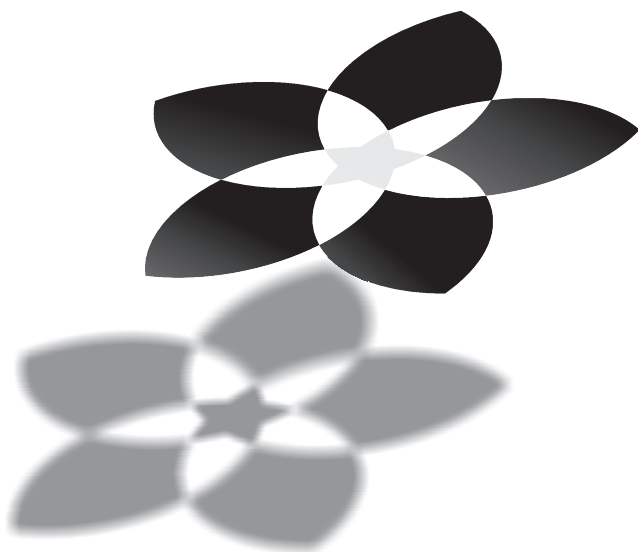
(4) Mostre que, para qualquer inteiro positivo n ,

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Basta ver que $G_n(1, 2, \dots, n) < A_n(1, 2, \dots, n)$ e que $A_n(1, 2, \dots, n) = \frac{(n+1)}{2}$.

REFERÊNCIA

D. O. Shklarsky, N. N. Chentzov and I. M. Yaglom, *The USSR Olympiad problem book: selected problems and theorems of elementary mathematics*, Dover, Mineola, NY (1994).



Soluções dos Problemas Propostos

1. Mostre que se p é um número primo maior do que 5 existe um número natural a , escrito só com algarismos 1, tal que a é múltiplo de p .
Exemplo: $p = 11$, $a = 11$; $p = 13$, $a = 111111$

SOLUÇÃO

Como $\frac{1}{p}$ é racional, tem uma expressão decimal periódica,

$$\frac{1}{p} = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_k x_1 x_2 x_3 \dots x_k x_1 x_2 \dots = \underbrace{x_1 x_2 x_3 \dots x_k}_{999 \dots 9}$$

$$\text{daí } a = x_1 x_2 x_3 \dots x_k = \frac{9}{p} \overbrace{(111 \dots 111)}^k; \text{ como } p \text{ não divide } 9, \text{ divide } \underbrace{111 \dots 111}_k.$$

2. Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, provar que n pode ser escrito, em alguma base, com 3 algarismos, se e só se $n \neq 8$.

SOLUÇÃO

O menor número de 3 algarismos numa base k é $100|_k$; o maior é $(k-1)(k-1)(k-1)|_k$ (por exemplo, na base 5 o menor é $25 = 100|_5$ e o maior é $124 = 444|_5$). Como $100|_k = k^2$ e $(k-1)(k-1)(k-1)|_k = k^3 - 1$, n não pode ser escrito com 3 algarismos em alguma base se e só se existe k tal que $k^3 - 1 < p < (k+1)^2$. Em particular, $2^3 - 1 = 7 < 8 < (2+1)^2 = 9$, e 8 não pode ser escrito com 3 algarismos. Como $4 = 100|_2$, $5 = 101|_2$, $6 = 110|_2$ e $7 = 111|_2$, basta mostrar que se $n > 8$ então n pode ser também escrito com 3 algarismos, em alguma base. Ora, para $k \geq 3$, $k^3 \geq 3k^2 = k^2 + k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 2k > k^2 + 2k + 2 = (k+1)^2 + 1$.

Portanto $k^3 - 1 > (k+1)^2 \quad \forall \quad k \geq 3$, e não se pode ter $k^3 - 1 < n < (k+1)^2$ para $n > 8$. Logo n se escreve com 3 algarismos em alguma base.

Anexos:

- * para 4 algarismos, “falham” os números de 16 a 26;
- * para 5 algarismos, “falham” os números de 32 a 80 e de 243 a 255;
- * com mais algarismos, há mais lacunas;
- * em geral, dado n , quais os comprimentos possíveis para n , e em que bases ocorrem?

Por exemplo, 1257 tem 4 outras representações de comprimento 4: $1257 = 1646|_9 = 2351|_8 = 3444|_7 = 5453|_6$. Qualquer número entre 2401 e 3120 tem representação de comprimento 5 nas bases 5, 6 e 7.

$$3. \text{ Sejam } n \in \mathbb{N} \text{ e } a_k > 0, \quad 1 \leq k \leq n. \text{ Então } \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k}{\sum_{i=1}^n \delta_{ki} a_i} \right] \geq \frac{n}{n-1},$$

onde

$$\delta_{k_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq i \\ 0 & \text{se } k = i \end{cases}$$

SOLUÇÃO

Seja, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, $b_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} a_i$. Temos:

$$b_1 = 0 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$b_2 = a_1 + 0 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$b_3 = a_1 + a_2 + 0 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

.

.

.

$$b_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-2} + 0 + a_n$$

$$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + 0$$

e portanto, para cada k ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta_{ki} b_i &= (n-2)a_1 + (n-2)a_2 + \dots + (n-2)a_{k-1} + (n-1)a_k + \\ &\quad + (n-2)a_{k+1} + \dots + (n-2)a_n \\ &= (n-2) \sum_{i=1}^n \delta_{ki} a_i + (n-1)a_k \\ &= (n-2)b_k + (n-1)a_k \end{aligned}$$

$$\text{Segue-se que } a_k = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_{ki} b_i - (n-2)b_k}{n-1}.$$

Agora notemos que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b_i - b_j)^2}{b_i b_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i^2 + b_j^2 - 2b_i b_j}{b_i b_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{b_i^2 + b_j^2}{b_i b_j} - 2 \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{b_i^2 + b_j^2}{b_i b_j} \right) - 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$\text{Portanto } \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{b_i}{b_j} + \frac{b_j}{b_i} \right) \geq n(n-1)$$

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{b_i}{b_j} \geq n(n-1)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} b_i}{b_j} \right] \geq n(n-1)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} b_i}{b_j} \right] - n(n-2) \geq n(n-1) - n(n-2)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} b_i}{b_j} - (n-2) \right] \geq n$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} b_i - (n-2)b_j}{b_j} \right] \geq n$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} b_i - (n-2)b_j}{(n-1)b_j} \right] \geq \frac{n}{n-1}$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{a_j}{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} a_i} \right] \geq \frac{n}{n-1}$$

Também:

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n (a_i^{n-1})^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^n a_i^{n-1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} a_i}{n-1} \right)$$

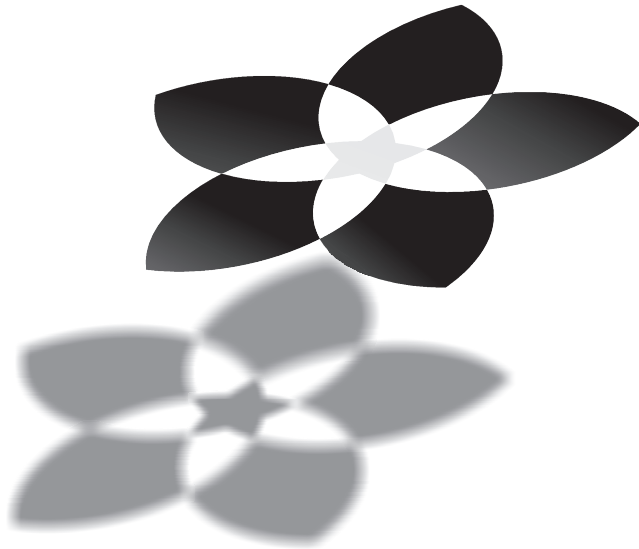
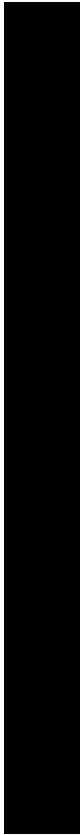
Dai

$$(n-1)^n \prod_{i=1}^n a_i \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \delta_{ji} a_i \right) (n-1)^n \leq \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} a_i}{a_j} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{(n-1)^n} \geq$$

$$\prod_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} a_i} \right) \frac{1}{(n-1)} \geq \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} a_i} \right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Portanto

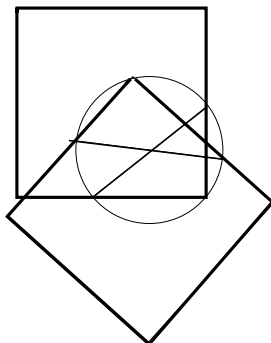
$$\frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} a_i} \right) \right) \geq \frac{1}{n-1} \geq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{\sum_{i=1}^n \delta_{ji} a_i} \right)}$$



Problemas Propostos

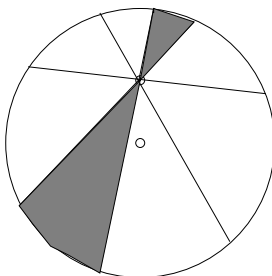
Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições.

1. *Proposto por Antônio Vladimir Martins, UFSC, retirado do livro Techniques of Problem Solving.* Com um grande quadrado de chumbo, é possível achar o centro de uma pequena circunferência. Mas se você tiver um grande triângulo equilátero, como achar o centro desta mesma circunferência?

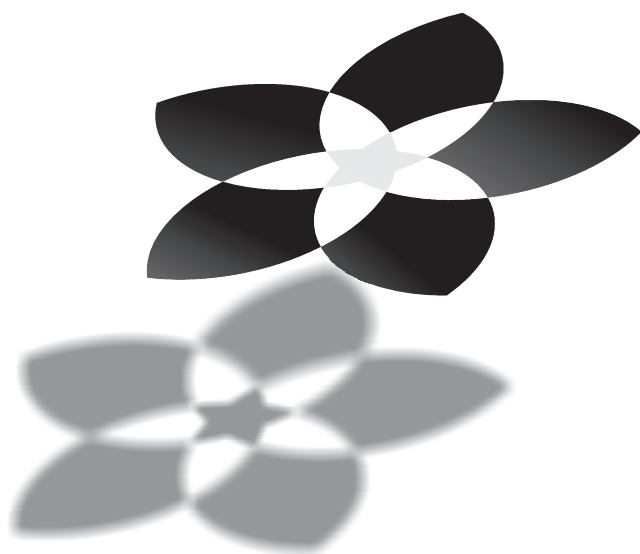


2. *Proposto por Ivan Pontual Costa e Silva, UFSC.* Seja L uma reta, P_1 e P_2 pontos distintos fora de L mas coplanares com L . Mostre que existe um único ponto P de L com a propriedade que $d(P, P_1) + d(P, P_2)$ é mínima, e neste caso, o menor ângulo que PP_1 faz com L e o menor ângulo que PP_2 faz com L são iguais.
3. *Proposto por José Luiz Rosas Pinho, UFSC.* Seja C uma circunferência de raio R dado. Mostre que, para cada ponto P no interior do círculo delimitado por C , existe um único número $r > 0$ tal que as retas tangentes à circunferência de centro P e raio r , passando por qualquer ponto A de C , cruzam a circunferência C em pontos B e C de modo que a circunferência de centro P e raio r está inscrita no triângulo $\triangle ABC$.
4. *Proposto por Andrzej Solecki, UFSC.* Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 1$. Quais as 3 raízes reais desta função, sabendo que as mesmas estão em PA? Qual o valor de a ?

5. *Proposto por Carmem Suzane Comitre Gimenez, UFSC.* Uma pizza circular é dividida em 8 pedaços formando ângulos de 45° a partir de um ponto arbitrário no interior da pizza. Mostre que a soma das áreas de pedaços alternados é constante.



Você Sabia? O número de Fermat $F_{24} = 2^{2^4} + 1$, que possui mais de 5 milhões de dígitos decimais e que Fermat acreditava ser primo, na verdade é composto?



Outras Olimpíadas

Resultados de alunos de SC em outras Olimpíadas

Resultados na OBM

1999

Nível 01

Bruno Leonardo Scheneider (São José) - Medalha de Bronze

Felipe Paupitz Schlichting (Florianópolis) - Menção Honrosa

Nível 02

João Felipe Almeida Destri (Florianópolis) - Menção Honrosa

Nível 03

Giuliano Boava (Criciúma) - Medalha de Prata

2000

Nível 01

Guilherme Rohden Echelmeier (Itajaí) - Medalha de Ouro

Hanna Kiriara e Silva (Florianópolis) - Menção Honrosa

Nível 02

Lucas Lolli Savi (Florianópolis) - Menção Honrosa

2001

Nível 02

Felipe Paupitz Schlichting (Florianópolis) - Medalha de Bronze

Nível Universitário

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Medalha de Bronze

2002**Nível 01**

Tiago Madeira (Itajaí) - Menção Honrosa

Nível 02

Guilherme Rohden Echelmeier (Itajaí) - Medalha de Prata

Nível Universitário

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Medalha de Bronze

2003**Nível 01**

Gabriel Somavilla Nunes (Videira) - Menção Honrosa

Nível Universitário

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Medalha de Bronze

Resultados em Olimpíadas Internacionais

2000

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Menção Honrosa na III Olimpíada Iberoamericana Universitária.

2001

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Menção Honrosa na IV Olimpíada Iberoamericana Universitária.

2002

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Menção Honrosa na V Olimpíada Iberoamericana Universitária.

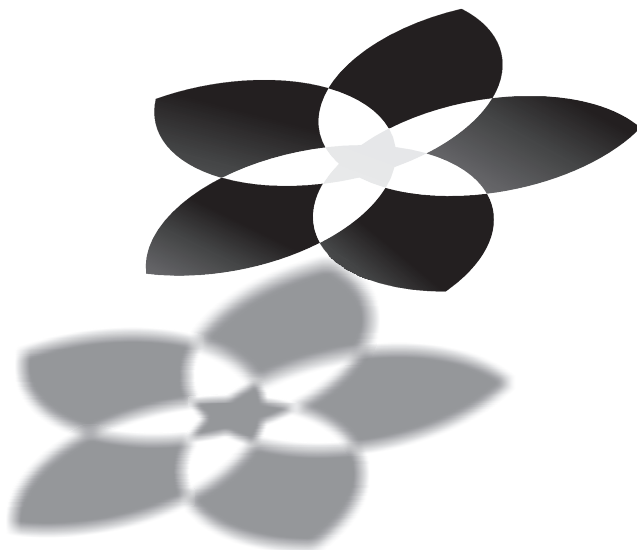
2003

Tiago Madeira (Itajaí) - Medalha de Bronze na IX Olimpíada de Maio.

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Third Prize na X International Mathematical Competition for University Students.

Em 2003 o Brasil participou pela primeira vez da *International Mathematical Competition for University Students* com uma equipe formada por 8 estudantes de universidades brasileiras (3 alunos do ITA, 1 aluno da UFRJ, 1 aluno da UNICAMP, 2 alunos do IME e 1 aluno da UFSC).

O evento ocorreu no período de 25 a 31 de julho na Universidade Babes-Bolyai, em Cluj-Napoca (Romênia). O catarinense Giuliano Boava, da UFSC, ganhou um terceiro prêmio (Third Prize). Todos os brasileiros foram premiados (3 Second Prize, 3 Third Prize e 2 Honorable Mention).



Informações Gerais

Envio de Problemas e Soluções

A seção de problemas propostos e soluções é uma seção dinâmica. Contribua propondo problemas e enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o \LaTeX , então o artigo poderá ser submetido neste formato.

Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) podem cadastrar suas escolas entrando no nosso site ou entrando em contato diretamente conosco (ver abaixo).

Alunos interessados em participar das olimpíadas de matemática podem consultar nosso site para verificar se a sua escola está cadastrada. Caso contrário, devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembremos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberam a revista podem nos solicitar o envio da mesma.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

- Nosso site: www.orm.mtm.ufsc.br
- Telefone/Fax: (48) 3316809 (PET - Matemática)
- e-mail: orm@pet.mtm.ufsc.br
- Endereço: PET - Matemática

Departamento de Matemática - CFM
UFSC

Campus Universitário - Trindade
88040-900 – Florianópolis/SC