

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

nº 15, 2018



Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Reitora em exercício: Alacoque Lorenzini Erdmann

Pró-Reitoria de Extensão (PROEX)

Pró-Reitor: Rogério Cid Bastos

Pró-Reitoria de Graduação (PROGRAD)

Pró-Reitor: Alexandre Marino Costa

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas (CFM)

Diretor: Lício Hernanes Bezerra

Vice-Diretor: Nilton da Silva Branco

Departamento de Matemática

Chefe: Aldrovando Luís Azeredo Araújo

Sub-Chefe: Giuliano Boava

Apoio:

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)

**CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DE SANTA CATARINA**

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina/
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],
2004 -

v.: 15 (2018) 23 cm

Anual

ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas,
Exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II. Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas.

Coordenadora da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina: Alda Dayana Mattos Mortari

Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM/SC): José Luiz Rosas Pinho

Professores da ORM/SC: Alda Dayana Mattos Mortari, Carmem Suzane Comitre Gimenez, Danilo Royer, Eliezer Batista, Felipe Lopes Castro, Fernando de Lacerda Mortari, José Luiz Rosas Pinho, Leandro Batista Morgado, Licio Hernanes Bezerra e Nereu Estanislau Burin

Bolsistas da ORM/SC: Crislaine Botelho Costa e Jean Carlo Gengnagel

Coordenadora da Olimpíada Regional Mirim de Matemática (ORMM): Alda Dayana Mattos Mortari

Professores da ORMM: Alda Dayana Mattos Mortari, Carmem Suzane Comitre Gimenez e Gilles Gonçalves de Castro

Bolsistas da ORMM: André Borges Carlos

Bolsistas do PET Matemática: Adrian Valentim, Beatriz Khey Andrade Santos, Bruno Cabral, Kendji Takemoto, Gabriel Graciani, Leo Dias, Marcello Silveira Marochi, Tiago Vota Cucco, Vinícius Douglas Cerutti e Yuri Farias Lima

Colaboradores: Carlos Leal de Casto, Gabriel Simon Shafaschek e Letícia Figueredo de Carvalho

Comitê Editorial da Revista:

Alda Dayana Mattos Mortari
Danilo Royer
Eliezer Batista
Gilles Gonçalves de Castro
José Luiz Rosas Pinho
Leandro Batista Morgado
Licio Hernanes Bezerra
Nereu Estanislau Burin

Editoração Eletrônica:

Alda Dayana Mattos Mortari
Carlos Eduardo Leal de Castro
Jean Carlo Gengnagel
Letícia Figueredo de Carvalho
Rodrigo Maciel Rosa

Tiragem:

800 exemplares

Arte da capa:

Rafaela Goulart de Andrade
Renata Leandro Becker

Postagem:

Segundo semestre de 2017

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina nº 15, 2018

ISSN 1679-7612

Sumário

Apresentação	7
XIX ORM/SC (2016)	9
XIX ORM/SC em Números	11
Primeira Fase	11
Segunda Fase	11
Premiados	13
Nível 1	13
Nível 2	15
Nível 3	16
Escolas Participantes	17
Provas	19
Nível 1	19
Nível 2	22
Nível 3	24
Resoluções das Provas	26
Nível 1	26
Nível 2	34
Nível 3	39
VI ORMM (2016)	47
VI ORMM em Números	49
Premiados	50
Prova	53
Resolução da Prova	55
Artigos	57
Logaritmos de Números Complexos	
Gabriel Simon Schafaschek	59
A importância do Desenho Geométrico no ensino da Geometria	
Carlos Eduardo Leal de Castro	80

Curiosidades	89
Elon Lages Lima	91
Srinivasa Ramanujan	92
 Resoluções dos Problemas Propostos	 95
 Problemas Propostos	 101
 Premiados da ORM/SC em Outras Olimpíadas de Matemática	 107
 Informações Gerais	 139
Cadastramento	141
Como Adquirir a Revista	141
Erramos	141
Fale Conosco	142

Apresentação

A *Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina* é o resultado de um projeto de extensão da UFSC e uma atividade de extensão do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática (SESu/MEC) da UFSC. Participam deste projeto oito professores do Departamento de Matemática da UFSC. O 15º número da Revista foi financiado com recursos da Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), na forma de um auxílio financeiro para um evento da Olimpíada Brasileira de Matemática. A Revista é um projeto independente de outros dois projetos de extensão da UFSC, a Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM/SC) e a Olimpíada Regional Mirim de Matemática (ORMM); estes dois últimos projetos contaram com a participação de bolsistas de extensão do programa PROBOLSAS, da Pró-Reitoria de Extensão (PROEX) e todos os três projetos contaram com a participação de alunos voluntários. Além disso, a ORM/SC faz parte, em 2017, do projeto Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática / Olimpíada Brasileira de Matemática (edital universal do CNPq: Chamada CNPq/MCTIC/MEC Nº 15/2017 - Olimpíadas Científicas, sob a direção de Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira).

O principal objetivo da Revista é divulgar a ORM/SC e a ORMM em todo o estado de Santa Catarina. Desde a nossa primeira edição nós distribuímos gratuitamente a Revista para cerca de 1000 escolas públicas e particulares, às Secretarias de Educação de todos os municípios do estado e a todas as Gerências de Educação do estado. Infelizmente assim como na edição passada, em virtude de cortes orçamentários feitos na nossa instituição e no projeto, a distribuição foi reduzida às escolas que participaram da cerimônia de premiação da ORM/SC e ORMM em 2016 e que estão participando em 2017. No entanto, enviaremos um exemplar desta edição para cerca de 60 IES públicas através do programa de divulgação da Biblioteca Universitária da UFSC. Além disso, a Revista está disponível na sua versão digital e a versão impressa poderá ser solicitada pelas escolas e professores. Para maiores informações veja a nossa seção “Como Adquirir a Revista”.

Em 2017 a ORM/SC está completando vinte anos. Nesses vinte anos a ORM, além de estimular o prazer de estudar matemática, levou diversos estudantes do ensino básico a participarem, e serem premiados, em várias competições nacionais e internacionais. Destacamos a obtenção de duas medalhas de prata, em 2008 e 2009, e uma medalha de bronze em 2011 nas equipes brasileiras que atuaram na International Mathematical Olympiad (IMO). Além de medalhas nas Olimpíadas do Cone Sul, na Olimpíada Iberoamericana de Matemática, na Asian Pacific Mathematics Olympiad e

na Romanian Master in Mathematics. Alguns desses estudantes catarinenses participaram ainda, já cursando universidades, da Internacional Mathematical Competition for University Students, obtendo medalhas de bronze, prata e ouro (veja a seção “Premiados da ORM/SC em outras olimpíadas de matemática” ao final desta Revista).

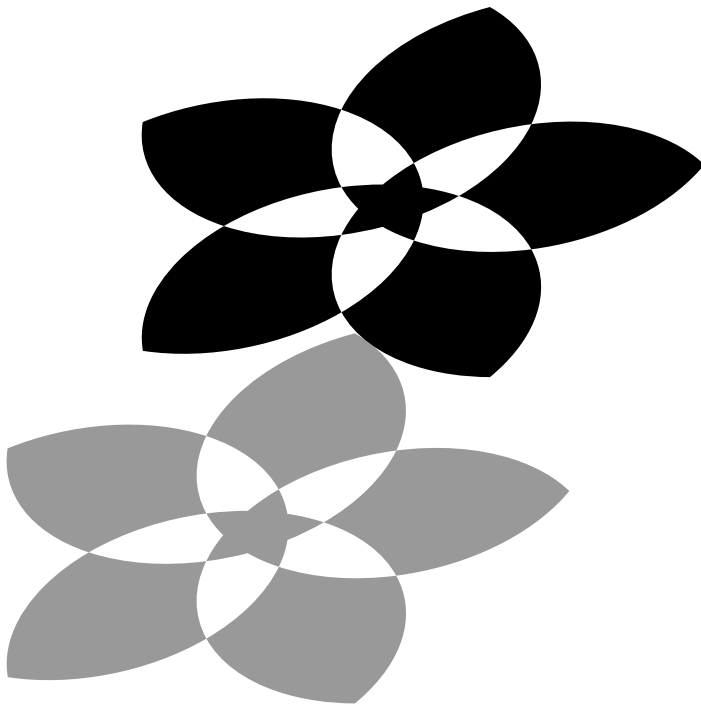
Neste ano festivo para a ORM anunciamos que infelizmente esta será a última edição da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina. As razões para esta decisão são muitas, dentre elas o fato de que atualmente a informação é muito mais acessada na forma digital. A Revista foi lançada em uma época em que havia mais dificuldade em divulgar nossos projetos. Hoje em dia, com a popularização de sites e redes sociais, o acesso a informação ficou muito mais fácil. As informações sobre os estudantes premiados nos anos da ORM continuarão a fazer parte do nosso site, bem como a seção de problemas propostos.

Esperamos que os leitores continuem a acompanhar as novidades e informações dos nossos projetos de olimpíadas de matemática através das páginas do PET-MTM (www.pet.mtm.ufsc.br) e da ORM (www.orm.mtm.ufsc.br).

Florianópolis, 02 de dezembro de 2017.

Alda Dayana Mattos Mortari
Coordenadora da Revista da ORM/SC
Coordenadora da ORMM

José Luiz Rosas Pinho
Tutor do PET Matemática da UFSC
Coordenador da ORM/SC



XIX ORM/SC (2016)

XIX ORM/SC em Números

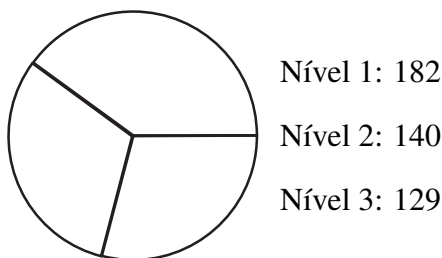
Primeira Fase

Na primeira fase da XIX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina participaram 13397 alunos de ensino fundamental e médio, oriundos de 95 escolas públicas e particulares de 32 municípios do estado. Deste total, foram classificados 908 alunos para a segunda fase.

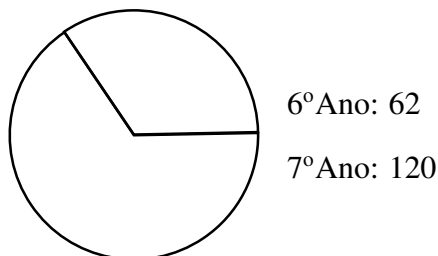
Segunda Fase

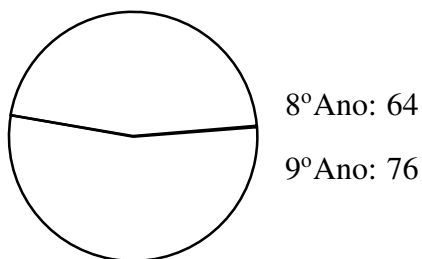
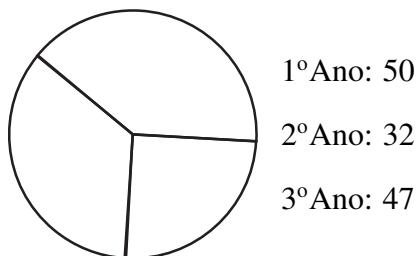
Na segunda fase da XIX ORM/SC compareceram 451 alunos (o que corresponde, aproximadamente, a 49,66% dos alunos que se classificaram para a segunda fase da ORM/SC) representando um total de 58 escolas (14 públicas e 44 particulares, as quais são mostradas em “Escolas Participantes”, p. 17) de 28 municípios do estado. As distribuições por níveis e anos dos alunos que participaram da segunda fase da ORM/SC são mostradas a seguir.

Total de alunos participantes da segunda fase, separados por níveis



Nível 1



Nível 2**Nível 3**

Premiados

A cerimônia de premiação da XIX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em conjunto da VI Olimpíada Regional Mirim de Matemática ocorreu no dia 26 de novembro de 2016, no Centro de Cultura e Eventos da Universidade Federal de Santa Catarina e contou com a presença das seguintes autoridades: professor Rogério Cid Bastos, pró-reitor de extensão, professor Lício Hernanes Bezerra, vice-diretor do CFM, professora Silvia Martini de Holanda Janesch, coordenadora do curso de Matemática, acadêmica Crislaine Botelho Costa, bolsista de extensão da ORM/SC, acadêmico Carlos Eduardo Caldeira, bolsista do PET Matemática, professora Carmem Suzane Comitre Gimenez, representante da coordenação da ORMM, professor José Luiz Rosas Pinho, Coordenador da ORM/SC e tutor do PET Matemática.

Na cerimônia, foram premiados 51 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 11% dos alunos que participaram da segunda fase da ORM/SC): 3 com medalhas de ouro, 9 com medalhas de prata, 15 com medalhas de bronze e 24 com menções honrosas.

Prêmio William Glenn Whitley¹

- Lorenzo Andreus (Blumenau)

Nível 1

Ouro

- Mateus Barcelos Faita (Florianópolis)

Prata

- David Saldanha da Luz Fontes (Florianópolis)
- Felipe Elton Pazini Savi (Criciúma)
- Frederico Catapan Narciso (Florianópolis)
- Larissa Zimmermann (São José)

¹O prêmio é destinado ao aluno com a maior pontuação na Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina. Esta é uma homenagem ao professor William Glenn Whitley (ver revista da ORM/SC nº 4) e começou a ser entregue no ano de 2006.

Bronze

- Ana Paula Kalfelz Fleck (Florianópolis)
- Arthur Linhares Roberge (Florianópolis)
- Beatriz Nasato Santos (Florianópolis)
- Daniel Kim Homrich (Florianópolis)
- Gabriel Domingos Zanoni (Florianópolis)
- Leonora Ramlow Leodoro da Silva (Florianópolis)
- Luis Cesar Donadel (Criciúma)
- Maria Stela Yunes Moraes (Florianópolis)
- Pedro Bertoli Pinheiro (Florianópolis)

Menção Honrosa

- Akira Hisayasu Suzuki (Florianópolis)
- Bruna Rosseto Teixeira (Florianópolis)
- Douglas Otávio dos Santos (Joinville)
- Leonardo Vilain Martins (Florianópolis)
- Mateus Souza Benincá (Criciúma)
- Maria Eduarda Beé (Blumenau)
- Natália Oliveira Pereira dos Santos (Blumenau)
- Stela Schiochett Virmond Vieira (Joinville)
- Victor Hugo Kassulke Becker (Joinville)

Nível 2**Ouro**

- Enzo Jardim Vendramin (Florianópolis)

Prata

- Alexandra Luiza Sartoretto Matte (Florianópolis)
- Daniel Cristiano Almeida Kerber (Florianópolis)
- Martin Baraldi Lobe (Blumenau)
- Murilo Schoffen Prado (Florianópolis)

Bronze

- Bruno de Lima (Criciúma)
- Anthony Antunes Negrello (Joinville)
- Julia Gualdi Schlichting (Ântonio Carlos)
- Luiz Carlos Possa Bendo (Cocal Do Sul)

Menção Honrosa

- Cristine Dominico (Ântonio Carlos)
- Érica Pottmaier (Tubarão)
- Felipe Jeremias Durão (Florianópolis)
- Kevin Luis Stein (Joinville)
- Maria Julia Lemos Ramos (Içara)
- Matheus Potrikus Machado (Criciúma)

Nível 3**Ouro**

- Lorenzo Andreus (Blumenau)

Prata

- Victor Mosimann Duarte (Florianópolis)

Bronze

- Danilo Gartner Aurich (Florianópolis)
- Mateus Israel Silva (Florianópolis)

Menção Honrosa

- Arthur Gustavo Lenzi (Joinville)
- Bruno Visnadi da Luz (Florianópolis)
- Daniel Peceguini Mathias (Joinville)
- Guilherme Guteschow (Florianópolis)
- Heloísa Gabriela Paterno (Rio Do Sul)
- Luiz Antonio de Aquino (Florianópolis)
- Maria Vitória Gazoni (Florianópolis)
- Patrick John Ramos (Blumenau)
- Tobias Rossi Muller (Itajaí)

Escolas Participantes

Segue abaixo a relação de todas as 58 escolas participantes da 2ª fase da XIX ORM/SC:

Associação Educacional Luterana Bom Jesus/IELUSC (Joinville); Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis); Centro Educacional Timbó S.A. (Timbó); Centro Educacional Universo (Florianópolis); Colégio Bom Jesus Coração de Jesus (Florianópolis); Colégio Bom Jesus Santo Antônio (Blumenau); Colégio Catarinense (Florianópolis); Colégio Cenecista José Elias Moreira (Joinville); Colégio Criativo (Florianópolis); Colégio Cruz e Sousa (Florianópolis); Colégio da Lagoa (Florianópolis); Colégio de Aplicação da UFSC (Florianópolis); Colégio de Aplicação da UNIVALI (Itajaí); Colégio Dehon (Tubarão); Colégio Dom Bosco (Rio do Sul); Colégio dos Santos Anjos (Joinville); Colégio Elisa Andreoli (São José); Colégio Energia (Balneário Camboriú); Colégio Energia (Itajaí); Colégio Estimoarte (Florianópolis); Colégio Jardim Anchieta (Florianópolis); Colégio Machado de Assis (Joinville); Colégio Marista Criciúma (Criciúma); Colégio Nossa Senhora da Conceição (Florianópolis); Colégio Paulo Freire (São José); Colégio Positivo (Joinville); Colégio Posivile (Joinville); Colégio Reino Azul (São José); Colégio Sagrada Família (Blumenau); Colégio Salvatoriano Nossa Senhora de Fátima (Florianópolis); Colégio Santa Catarina (Florianópolis); Colégio Santa Rosa de Lima (Lages); Colégio Santo Antônio (Joinville); Colégio SATC (Criciúma); Colégio SATC (Orleans); Colégio Tupy (Joinville); Colégio Visão - Unidade Célestin Freinet (Blumenau); Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis); Escola Autonomia (Florianópolis); Escola Barão do Rio Branco (Blumenau); Escola de Educação Básica Altamiro Guimarães (Antônio Carlos); Escola de Educação Básica Governador Ivo Silveira (Palhoça); Escola de Ensino Fundamental Cristo Rei (Cocal do Sul); Escola de Ensino Fundamental Demétrio Bettiol (Cocal do Sul); Escola de Ensino Fundamental Luís Ledra (Rio do Sul); Escola Dinâmica (Florianópolis); Escola Internacional de Florianópolis (Florianópolis); Escola Municipal de Ensino Fundamental Jorge da Cunha Carneiro (Criciúma); Escola Municipal de Ensino Fundamental Ministro Pedro Aleixo (Massa-



randuba); **Escola Municipal de Ensino Fundamental Quintino Rizzieri (Içara); Escola Municipal Padre Martinho Stein (Timbó); Escola Técnica de Comércio de Tubarão (Tubarão); Escola Técnica do Vale do Itajaí (Blumenau); Escola Técnica Tupy (Joinville); Escola UNIDAVI (Rio do Sul); Instituto Federal Catarinense - Campus Rio do Sul (Rio do Sul); Instituto Federal de Santa Catrina - Campus Florianópolis (Florianópolis); Instituto Federal de Santa Catrina - Campus Joinville (Joinville).**





Provas

Nível 1

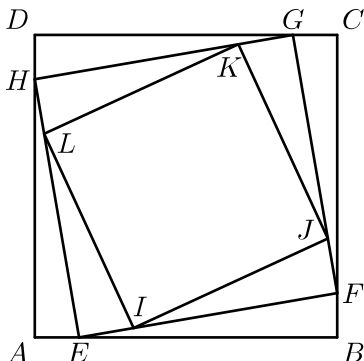
Problema 1. No elevador do prédio de José Luiz, existe um visor que indica em qual andar o elevador está. Se estivesse funcionando corretamente, o visor mostraria os números



em que  representa o andar térreo e os outros números representam cada um dos 9 andares. Essas possibilidades são obtidas acendendo ou apagando cada um dos 7 segmentos que forma o . Porém, o visor está com defeito e pelo menos um dos 7 segmentos nunca acende.

- (a) José Luiz entrou no elevador e observou o símbolo  no visor. A seguir, o elevador moveu-se um andar (não se sabe se subiu ou desceu um andar) e mostrou o símbolo  no visor. O elevador moveu-se um andar por mais duas vezes, mostrando os símbolos  e  em cada uma das vezes. Quais foram os andares pelos quais o elevador passou?
- (b) Quais os segmentos do visor que estão com defeito?

Problema 2. Na figura abaixo, o quadrado $ABCD$ tem área 100 cm^2 , o quadrado $IJKL$ tem área 50 cm^2 e os triângulos EBF , FCG , GDH , HAE , IFJ , JGK , KHL e LEI têm todos a mesma área. Calcule a área do quadrado $EFGH$.



Problema 3. Encontre o resto da divisão de $\underbrace{111 \cdots 111}_{2016 \text{ algarismos}}$ por 7.

Problema 4. Carmem comprou 10 vacas e 20 cabras juntamente com ração para alimentar todos estes animais por exatamente 60 dias. Um quilo de ração para cabra custa o mesmo que $\frac{1}{5}$ de um quilo de ração para vaca. Uma vaca come 40 quilos de ração por dia, enquanto uma cabra come 10 quilos de ração por dia. Após alimentar os animais por 10 dias, Carmem vendeu duas vacas e trocou a ração que estas duas vacas comeriam (nos próximos 50 dias) por ração para cabra. Passando-se mais 20 dias, Carmem comprou 30 cabras. A partir desta data, por quantos dias Carmem conseguirá alimentar todas as cabras?

Problema 5. Ao final das Olimpíadas, Eliezer analisou o quadro de medalhas de três países, chamados aqui de A , B e C , e constatou as informações a seguir.

- (1) Os países A , B e C conquistaram, juntos, 63 medalhas, sendo 21 medalhas de cada tipo.
- (2) O número de medalhas de prata do país A é igual ao número de medalhas de prata do país B e também é igual ao número de medalhas de ouro do país B .

- (3) O número de medalhas de bronze do país B é igual ao número de medalhas de prata do país C e também é igual à metade do número de medalhas de ouro do país A .
- (4) O número de medalhas de bronze do país C é o triplo do seu número de medalhas de ouro.
- (5) O país A ganhou 7 medalhas de ouro a mais que o país C .

Qual o número de medalhas de bronze que o país A conquistou?

Nível 2

Problema 1. Encontre o resto da divisão de $\underbrace{111 \cdots 111}_{2016 \text{ algarismos}}$ por 7.

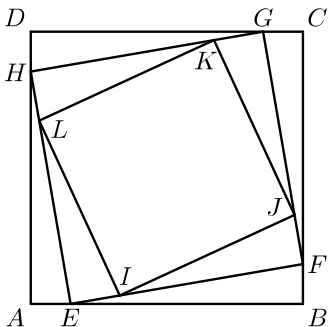
2016 algarismos

Problema 2. Ao final das Olimpíadas, Eliezer analisou o quadro de medalhas de três países, chamados aqui de A , B e C , e constatou as informações a seguir.

- (1) Os países A , B e C conquistaram, juntos, 63 medalhas, sendo 21 medalhas de cada tipo.
- (2) O número de medalhas de prata do país A é igual ao número de medalhas de prata do país B e também é igual ao número de medalhas de ouro do país B .
- (3) O número de medalhas de bronze do país B é igual ao número de medalhas de prata do país C e também é igual à metade do número de medalhas de ouro do país A .
- (4) O número de medalhas de bronze do país C é o triplo do seu número de medalhas de ouro.
- (5) O país A ganhou 7 medalhas de ouro a mais que o país C .

Qual o número de medalhas de bronze que o país A conquistou?

Problema 3. Na figura abaixo, os quadriláteros $ABCD$, $EFGH$ e $IJKL$ são quadrados. Sabendo que $ABCD$ tem área 100 cm^2 , $IJKL$ tem área 50 cm^2 e os triângulos EBF , FCG , GDH , HAE , IFJ , JGK , KHL e LEI têm todos a mesma área, calcule a medida do segmento KG .



Problema 4. No planeta *Lobetuf*, os times de futebol são formados por quatro *lobetufenses*. Um grupo de 12 *lobetufenses* pretende formar três times de futebol. Três *lobetufenses* são goleiros e devem ficar em times separados. Outros três *lobetufenses* jogam muito bem e também devem ficar em times separados. De quantas formas é possível organizar os três times?

Problema 5. Mostre que 2016 não pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois números primos.

Nível 3

Problema 1. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem:

- (i) $f(x) \cdot [f(x) + 1 - x^2] = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) se houver x_1 e x_2 com $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$ ou $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$, então existirá x_3 , entre x_1 e x_2 , tal que $f(x_3) = 0$.

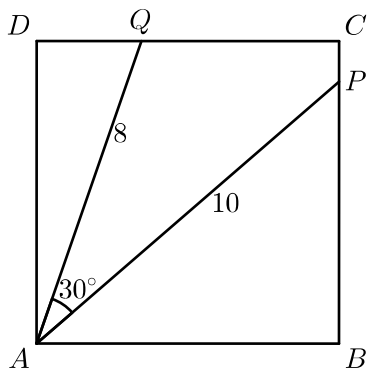
Problema 2. Um número de quatro algarismos $abcd$ é denominado *bidivisível* quando $abcd$ é múltiplo dos números ab e cd . Quantos números de quatro algarismos bidivisíveis existem?

Observação. Na notação $abcd$, a , b , c e d são algarismos. Por exemplo, se $abcd$ é o número 1020, então $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 0$, $ab = 10$ e $cd = 20$.

Problema 3. Determine a quantidade de triplas ordenadas (x, y, z) de números inteiros positivos tais que $x \cdot y \cdot z = 2016$.

Observação. Em triplas ordenadas, a ordem dos termos é relevante. Por exemplo, $(2016, 1, 1) \neq (1, 1, 2016)$.

Problema 4. Sejam $ABCD$ um quadrado e P e Q pontos nos lados BC e CD , respectivamente, tais que $AP = 10$, $AQ = 8$ e $\hat{PAQ} = 30^\circ$. Calcule o comprimento de AB .



Problema 5. Mostre que se $n = a \cdot b$, com $a, b \in \mathbb{N}^*$, então

$$(a!)^b \cdot (b!)^a \leq n!$$








e que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = n$ ou $b = n$.

Observação. $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.


Resoluções das Provas

Nível 1

Problema 1. Para organizar a nossa explicação, vamos nomear cada um dos segmentos do número 8 que compõe o visor do elevador de José Luiz.

- O segmento aceso nesta figura  denominaremos de segmento 1;
- o segmento aceso nesta figura  de segmento 2;
- o segmento aceso nesta figura  de segmento 3;
- o segmento aceso nesta figura  de segmento 4;
- o segmento aceso nesta figura  de segmento 5;
- o segmento aceso nesta figura  de segmento 6;
- e o segmento aceso nesta figura  de segmento 7.

Também diremos que um *segmento está funcionando* quando este segmento liga e desliga corretamente. Além disso, quando dissermos que um *número tem um segmento acesso ou apagado*, estamos nos referindo a representação deste número no visor do elevador do prédio de José Luiz.

- (a) Quando José Luiz entrou no elevador, ele estava em um andar, que foi indicado no visor como sendo o . Vamos começar analisando quais andares não podem ser este.



Note que este andar não pode ser:

- 1) o andar zero ou térreo, pois sabemos que o segmento 3 está funcionando, já que ele aparece aceso quando o elevador se move para o próximo andar, ou seja, se o andar de entrada de José Luiz fosse o zero, o segmento 3 também deveria estar aceso no visor, e não está;
- 2) o primeiro andar, pois o número 1 tem o segmento 1 apagado;
- 3) o segundo andar, pois o número 2 tem o segmento 1 apagado;
- 4) o terceiro andar, pois o número 3 tem o segmento 1 apagado;
- 5) o quarto andar, pois sabemos que o segmento 3 está funcionando e, se o andar de entrada de José Luiz fosse o quarto, o segmento 3 também deveria estar aceso no visor;
- 6) o sétimo andar, pois o número 7 tem o segmento 1 apagado;
- 7) o oitavo andar, pois sabemos que o segmento 3 está funcionando e, se o andar de entrada de José Luiz fosse o oitavo, o segmento 3 também deveria estar aceso no visor;
- 8) o nono andar, pois sabemos que o segmento 3 está funcionando e, se o andar de entrada de José Luiz fosse o nono, o segmento 3 também deveria estar aceso no visor.

Sendo assim, a nossa conclusão é que os possíveis andares de entrada de José Luiz no elevador são o 5 e o 6.

Vamos analisar agora se o andar de entrada no elevador pode ser o 5.


Neste caso, o próximo andar só pode ser 4 ou 6. No entanto, o quarto andar não é possível, pois o segmento 1 está funcionando e, portanto, o visor deveria estar

mostrando  em vez de .

O andar 6 também não é possível, já que no número 6 o segmento 3 deve estar apagado e não aceso.



Conclusão 1: O andar de entrada de José Luiz no elevador foi o 6.

Sabendo que ele entrou no elevador no sexto andar, o próximo andar por onde o elevador passou só pode ser o 5 ou o 7. No entanto, o quinto andar não é possível,

pois não faria acender o segmento 3 em .

Conclusão 2: O segundo andar que José Luiz passou foi o 7.

Agora, sabendo que o segundo andar que José Luiz passou foi o 7, o próximo andar que o elevador poderá ir só pode ser o 6 ou o 8. No entanto, o oitavo andar não é possível, pois como o segmento 3 está funcionando o visor deveria estar

mostrando  em vez de .


Conclusão 3: O terceiro andar que José Luiz passou foi o 6.

Por fim, sabendo que o terceiro andar que José Luiz passou foi o 6, o próximo andar que o elevador poderá ir só pode ser o 5 ou o 7. No entanto, o sétimo andar não é possível, pois no 7 o segmento 1 não acende.

Conclusão 4: O quarto andar que José Luiz passou foi o 5.

Portanto, o elevador passou pelos seguintes andares nesta ordem: 6, 7, 6 e 5.

- (b) Pelo item (a) deste exercício, sabemos que, quando o elevador passou pelo andar

6, o visor mostrou . Logo, os segmentos 2, 4, 5, 6 e 7 estão com defeito. Os segmentos 1 e 3 estão funcionando, pois, pelo item (a), sabemos que eles acenderam corretamente.

Portanto, os segmentos do visor que estão com defeito são os segmentos 2, 4, 5, 6 e 7.

Problema 2. Note que a área de um dos triângulos EBF , FCG , GDH , HAE , IFJ , JGK , KHL ou LEI (que são iguais) pode ser obtida da seguinte maneira: subtraímos a área do quadrado $IJKL$ da área do quadrado $ABCD$, e dividimos este valor por 8. Desta forma, se denotarmos por A_{\triangle} a área de cada um dos triângulos EBF , FCG , GDH , HAE , IFJ , JGK , KHL ou LEI , temos que

$$A_{\triangle} = \frac{100 - 50}{8} = \frac{50}{8} = \frac{25}{4}.$$

Agora, observe que a área do quadrado $EFGH$ pode ser obtida somando a área do quadrado $IJKL$ às áreas dos triângulos KHL , JGK , IFJ e LEI . Ou seja, se denotarmos por A_{\square} a área do quadrado $EFGH$, temos que

$$A_{\square} = 50 + \left(4 \times \frac{25}{4} \right) = 50 + 25 = 75.$$

Portanto, a área do quadrado $EFGH$ é 75 cm^2 .

Problema 3. Precisamos calcular o resto da divisão de $\underbrace{111 \cdots 111}_{2016 \text{ algarismos}}$ por 7, como o número $\underbrace{111 \cdots 111}_{2016 \text{ algarismos}}$ é muito grande, vamos analisar o que acontece quando dividimos um número parecido com ele, mas menor, por 7:

- 1 algarismo 1: $1 = 0 \times 7 + 1$;
- 2 algarismos 1: $11 = 1 \times 7 + 4$;
- 3 algarismos 1: $111 = 15 \times 7 + 6$;
- 4 algarismos 1: $1111 = 158 \times 7 + 5$;
- 5 algarismos 1: $11111 = 1587 \times 7 + 2$;
- 6 algarismos 1: $111111 = 15873 \times 7 + 0$, que é uma divisão exata!

Observe que ao continuar os cálculos, os restos vão se repetir:

- 7 algarismos 1: resto 1;
- 8 algarismos 1: resto 4;
- 9 algarismos 1: resto 6;
- 10 algarismos 1: resto 5;
- 11 algarismos 1: resto 2;
- 12 algarismos 1: resto zero.

Ou seja, os restos se repetem a cada 6 algarismos 1. Como 2016 é múltiplo de 6, pois $2016 = 336 \times 6$, temos 336 “blocos” de 6 algarismos 1 e o resto, portanto, é zero.

Problema 4. Resolução 1: Foram comprados $10 \times 40 \times 60 = 24000$ kg de ração para vacas e $20 \times 10 \times 60 = 12000$ kg de ração para cabras, que seriam suficientes para 60 dias.

A ração de vacas que foi trocada corresponde a $2 \times 40 \times 50 = 4000$ kg. Como a ração de cabras é mais barata e vale um quinto de quilo de ração para vacas, a quantidade de ração de cabras correspondente é $4000 \times 5 = 20000$ kg de ração a mais para as cabras.

Passando-se mais 20 dias, foram compradas 30 cabras, o que significa que nos próximos 30 dias (que completaria os 60 dias de ração suficiente), há 50 cabras para alimentar; 20 delas já têm ração, e as outras 30 precisam de $30 \times 10 \times 30 = 9000$ kg da ração extra.

Sobram, então, após os 60 dias, $20000 - 9000 = 11000$ kg de ração para alimentar 50 cabras. Como cada cabra come 10 kg por dia, 50 cabras comem $50 \times 10 = 500$ kg por dia.

Assim, tem-se $11000 \div 500 = 22$ dias para alimentar todas as cabras, após os 60 dias iniciais.

Portanto, a partir do dia em que as 30 cabras foram compradas, temos que a ração será suficiente para $30 + 22 = 52$ dias.

Resolução 2 (cálculos feitos a partir de 30 dias): Foram comprados $20 \times 10 \times 60 = 12000$ kg de ração para cabras, que seriam suficientes para 60 dias.

Nos primeiros 30 dias as cabras consomem $20 \times 30 \times 10 = 6000$ kg, e sobram outros 6000 kg.

A ração de vacas que foi trocada corresponde a $2 \times 40 \times 50 = 4000$ kg; como a ração de cabras é mais barata e vale um quinto de quilo de ração para vacas, a quantidade de ração de cabras correspondente é $4000 \times 5 = 20000$ kg de ração a mais para as cabras.

Então, após 30 dias (e 20 cabras), sobram $6000 + 20000 = 26000$ kg de ração para cabras.

A partir daí, é necessário alimentar 50 cabras, que comem $50 \times 10 = 500$ kg de ração por dia. Portanto, temos que a ração será suficiente para $26000 \div 500 = 52$ dias.

Problema 5. Vamos organizar todas as informações presentes no enunciado em um quadro, mas para isto vamos precisar usar alguns símbolos para denotar as quantidades desconhecidas.

Denote por \triangle o número de medalhas de prata do país A , por \square o número de medalhas de bronze do país B e por \heartsuit o número de medalhas de ouro do país C . Agora, vamos analisar algumas das informações usando estes símbolos:

- O número de medalhas de prata do país A , que é \triangle , é igual ao número de medalhas de prata do país B . Então, número de medalhas de prata do país B também é \triangle . Além disso, como o número de medalhas de prata do país A também é igual ao número de medalhas de ouro do país B , temos que o número de medalhas de ouro do país B também é \triangle .
- O número de medalhas de bronze do país B , que é \square , é igual ao número de medalhas de prata do país C . Assim, o número de medalhas de prata do país C também é \square . Além disso, como o número de medalhas de bronze do país B também é igual à metade do número de medalhas de ouro do país A , temos que o número de medalhas de ouro do país A será $2 \times \square$.
- O número de medalhas de bronze do país C é o triplo do seu número de medalhas de ouro. Como o número de medalhas de ouro do país C é \heartsuit , então o número de medalhas de bronze do país C é $3 \times \heartsuit$.

Desta forma, temos o seguinte quadro:

País	Ouro	Prata	Bronze	Total de medalhas
A	$2 \times \square$	\triangle	?	
B	\triangle	\triangle	\square	
C	\heartsuit	\square	$3 \times \heartsuit$	
Total de medalhas	21	21	21	63

Perceba que temos uma informação que ainda não foi utilizada, que o país A ganhou 7 medalhas de ouro a mais que o país C . Isto significa que o número de medalhas de ouro do país A , que é igual a $2 \times \square$, é igual ao número de medalhas de ouro do país C , que é \heartsuit , mais 7, ou seja:

$$2 \times \square = \heartsuit + 7.$$

Dessa última informação, podemos concluir que o valor de $2 \times \square$ é no mínimo 7, pois o menor valor possível para \heartsuit é zero.

Assim, \square deve ser um número (natural) maior ou igual a 4, pois:

$$2 \times 0 = 0 \neq 7, \quad 2 \times 1 = 2 \neq 7, \quad 2 \times 2 = 4 \neq 7, \quad 2 \times 3 = 6 \neq 7 \quad \text{e} \quad 2 \times 4 = 8 > 7.$$

No entanto, veja que \square não pode ser igual a 4, já que da terceira coluna do quadro acima temos que $\triangle + \triangle + \square = 21$. Logo, se $\square = 4$, então $2 \times \triangle = 17$, o que não ocorre pois 17 é ímpar.

Vamos analisar se é possível termos $\square = 5$. Da terceira coluna do quadro acima temos que $\triangle + \triangle + \square = 21$, e, como estamos supondo que $\square = 5$, temos que $2 \times \triangle = 16$. Sendo assim, $\triangle = 8$.

Vamos colocar todas estas informações no quadro.

País	Ouro	Prata	Bronze	Total de medalhas
<i>A</i>	10	8	?	
<i>B</i>	8	8	5	
<i>C</i>	\heartsuit	5	$3 \times \heartsuit$	
Total de medalhas	21	21	21	63

Deste modo, pelas informações da segunda coluna, temos que $10 + 8 + \heartsuit = 21$. Logo, $\heartsuit = 3$ e com isto conseguiremos completar mais algumas informações do quadro.

País	Ouro	Prata	Bronze	Total de medalhas
<i>A</i>	10	8	?	
<i>B</i>	8	8	5	
<i>C</i>	3	5	9	
Total de medalhas	21	21	21	63

Agora, veja que da última coluna do quadro temos que $? + 5 + 9 = 21$, logo $? = 7$. Como as informações encontradas no quadro são compatíveis com todas as informações dadas, temos que o número de medalhas de bronze do país *A* é 7.

Uma pergunta interessante é se este valor encontrado é único, e é. Já vimos que o menor valor possível para \square é 5, e disto segue que o maior valor possível para \triangle é 8. Se \triangle for qualquer valor entre zero e 7, inclusive zero e 7, então, pela terceira coluna do primeiro quadro, \square deveria ser maior do que 5.

Também temos da quarta coluna do nosso primeiro quadro que o valor máximo para o \heartsuit é 7, já que a soma dos valores de uma coluna deve ser igual a 21. Assim, da equação

$$2 \times \square = \heartsuit + 7$$

temos que $2 \times \square$ é no máximo 14, ou seja, \square é no máximo 7.

Portanto, temos que nos certificar que \square não pode ser igual a 6 ou 7. Vamos analisar cada uma destas possibilidades:

- $\square = 6$: da terceira coluna do primeiro quadro teríamos que $\triangle + \triangle + 6 = 21$, ou seja, $2 \times \triangle = 15$, o que nunca ocorre, pois 15 é ímpar. Portanto, \square não pode ser igual a 6.
- $\square = 7$: da terceira coluna do primeiro quadro teríamos que $\triangle + \triangle + 7 = 21$, ou seja, $2 \times \triangle = 14$ e, portanto, $\triangle = 7$. Agora, usando a segunda coluna do nosso primeiro quadro e os fatos que $\square = 7$ e $\triangle = 7$, concluímos que $\heartsuit = 0$. No entanto, isto contradiz a equação

$$2 \times \square = \heartsuit + 7,$$

pois teríamos que 14 é igual a 7.

Assim, o único valor possível para \square é 5.

Portanto, o número de medalhas de bronze do país A é 7.

Nível 2

Problema 1. A divisão por 7 permite apenas sete restos: 0 (divisão exata), 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Efetuando a divisão do número dado (pelo algoritmo), em algum dos passos da divisão um dos possíveis restos irá se repetir e então teremos um padrão de repetição dos restos. Note que:

$$\begin{array}{r}
 111111 \dots 1 \quad | \quad 7 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 41 \qquad \qquad \qquad 15873 \\
 61 \\
 51 \\
 21 \\
 0\dots
 \end{array}$$

Portanto, o número 111.111 é múltiplo de 7. Como o número dado é composto apenas pelos algarismos 1's colocados lado a lado, basta ver agora quantos "blocos" de seis algarismos 1 temos no número dado. Para isso dividimos 2016 por 6, já que existem 2016 algarismos 1 no número dado. Fazendo a divisão obtemos como quociente 336 e resto zero. Logo, o número $\underbrace{111\dots 111}_{2016 \text{ algarismos}}$ é múltiplo de 7.

Resposta: O resto da divisão de $\underbrace{111\dots 111}_{2016 \text{ algarismos}}$ por 7 é zero.

Problema 2. Denotando por O_X o número de medalhas de ouro do país X (X sendo A , B ou C), por P_X o número de medalhas de prata do país X e por B_X o número de medalhas de bronze do país X , os dados do problema permitem montar um sistema de 9 equações com 9 incógnitas:

De (1) temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} O_A + O_B + O_C = 21 \\ P_A + P_B + P_C = 21 \\ B_A + B_B + B_C = 21 \end{cases} \quad (1)$$

De (2) temos que

$$P_A = P_B = O_B. \quad (2)$$

De (3) segue que

$$B_B = P_C = \frac{O_A}{2}. \quad (3)$$

Da informação (4) temos que

$$B_C = 3 \cdot O_C \quad (4)$$

e (5) nos diz que

$$O_A = O_C + 7. \quad (5)$$

Então, da segunda equação do sistema (1) e de (2) temos que

$$2 \cdot O_B + P_C = 21. \quad (6)$$

De (6) e (3), temos:

$$2 \cdot O_B + \frac{O_A}{2} = 21. \quad (7)$$

Da primeira equação do sistema (1) e (5) temos:

$$2 \cdot O_A + O_B = 28. \quad (8)$$

De (7) e (8) obtemos:

$$O_B = 8 \text{ e } O_A = 10. \quad (9)$$

De (2) e (9) obtemos:

$$P_A = 8 \text{ e } P_B = 8. \quad (10)$$

De (3) e (9) obtemos:

$$B_B = 5 \text{ e } P_C = 5. \quad (11)$$

De (10) e (9) obtemos:

$$O_C = 3. \quad (12)$$

De (4) e (12) obtemos:

$$B_C = 9. \quad (13)$$

E finalmente, de (13) e (11) obtemos:

$$B_A = 7.$$

Resposta: O país *A* conquistou 7 medalhas de bronze.

Problema 3. Temos que $A_{ABCD} = 100 \text{ cm}^2 = 1 \text{ dm}^2$. Logo, $AB = 1 \text{ dm}$ e também $A_{IJKL} = 50 \text{ cm}^2 = \frac{1}{2} \text{ dm}^2$, portanto $LI = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dm}$.

A área de cada um dos 8 triângulos de mesma área é igual a

$$A_{\Delta} = (A_{ABCD} - A_{IJKL}) \cdot \frac{1}{8} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \text{ dm}^2$$

e a área do quadrado $EFGH$ é igual a

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\Delta} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Como $EFGH$ é um quadrado, então $A_{EFGH} = EF \cdot GH = GH^2 = \frac{3}{4}$, portanto $GH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dm}$.

Note agora que os triângulos IFJ , JGK , KHL e LEI são congruentes (têm hipotenusas congruentes, lado do quadrado $IJKL$ e ângulos congruentes).

Então, sendo $KG = x$, teremos $HL = KG = x$ e $HK = HG - x = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$.

Portanto,

$$A_{\Delta} = \frac{HL \cdot HK}{2} = \frac{x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x - x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow 8x^2 - 4\sqrt{3}x + 1 = 0,$$

o que nos dá

$$x = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48 - 32}}{16} = \frac{4\sqrt{3} \pm 4}{16} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \\ \frac{\sqrt{3} + 1}{4} \end{cases}.$$

Como $KG < HK$, tomamos

$$KG = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \text{ dm} = \frac{5(\sqrt{3} - 1)}{2} \text{ cm}.$$

Resposta: KG mede $\frac{\sqrt{3} - 1}{4} \text{ dm}$ ou $\frac{5(\sqrt{3} - 1)}{2} \text{ cm}$.

Problema 4. Sejam G_1, G_2 e G_3 os goleiros. Iremos denominar cada time pelo seu respectivo goleiro, ou seja, nos referiremos aos times G_1, G_2 e G_3 .

Vamos agora contar o número de maneiras que os três jogadores muito bons podem se distribuir pelos três times.

- 3 possibilidades para o time G_1 .
- 2 possibilidades para o time G_2 , visto que um jogador muito bom já foi escolhido para o time G_1 .
- 1 possibilidade para o time G_3 , visto que um jogador muito bom já foi escolhido para o time G_1 e outro para o time G_2 .

Portanto, há $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras distintas de se escolher os jogadores muito bons.

Uma vez escolhidos os goleiros e jogadores muito bons, percebe-se que nos restam contar os demais jogadores. Os 6 jogadores restantes podem se distribuir pelos 3 times da seguinte maneira:

- 6 possibilidades para uma posição e 5 possibilidades para a outra no time G_1 .

Note que, seriam $6 \cdot 5 = 30$ possibilidades, mas ocorre que se o jogador A fica na primeira posição e o jogador B na segunda, é o mesmo que B na primeira e A na segunda. Portanto, há de fato $\frac{30}{2} = 15$ possibilidades de distribuição para o time G_1 .

- 4 possibilidades para uma posição e 3 possibilidades para a outra no time G_2 .

Totalizando, para o time G_2 , $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ possibilidades. Ao prosseguirmos com o mesmo argumento, iremos concluir que existe apenas uma única possibilidade para o time G_3 .

No total, há

$$6 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 540$$

formas de organizar os três times.

Resposta: É possível organizar os três times de 540 maneiras.

Problema 5. Suponhamos que 2016 possa ser escrito como a soma dos quadrados de dois números primos, ou seja, suponha que existem números primos p e q , tais que

$$2016 = p^2 + q^2.$$

Veja que da equação acima segue que um dos primos, por exemplo p , não pode ser igual a 2, pois caso contrário

$$2016 = 2^2 + q^2 \Rightarrow q^2 = 2012,$$

e disto segue que q é par, o que não é possível porque só existe um número primo par, a saber 2.

Portanto, p e q são primos ímpares e seus quadrados só podem terminar em 1 ($1^2 = 1$ e $9^2 = 81$), 5 ($5^2 = 25$) e 9 ($3^2 = 9$ e $7^2 = 49$).

A única possibilidade para que a soma $p^2 + q^2$ dê 2016 (final 6), seria com p^2 final 1 e q^2 final 5. Porém, o quadrado de um primo com final 5 ocorre somente se esse primo for 5.

Dessa forma, suponha sem perda de generalidade que $q = 5$, então $2016 = p^2 + 25$, logo $p^2 = 1991 = 11 \cdot 181$, no entanto $11 \cdot 181$ não é um quadrado perfeito.

Logo, 2016 **NÃO** pode ser escrito como soma dos quadrados de dois primos.

Nível 3

Problema 1. Tome $x \in \mathbb{R}$. Seja $f(x) = y$. A condição (1) significa que $y \cdot [y + 1 - x^2] = x^2$, ou seja,

$$y^2 + (1 - x^2)y - x^2 = 0.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(1 - x^2) \pm \sqrt{(1 - x^2)^2 + 4x^2}}{2} = \frac{-(1 - x^2) \pm \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}{2} = \\ &= \frac{-(1 - x^2) \pm (1 + x^2)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se $y = -1$ ou $y = x^2$. Noutras palavras, deve ser $f(x) = x^2$ ou $f(x) = -1$, para cada x real.

Há uma infinidade de soluções satisfazendo as duas igualdades acima. Por exemplo, a função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\infty < x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}.$$

Porém, essa função não satisfaz (2). As únicas funções que satisfazem (1) e (2) simultaneamente são, como se vê facilmente,

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = -1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases},$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases},$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x = 0 \\ -1, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Problema 2. Vamos analisar um número genérico de quatro algarismos $abcd$ e, sob hipótese de $abcd$ ser bidivisível, concluir quais características $abcd$ deve possuir. Assim, poderemos contar quantos números de quatro algarismos cumprem as condições necessárias/suficientes para ser bidivisíveis.

Da hipótese do enunciado, sabemos que $abcd$ é um múltiplo de ab e de cd . Ou seja, existem inteiros m e n tais que

$$abcd = m \cdot ab \text{ e } abcd = n \cdot cd.$$

Deste modo, $ab \mid abcd$ e $cd \mid abcd$ (lê-se “ ab divide $abcd$ ” e “ cd divide $abcd$ ”).

Nossa notação nos permite perceber que o número $abcd$ pode ser escrito como $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$, portanto $abcd = ab \cdot 10^2 + cd$. Atenção: aqui a notação ab e cd está significando o mesmo que na observação do enunciado, isto é, $ab = 10 \cdot a + b$, e $cd = 10 \cdot c + d$.

Agora, sabendo que $ab \mid abcd$ e que $abcd = ab \cdot 10^2 + cd$, podemos concluir que como $ab \mid (ab \cdot 10^2 + cd)$, devemos ter $ab \mid cd$. Por um raciocínio similar, é possível perceber que de $cd \mid abcd$ e $abcd = ab \cdot 10^2 + cd$ obtemos $cd \mid (ab \cdot 10^2)$. Temos então as seguintes relações:

$$ab \mid cd \text{ e } cd \mid (ab \cdot 10^2).$$

A primeira delas garante que existe um número inteiro k tal que $ab \cdot k = cd$. Substituindo isso na segunda relação, notamos que $(ab \cdot k \mid (ab \cdot 10^2))$, o que implica que $k \mid 10^2$. Ora, não existem muitos divisores de 100, então podemos ver que $k \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$.

Lembre-se agora que tanto ab quanto cd são números de dois algarismos: ou seja, $ab, cd \in \mathbb{G} = \{10, 11, 12, \dots, 97, 98, 99\}$. Portanto, como $ab \cdot k = cd$, é necessário que

$$9 < ab \cdot k < 100,$$

afinal $9 < cd < 100$. Perceba agora como $k \neq 100$: se fosse o caso, mesmo que ab fosse 10 (seu menor valor possível), $cd = ab \cdot k > 100$. O mesmo raciocínio exclui da lista de possíveis valores de k os números 50, 25, 20 e 10. Assim sendo, $k \in \{1, 2, 4, 5\}$.

Se $k = 5$, ab não pode ser qualquer número de dois algarismos: como $ab \cdot k < 100$, devemos ter $ab < 20$. Ou seja, $ab \in \{10, 11, \dots, 18, 19\}$. Porém perceba como, se $ab \in \{10, 11, \dots, 18, 19\}$, 1, 2 e 4 também são possíveis valores de k . Portanto, caso

$9 < ab < 20$, existem $4 \cdot 10 = 40$ possíveis números bidivisíveis: 10 opções para ab , e quatro opções de k .

Considerando agora que $ab \in \{20, 21, 22, 23, 24\}$, temos 5 possibilidades para ab e 3 opções para k : como $19 < ab < 25$, $k \leq 4$. Ou seja, para esse ab , temos $5 \cdot 3 = 15$ números bidivisíveis.

Caso $ab \in \{25, 26, \dots, 48, 49\}$, temos $24 < ab < 50$ (nos fornecendo 25 opções de ab), e assim $k \leq 2$ (logo temos duas possibilidades de k). Dessa maneira, para esta situação existem $25 \cdot 2 = 50$ números bidivisíveis.

Por fim, se $ab \in \{50, 51, \dots, 98, 99\}$, devemos ter $k = 1$, tendo assim 50 possíveis números bidivisíveis. Assim sendo, concluímos finalmente que existem $40 + 15 + 50 + 50 = 155$ números bidivisíveis de 4 algarismos.

Problema 3. Começemos notando que $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Dessa maneira, tanto x quanto y e z devem ter *apenas* 2, 3 e 7 como fatores primos. Dada uma tripla (x, y, z) de números inteiros cujo produto é 2016, temos que

$$x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3};$$

$$y = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 7^{\beta_3};$$

$$z = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 7^{\gamma_3},$$

em que todos os coeficientes α, β e γ são inteiros. Sabendo disso, percebemos rapidamente que

$$x \cdot y \cdot z = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 7^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7,$$

o que dá origem ao seguinte sistema de 3 equações com 3 variáveis:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 5 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 2 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Deste modo, veja que queremos calcular o número de *partições ordenadas* dos números 1, 2 e 5 em números inteiros não-negativos.

Resolução 1: Perceba como isso significa que, dos números α_3, β_3 e γ_3 , um deles deve ser 1 e os outros dois, obrigatoriamente, zero. Portanto, vamos começar supondo

que $\alpha_3 = 1$ e $\beta_3 = \gamma_3 = 0$, para então calcular o número de possibilidades de triplas para esta situação, e por fim multiplicar esse resultado por 3.

Primeiro, calculemos o número de soluções inteiras não-negativas da equação $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 2$: possíveis soluções são $1+1+0=2$, $0+2+0=2$, entre várias outras possíveis: o número somado à esquerda é sempre o mesmo (2), porém o que muda é como esse número está disposto entre as variáveis α_2, β_2 e γ_2 . Podemos traduzir isso da seguinte maneira: queremos dividir, entre três pessoas, dois diamantes:. As soluções exemplificadas anteriormente estão dispostas abaixo:

$$\diamond + \diamond + = \diamond \diamond$$

$$+ \diamond \diamond + = \diamond \diamond$$

Dessa maneira, podemos perceber que calcular o número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 2$$

equivale a calcular o número de possíveis permutações de dois diamantes com dois sinais de soma. Essa permutação é dada por $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$.

Um raciocínio similar nos permite concluir que o número de soluções não-negativas da equação $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 5$ é $P_7^{2,5} = 21$.

Assim sendo, temos 21 possíveis soluções para a primeira equação e 6 soluções para a segunda. Logo existem $21 \cdot 6 = 126$ possíveis soluções para o sistema (\star) . Multiplicando esse número por 3 (como explicado no começo da resolução), obtemos um total de 378 possíveis triplas ordenadas.

Resolução 2: Vamos escrever as partições de 5 em ordem não crescente e considerar as possíveis permutações:

Partição (de 5)	Permutações
5, 0, 0	3
4, 1, 0	6
3, 2, 0	6
3, 1, 1	3
2, 2, 1	3
Total	21

Idem para as partições de 2:
e de 1:

Partição (de 5)	Permutações
2, 0, 0	3
1, 1, 0	3
Total	6

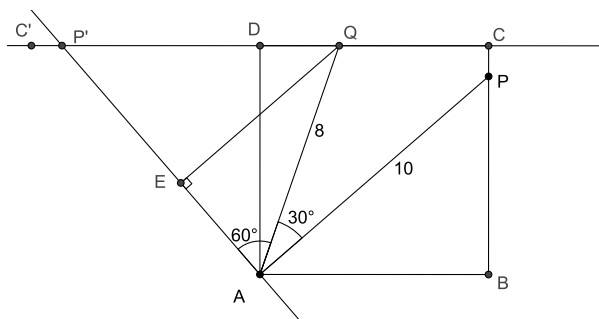
Partição (de 5)	Permutações
1, 0, 0	3
Total	3

Assim, teremos $21 \cdot 6 \cdot 3 = 378$ triplas.

Portanto, existem 378 triplas ordenadas satisfazendo a condição descrita.

Problema 4. Vamos apresentar duas resoluções para este problema.

Resolução 1: Sejam P' e C' os pontos resultantes da rotação de 90° (sentido anti-horário) dos pontos P e C , respectivamente, em torno do ponto A . Então a reta $C'P'$ coincide com a reta CD (e B é levado em D):



Então $AP' = AP = 10$ e $\hat{P'AQ} = 60^\circ$.

Seja $QE \perp AP'$ com E em AP' . Então, como $\hat{P'AQ} = 60^\circ$, temos que

$$\frac{AE}{AQ} = \cos(60^\circ) \implies \frac{AE}{8} = \frac{1}{2} \implies AE = 4.$$

Logo, $EP' = 6$. Segue do Teorema de Pitágoras aplicado ao $\triangle AQE$, que

$$QE^2 = AQ^2 - AE^2 = 8^2 - 4^2 = (8 - 4)(8 + 4) = 4 \cdot 12 = 48.$$

Logo, $QE = 4\sqrt{3}$.

Portanto, a área de $\triangle P'QA$ é igual a:

$$A_{\triangle P'QA} = \frac{AP' \cdot QE}{2} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao $\triangle P'QE$ temos:

$$P'Q^2 = EP'^2 - QE^2 = 6^2 + 48 = 84 \Rightarrow P'Q = 2\sqrt{21}.$$

Usando o valor calculado da área do $\triangle P'QA$, temos

$$20\sqrt{3} = A_{\triangle P'QA} = \frac{P'Q \cdot AD}{2} = \frac{2\sqrt{21} \cdot AD}{2} = AD\sqrt{21}.$$

Logo,

$$AD = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{20 \cdot 3\sqrt{7}}{21} = \frac{20\sqrt{7}}{7} = AB.$$

Resolução 2: Denote por $l = AB$ o lado do quadrado e sejam $\alpha = \widehat{DAQ}$ e $\beta = \widehat{PAB}$, assim $\alpha + \beta = 60^\circ$. Também vemos que $\cos \alpha = \frac{l}{8}$ e $\cos \beta = \frac{l}{10}$. Portanto

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Ou ainda

$$\frac{l}{8} \frac{l}{10} - \sqrt{1 - \left(\frac{l}{8}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{l}{10}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Isolando-se as raízes quadradas e elevando ao quadrado temos

$$\left(1 - \left(\frac{l}{8}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{l}{10}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{8} \frac{l}{10}\right)^2,$$

o que resulta em

$$1 - \left(\frac{l}{8}\right)^2 - \left(\frac{l}{10}\right)^2 + \left(\frac{l}{8} \frac{l}{10}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{l}{8} \frac{l}{10} + \left(\frac{l}{8} \frac{l}{10}\right)^2,$$

ou, após as simplificações,

$$\frac{3}{4} = \frac{l^2}{64} + \frac{l^2}{100} - \frac{l^2}{80},$$

$$\frac{l^2(5^2 + 2^4 - 2^2 \cdot 5)}{2^6 \cdot 5^2} = \frac{3 \cdot 2^4 \cdot 5^2}{2^6 \cdot 5^2}.$$

Finalmente

$$21l^2 = 3 \cdot 2^4 \cdot 5^2 \Rightarrow l^2 = \frac{2^4 \cdot 5^2}{7} \Rightarrow l = \frac{20}{\sqrt{7}} = \frac{20\sqrt{7}}{7}.$$

Problema 5. Podemos escrever $n!$ da seguinte maneira:

$$n! = \underbrace{[1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (a-1) \cdot a]}_{\text{fator 1}} \cdot \underbrace{[(a+1)(a+2) \cdot \dots \cdot (2a-1)(2a)]}_{\text{fator 2}}$$

$$\dots \underbrace{[((b-1)a+1)((b-1)a+2) \cdot \dots \cdot ((b-a)a+a-1)(ba)]}_{\text{fator } b}. (*)$$

Ora, cada uma desses fatores é, por sua vez, o produto de a fatores. Além disso, para cada $m \in \{1, 2, \dots, b\}$, o m -ésimo fator é igual a

$$\underbrace{(ma - (a-1))}_{\text{fator 1}} \cdot \underbrace{(ma - (a-2))}_{\text{fator 2}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(ma - 1)}_{\text{fator } a-1} \cdot \underbrace{(ma)}_{\text{fator } a}.$$

Agora, dado $k \in \{1, 2, \dots, a\}$, vê-se que o k -ésimo termo do m -ésimo fator satisfaz

$$ma - (a - k) \geq ma - m(a - k) = mk. (**)$$

Isso garante que o m -ésimo fator em $(*)$ é maior do que ou igual a

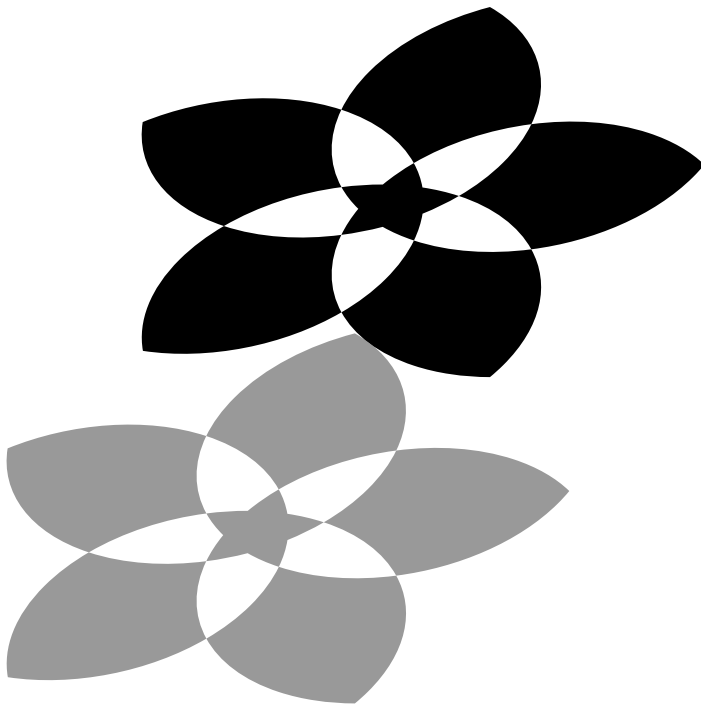
$$m(2m)(3m) \cdot \dots \cdot (am) = m^a \cdot a!.$$

Daí, obtemos

$$n! \geq a! \cdot (2^a \cdot a!) \cdot (3^a \cdot a!) \cdot \dots \cdot ((b-1)^a \cdot a!) \cdot b^a \cdot a! = (b!)^a \cdot (a!)^b,$$

como queríamos. Finalmente, a igualdade em $(**)$ é válida se, e somente se, $m = 1$ ou $k = a$, o que equivale a dizer que m ou k não podem assumir mais de um valor. Mas $m \in \{1, 2, \dots, b\}$ e $k \in \{1, 2, \dots, a\}$.

Segue que, para que seja válida a igualdade solicitada, é necessário e suficiente que $a = n$ ou $b = n$.

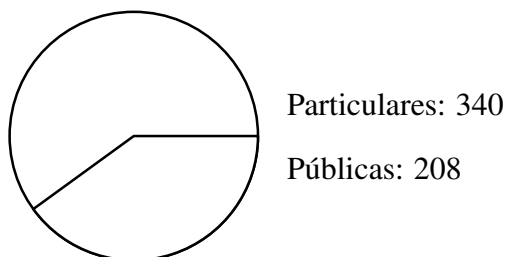


VI ORMM (2016)

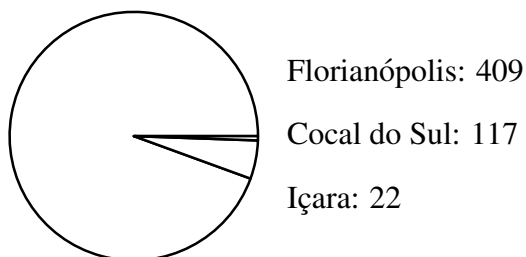
VI ORMM em Números

Na VI Olimpíada Regional Mirim de Matemática participaram 548 alunos do quinto ano do ensino fundamental, oriundos de 4 escolas particulares e 5 escolas públicas de Florianópolis, Cocal do Sul e Içara. A distribuição de alunos por escolas e cidades é mostrada abaixo.

Total de alunos participantes, separados por escolas particulares e públicas



Total de alunos participantes, separados por cidades



Premiados

Na cerimônia de premiação da ORMM, foram premiados 42 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 7,47% dos alunos que participaram da ORMM): 7 com medalhas de ouro, 4 com medalhas de prata, 5 com medalhas de bronze e 26 com menções honrosas.

Ouro

- Davi Tancredi Lopes (Florianópolis)
- Gabriel Tridapalli Ferraz da Silva (Florianópolis)
- Júlia Battisti Santos (Florianópolis)
- Laura Grazziotin Poletto (Florianópolis)
- Leonardo Carvalho de Luca (Florianópolis)
- Mariana Jann Luna (Florianópolis)
- Nicolas Silveira dos Santos (Florianópolis)

Prata

- Amanda Bahi Joaquim (Florianópolis)
- Cristian Gerken Kogachi (Florianópolis)
- Davi Elias Barsalini Martins (Florianópolis)
- Gabriel Matias Silva (Florianópolis)

Bronze

- Caio Faria Noronha (Florianópolis)
- Daigo Sampaio (Florianópolis)
- João Vitor Tieppo Hamagushi (Florianópolis)
- Luisa Bastos Gasparino da Silva (Florianópolis)

- Pedro Uzêda de Freitas (Florianópolis)

Menção Honrosa

- Alice Polenz Wielehicki (Florianópolis)
- Amanda Laske Triches (Florianópolis)
- Ana Carolina Vieira Marcondes Bories (Florianópolis)
- Ângela Carolina Regiani Stawny (Florianópolis)
- Arthur Costa Lemos (Florianópolis)
- Beatriz Reis Repette (Florianópolis)
- Caua Teixeira de Oliveira (Cocal do Sul)
- Enrico Catapan Narciso (Florianópolis)
- Gabriela Brasil Novello (Florianópolis)
- Gabriela Padoin (Florianópolis)
- Henrique Pereira Costa (Florianópolis)
- Isabela Brincas Corrêa (Florianópolis)
- João Gabriel de Souza Vieira (Florianópolis)
- João Pedro da Silveira Moritz (Florianópolis)
- Júlia Figueiroa Padilha (Florianópolis)
- Lucas Frasson Gabriel (Içara)
- Lucas Kreis Taglieber Vasconcellos (Florianópolis)
- Lucas Siqueira Dornelles (Florianópolis)
- Matheus Silveira de Oliveira (Florianópolis)
- Miguel Gomes Ricardo Miranda (Cocal do Sul)

- Milena Carpes Dantas Midões (Florianópolis)
- Murilo Pacheco Ribeiro (Cocal do Sul)
- Nicolas Pini (Florianópolis)
- Sofia Marques (Florianópolis)
- Victor Hugo Fernandes Martins (Florianópolis)

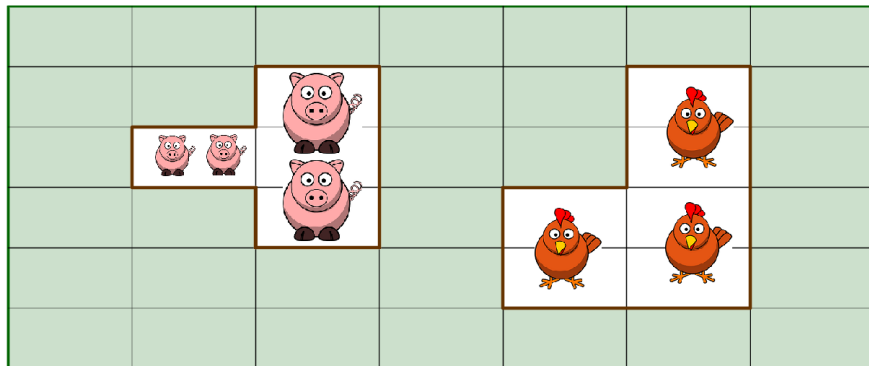
Prova

Problema 1. Em uma gincana da Escola Euclides uma das provas é arrecadar o maior número de latas ou garrafas de refrigerante vazias para reciclagem. As latas e garrafas arrecadadas por uma equipe devem ser colocadas em caixas. Em uma caixa cabem 20 latas ou 12 garrafas e uma caixa só pode ser entregue se estiver cheia. A equipe Paralela arrecadou apenas latas e a equipe Perpendicular arrecadou apenas garrafas. O número de latas que a equipe Paralela arrecadou foi igual ao número de garrafas que a equipe Perpendicular arrecadou. Sabendo que este número está entre 1 e 100, quantas caixas cada equipe entregou?

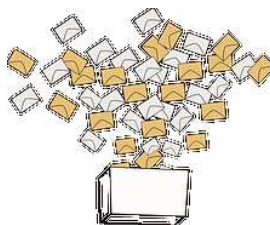
Problema 2. O rio Lavatudo transbordou, inundando a aldeia de Socavento. A água sobe 62 cm por hora e está acima do nível do rio há três horas. Neste momento, uma cegonha cansada pousa em cima da chaminé de uma casa da aldeia que está no nível do rio e decide dormir em pé ali mesmo. A altura desta casa, sem considerar a chaminé, é $4,10\text{ m}$. A altura da parte externa da chaminé é 55 cm . A cegonha acordou quando a água do rio tocou os seus pés. Quanto tempo a cegonha dormiu?



Problema 3. Rodrigo tem um terreno dividido em lotes retangulares todos do mesmo tamanho. O comprimento do maior lado de cada lote retangular é igual ao dobro do comprimento do menor lado. Ele construiu dois cercados, como na figura abaixo, para abrigar os seus animais: porcos e galinhas. Se o perímetro do cercado dos porcos tem 140 m , qual é o perímetro do cercado das galinhas?



Problema 4. Três candidatos concorreram à eleição de representante de uma turma do 5º ano: Aisha, Fernando e William. Cada aluno da turma votou em um único candidato da sua escolha. Aisha recebeu $\frac{1}{3}$ dos votos e Fernando $\frac{2}{9}$ recebeu dos votos. Quem venceu a eleição?



Resolução da Prova

Problema 1. O número de latas que a equipe Paralela entregou é um múltiplo de 20 (20 latas em cada caixa), e o número de garrafas que a equipe Perpendicular entregou é um múltiplo de 12 (12 garrafas em cada caixa). Como estes números são iguais, devemos encontrar um múltiplo de 12 que seja também um múltiplo de 20, e que esteja entre 1 e 100. Vamos listar os múltiplos de 12 entre 1 e 100:

12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96.

O número procurado é 60, pois $60 = 5 \times 12$, $60 = 3 \times 20$ e 60 é o único múltiplo de 20 na lista acima. Isto significa que a equipe Paralela entregou 3 caixas e a equipe Perpendicular entregou 5 caixas.

Resposta: A equipe Paralela entregou 5 caixas e a equipe Perpendicular entregou 3 caixas.

Problema 2. Vamos calcular a altura da casa em centímetros: 4,10 m corresponde a 410 cm. Então a altura da casa acrescida da chaminé é $410 + 55 = 465$ cm. Como a água está acima do nível do rio há 3 horas e sobe 62 cm por hora, no momento que a cegonha pousou a água havia subido $62 \times 3 = 186$ cm. Para a água atingir o ponto mais alto da casa (onde a cegonha dormia), faltavam $465 - 186 = 279$ cm. O rio sobe 62 cm por hora; então em $279 \div 62 = 4,5$ horas a água atingirá os pés da cegonha.

Resposta: A cegonha dormiu 4,5 horas.

Problema 3. Cada lote retangular possui dois lados grandes e dois lados pequenos. Observe que o cercado dos porcos é formado por 4 lados grandes e 6 lados pequenos destes lotes. Como o comprimento do maior lado de cada retângulo é o dobro do comprimento do menor lado, podemos dizer que o cercado dos porcos é formado por 14 lados pequenos, pois $6 + (2 \times 4) = 6 + 8 = 14$ (6 lados pequenos e 4 grandes). Assim, se o perímetro do cercado dos porcos tem 140 m e ele é igual à soma destes 14 lados pequenos, temos que o comprimento de cada lado pequeno do lote é $140 \div 14 = 10$ metros. Portanto, o comprimento de cada lado grande do lote é $10 \times 2 = 20$ metros.

Sabendo o comprimento dos lados de cada um dos lotes, agora resta-nos descobrir quantos destes lados formam o cercado das galinhas: 4 lados grandes e 8 lados pequenos. Então, o perímetro do cercado das galinhas é igual a

$$4 \times 20 + 8 \times 10 = 80 + 80 = 160 \text{ metros.}$$

Resposta: O perímetro do cercado das galinhas é 160 m.

Problema 4. A soma dos votos de Aisha e Fernando corresponde a

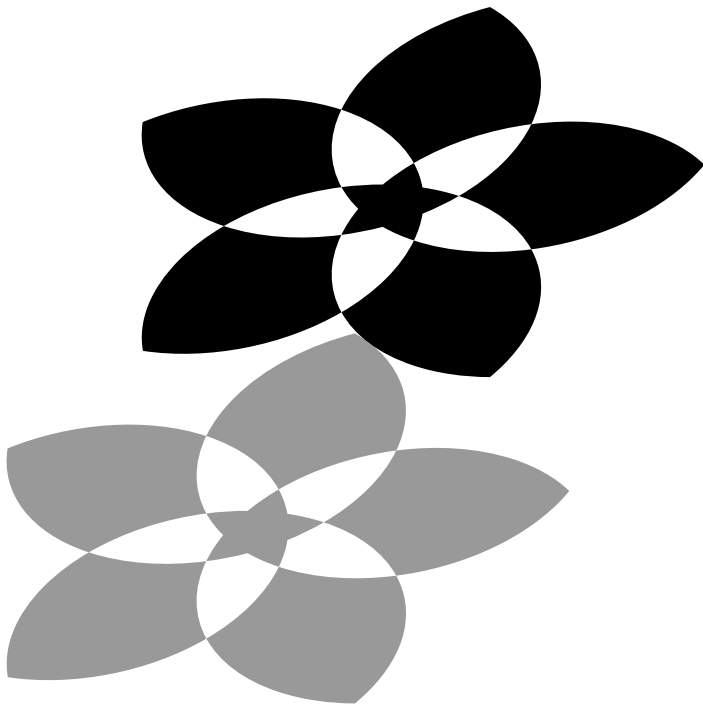
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{3+2}{9} = \frac{5}{9}$$

do total de votos. Assim, William recebeu

$$1 - \frac{5}{9} = \frac{9-5}{9} = \frac{4}{9}$$

do total de votos. Como $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ dos votos, Aisha recebeu $\frac{3}{9}$ dos votos, Fernando recebeu $\frac{2}{9}$ e William recebeu $\frac{4}{9}$. A maior destas frações é $\frac{4}{9}$. Logo, William ganhou a eleição.

Resposta: Quem venceu a eleição foi William.



Artigos

Logaritmos de Números Complexos

Gabriel Simon Schafaschek¹

Este trabalho possui duas intenções principais. A primeira é expor uma definição mais moderna de logaritmo e demonstrar, a partir dela, os resultados mais importantes acerca desse conceito. Consequentemente, as propriedades que dizem respeito à função exponencial também serão enunciadas e devidamente justificadas. Isso nos levará, também, a uma sucinta introdução ao Cálculo Integral.

A segunda intenção é estender essas noções recém estabelecidas, de uma forma um pouco menos rigorosa, ao conjunto dos números complexos, fazendo jus ao título acima. Com isso podemos, por exemplo, calcular logaritmos de números negativos, fato que julgamos ser de grande curiosidade entre os estudantes de ensino básico.

Noções Iniciais

Os logaritmos desempenham, e continuarão a desempenhar sempre, um importante papel para a matemática. Além das inúmeras aplicações que eles determinam em outras ciências, como física e química, também se encontram na posição de destaque para o ensino matemático. Isso acontece porque a função logarítmica, juntamente com sua inversa, a função exponencial, representam a única forma de expressar, matematicamente, a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento ou decrescimento é proporcional à quantidade daquela grandeza que existir num dado momento.

Mais curioso é que, historicamente, os logaritmos foram inventados para uma finalidade totalmente diferente daquela citada acima. A ideia era criar um sistema que permitisse simplificar o cálculo de algumas operações aritméticas, fazendo com que se pudesse multiplicar dois números de vários algarismos muito mais rapidamente, sem perder precisão. O truque é transformar tal multiplicação em uma adição, assim como transformar uma divisão em uma subtração, e assim por diante, de modo que todo cálculo aritmético, com excessão da adição e da subtração, pudesse ser substituído por um cálculo mais simples. Evidentemente, esse papel, nos dias atuais, passou a ser

¹ Aluno do curso de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.
Contato: gabriel.schafa@gmail.com.

efetuado pelas máquinas de calcular, razão pela qual as chamadas tábuas de logaritmos têm tido pouca utilidade nos últimos anos.

O presente trabalho possui dois objetivos principais. O primeiro consiste em fornecer uma definição mais moderna de função logarítmica, diferenciando-se da definição clássica presente na maioria dos livros didáticos sobre o assunto. O segundo busca fornecer uma extensão desse conceito para o conjunto dos Números Complexos, justificando o título dado para esse artigo.

Sempre que escrevermos o símbolo \mathbb{N} , estaremos indicando o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Também, representaremos os conjuntos dos números inteiros, racionais e reais, respectivamente, como \mathbb{Z} , \mathbb{Q} e \mathbb{R} . O conjunto $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ tem como elementos os números reais positivos.

A maioria dos livros tradicionais costuma definir logaritmo da seguinte maneira: dados um número $x > 0$, e um número $a > 0$, $a \neq 1$, dizemos que o logaritmo de x na base a é igual a $y \in \mathbb{R}$, e escrevemos $\log_a x = y$ se, e somente se, $a^y = x$. Em linguagem lógica, a definição acima significa que

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Existem, porém, alguns problemas inerentes a essa definição de logaritmo via exponencial. O maior deles é que o logaritmo de um número real positivo pode ser um número irracional. Por exemplo, o número $L = \log_2 3$ é irracional. Com efeito, se L fosse racional, existiriam $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $2^{p/q} = \sqrt[q]{2^p} = 3$, ou seja, $2^p = 3^q$, um absurdo, pois uma potência de 2 é necessariamente um número par, mas 3^q é ímpar, para todo $q \in \mathbb{N}$. A pergunta natural que nos surge, então, é: o que significa elevar um número positivo $a \in \mathbb{R}$ a um número irracional?

A resposta à pergunta acima, embora bastante intuitiva, depende, direta ou indiretamente, do conhecimento de alguns conceitos matemáticos mais delicados, tais como a noção de limite. Mesmo se introduzíssemos tais conceitos nesse momento, levaríamos um longo tempo de muito trabalho para que pudéssemos estudar, definitivamente, a teoria de logaritmos. Para evitar esse processo, que pode vir a ser bastante cansativo, os livros mais modernos costumam dar uma definição alternativa para o estudo dos logaritmos, por meio da noção geométrica de área de uma figura plana. Essa definição nos levará, também, automaticamente, à ideia de potência com expoentes reais, resolvendo, assim, o problema anterior.

É claro que a própria existência dos números reais é estabelecida em termos dessa ideia de aproximação, a qual não deixaremos de abordar, mas é possível fazê-lo de um modo muito mais geométrico do que algébrico, o que julgamos ser muito mais

elegante, intuitivo e natural. Esse tratamento servirá, também, como uma introdução ao Cálculo Integral. Além disso, esse método permite-nos apresentar, com muito mais naturalidade, a definição do número e . Na verdade, esse caminho é quase uma volta às origens, tendo em vista que os logaritmos surgiram muito antes que a função exponencial $y = e^x$ e sua existência não dependia desse termo. Essa é a maneira pela qual trataremos o estudo dos logaritmos, conforme exposto nos tópicos seguintes.

Função Logarítmica

Um dos principais criadores do sistema de logaritmos foi o matemático escocês John Napier (1550 - 1617), o qual foi responsável pela elaboração das primeiras tábuas de logaritmos. Uma tábua de logaritmos consiste numa tabela formada por duas colunas de números. A cada número x da coluna da esquerda corresponde um número na coluna à direita, chamado o logaritmo de x . A intenção de Napier, ao construir essa tábua, era a seguinte: para se multiplicar dois números positivos x e y , somavam-se os logaritmos de x e y e, por meio da tábua, descobria-se o número positivo cujo logaritmo fosse igual a essa soma. Tal número é, pois, o produto xy . Com isso, seria possível transformar uma multiplicação em uma simples adição, tornando o cálculo aritmético mais rápido e prático.

Napier percebeu, imediatamente, que para que essa tábua funcionasse dessa maneira, era preciso que a correspondência entre um número e seu logaritmo fosse biunívoca. Em outras palavras, todo número positivo deve possuir um logaritmo, os logaritmos de números distintos devem ser distintos, e todo número real deve ser o logaritmo de algum número positivo.

Uma tábua de logaritmos, vista sobre o olhar da matemática atual, é uma função entre o conjunto \mathbb{R}_+ dos números reais positivos e o conjunto \mathbb{R} dos números reais, a qual possui a propriedade de que a imagem de um produto é a soma das imagens dos fatores desse produto por tal função. Entretanto, vê-se rapidamente que essa condição não é suficiente para que essa função tenha as propriedades buscadas por Napier. Basta perceber que a função identicamente nula f satisfaz $0 = f(xy) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Descobriu-se que para uma função ser logarítmica, precisávamos exigir, também, que essa fosse crescente. Com isso, chegamos à seguinte:

Definição 1. Uma função $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uma função logarítmica se, e somente se, ela cumpre as seguintes condições:

1. L é crescente, ou seja, $x > y$ implica $L(x) > L(y)$, para quaisquer x e y reais

positivos.

$$2. L(x \cdot y) = L(x) + L(y), \forall x, y \in \mathbb{R}_+.$$

É pertinente observar que poderíamos considerar L como uma função decrescente, ao invés de crescente. Não o fizemos, porque quase todos os resultados que serão expostos a seguir seriam completamente análogos caso L fosse decrescente. Além disso, pode-se demonstrar facilmente que, ao multiplicar uma função logarítmica por um número real negativo, obteremos uma função decrescente que continuaria cumprindo a condição (2), e que vale a recíproca: se uma função decrescente cumpre a condição (2), então ela é o produto de uma função logarítmica por um número negativo. Noutras palavras, as funções logarítmicas se confundem com as funções decrescentes que satisfazem a segunda condição acima, a menos do tipo de monotonicidade.

O leitor que possui algum conhecimento sobre Álgebra Moderna deve ter percebido que a exigência (2) acima significa que toda função logarítmica é um homomorfismo entre o grupo multiplicativo \mathbb{R}_+ e o grupo aditivo \mathbb{R} . Entretanto, não utilizaremos essa linguagem nesse texto, visto que ela não é corriqueira entre os estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio.

É claro que L não poderia estar definida no ponto zero, pois, caso contrário, teríamos, para todo $x > 0$, $L(0) = L(0 \cdot x) = L(0) + L(x)$, isto é, $L(x) = 0$, ou seja, L seria constante, e portanto não seria crescente.

As propriedades mais importantes das funções logarítmicas, juntamente com suas respectivas consequências, serão listadas a seguir. Para isso, suponha L uma função logarítmica e $x, y \in \mathbb{R}_+$. Os leitores curiosos encontrarão boas demonstrações para as propriedades que aqui não forem demonstradas em [2].

$$1. L(x/y) = L(x) - L(y).$$

Com efeito, tem-se $L(x/y) + L(y) = L((x/y) \cdot y) = L(x)$. Portanto $L(x/y) = L(x) - L(y)$.

$$2. L(x^r) = r \cdot L(x), \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

Mais adiante, mostraremos que essa propriedade é válida mesmo quando r é um número real. Por enquanto, isso não faz sentido, já que não definimos a noção de potência a expoentes reais.

$$3. L(1) = 0.$$

De fato, $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1) = 2L(1)$, donde segue que $L(1) = 0$.

4. Se $x > 1$, então $L(x)$ é positivo. Se $x < 1$, então $L(x)$ é negativo.

Segue diretamente da propriedade 3 e do fato de L ser crescente.

5. L é ilimitada.

Lembremos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in X \subseteq \mathbb{R}$. Caso contrário, f diz-se *ilimitada*. A fim de que f seja ilimitada é necessário e suficiente que, para todo $M > 0$, exista $x \in X$ tal que $|f(x)| > M$.

6. Seja $K : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A fim de que K seja logarítmica, é necessário e suficiente que exista $c > 0$ tal que $K = c \cdot L$.

Com isso, concluímos que para se estudar as funções logarítmicas, basta estudar uma delas especificamente. Afinal, todas as outras diferem dela a menos de multiplicação por um número real. Mais adiante estudaremos a função logaritmo natural, que certamente consiste no exemplo mais importante de função logarítmica.

7. L é injetiva, isto é: $x \neq y$ implica $L(x) \neq L(y)$.

Ora, se $x \neq y$, então $x < y$ ou $x > y$. Como L é crescente, tem-se $L(x) < L(y)$ ou $L(x) > L(y)$. Em ambos os casos, conclui-se que $L(x) \neq L(y)$.

8. L é sobrejetiva, isto é: dado qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $L(x_0) = y_0$.

A demonstração desse fato não é evidente. Para fazê-la, seria interessante provar, primeiramente, que toda função logarítmica é uma função *contínua*. Esse termo significa o seguinte: dado qualquer ponto $a > 0$ e qualquer intervalo aberto J contendo $L(a)$, existe um intervalo aberto I , contendo a , tal que $L(I) \subseteq J$. Existe, em matemática, disciplinas bastante gerais que se encarregam do estudo das funções que cumprem tal condição - as funções contínuas. Para mais detalhes, consulte [1].

9. L é uma bijeção de \mathbb{R}_+ sobre \mathbb{R} .

Isso segue diretamente dos dois itens anteriores. Vejamos, agora, uma consequência importante desse fato. Primeiramente, considere a definição a seguir.

Definição 2. Seja L uma função logarítmica. Dizemos que um número positivo a é uma base do sistema de logaritmos L se, e somente se, $L(a) = 1$

A propriedade 9 garante que toda função logarítmica possui uma base, e que essa base é única. De fato, a existência segue da sobrejetividade de L e a unicidade segue do fato de L ser injetiva. Portanto, toda função logarítmica L fica unicamente determinada por um certo número real, chamado a sua base. Quando quisermos deixar explícito que a base de L é o número a , escreveremos L_a ao invés de L . Com essa notação, a base de uma função logarítmica é um número positivo a , com $a \neq 1$, tal que $L_a(a) = 1$.

Finalmente, a propriedade 9 nos dá a certeza de que as tábuas de logaritmos podem ser lidas tanto da esquerda para a direita, quanto da direita para a esquerda, ou seja: todo número real positivo possui um único logaritmo e todo número real é logaritmo de um único número positivo, conforme queríamos.

10. (**Mudança de Base**). Sejam L_a e L_b funções logarítmicas com bases a e b , respectivamente. Para todo $x > 0$, vale que:

$$L_b(x) = \frac{L_a(x)}{L_a(b)}.$$

Ora, o item 6 nos garante a existência de um número real positivo c , tal que $L_a(x) = c \cdot L_b(x)$, para todo $x > 0$. Em particular, se $x = b$, obtemos que $L_a(b) = c \cdot L_b(b) = c \cdot 1 = c$. Daí, segue que $L_a(x) = L_a(b) \cdot L_b(x)$, ou seja, $L_b(x) = \frac{L_a(x)}{L_a(b)}$, como queríamos demonstrar.

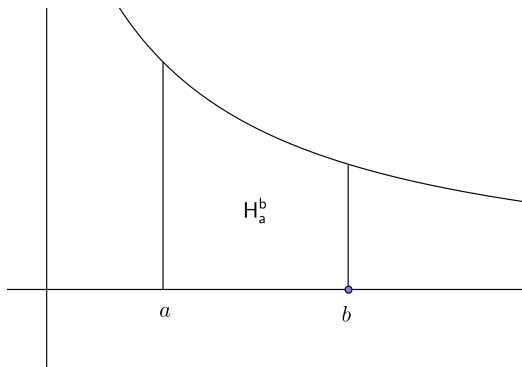
Logaritmo Natural

Nosso próximo passo, conforme prometido, consiste em mostrar a existência das funções logarítmicas. Isso pode soar um pouco esquisito a alguns leitores, mas ainda não podemos garantir que a teoria estabelecida, até aqui, não é vazia. Para fazê-lo, definiremos a importante noção de área de uma faixa de hipérbole. Observamos que essa relação geométrica dos Logaritmos é extremamente antiga, e já fora percebida em 1660, por Isaac Newton, mesmo antes de se conhecer os logaritmos naturais e o número e .

Definição 3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$ com $a < b$. Uma faixa de hipérbole com extremos a e b é o conjunto

$$H_a^b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq 1/x\},$$

delimitado pela interseção entre a parte positiva $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; y = 1/x\}$ da hipérbole $y = 1/x$, o eixo $y = 0$ e as retas $x = a$ e $x = b$.



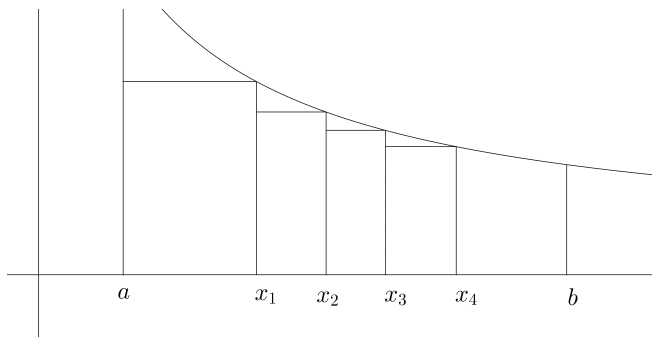
Vejamos como calcular a área de uma faixa H_a^b . Primeiro, tomando-se pontos intermediários, decompomos o intervalo $[a, b]$ num número finito de intervalos fechados justapostos. Isto é: tomamos $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$ e $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ com $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, de forma que

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, x_{n+1}].$$

O conjunto $\{a, x_1, x_2, \dots, x_n, b\}$ chama-se uma partição de $[a, b]$. Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, consideramos o retângulo de base $[x_i, x_{i+1}]$ e de altura $1/x_{i+1}$, o qual chamaremos um retângulo inscrito na faixa H_a^b . O conjunto de todos esses retângulos inscritos nessa faixa chama-se um polígono retangular inscrito em H_a^b .

Definição 4. A área da faixa H_a^b é um número real $S(H_a^b)$ cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b . Noutras palavras, $S(H_a^b)$ é o único número real que cumpre as seguintes condições:

1. $S(H_a^b)$ é maior do que a área de qualquer polígono retangular inscrito em H_a^b .
2. Dado qualquer número positivo $\epsilon > 0$, existe um polígono retangular inscrito em H_a^b cuja área é maior do que $S(H_a^b) - \epsilon$.



A unicidade de $S(H_a^b)$ decorre do fato de que se N e M forem dois números diferentes cumprindo as condições 1 e 2 da definição acima, então supondo $N < M$ e tomando $\epsilon = M - N > 0$, obtém-se um polígono retangular P cuja área é menor do que M e maior do que $M - \epsilon$, logo maior do que N , uma contradição.

A existência de $S(H_a^b)$ é consequência da natureza topológica do conjunto dos números reais, o qual comporta-se como um *Corpo Ordenado Completo*. Para mais detalhes acerca desse assunto, consulte [1].

A noção mais importante a respeito da área de faixa de hipérbole é a seguinte:

Teorema 1. Para qualquer $k > 0$, têm-se $S(H_a^b) = S(H_{ak}^{bk})$.

Demonstração: Para cada retângulo R inscrito em H_a^b , existe um retângulo inscrito em H_{ak}^{bk} cuja área é igual a área de R . De fato, se R tem base $[c, d] \subseteq [a, b]$, então podemos tomar o retângulo R' , inscrito em H_{ak}^{bk} , cuja base é $[ck, dk] \subseteq [ak, bk]$. A área de R é dada por

$$S(R) = \frac{1}{d} \cdot (d - c) = 1 - \frac{c}{d},$$

enquanto que a área de R' é

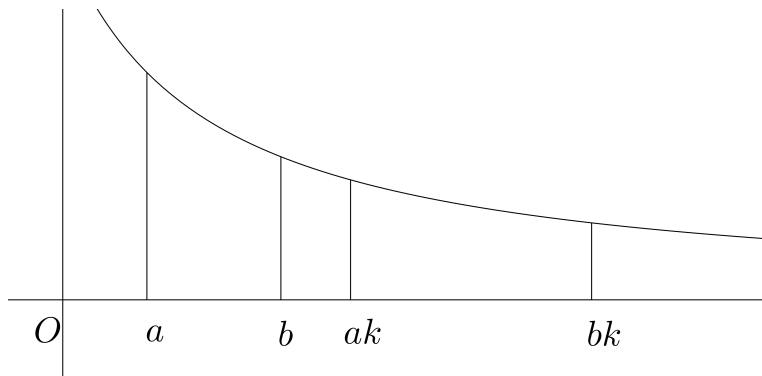
$$S(R') = \frac{1}{dk} \cdot (dk - ck) = \frac{dk}{(d - c)k} = 1 - \frac{c}{d},$$

ou seja, a área de R é igual a área de R' .

Portanto, dado qualquer polígono retangular P inscrito em H_a^b , existe um polígono retangular P' inscrito em H_{ak}^{bk} de mesma área $S(P)$, pois podemos tomar, para cada retângulo em P , um retângulo de mesma área em P' , considerando o caso anterior e

observando que se $\{a, x_1, \dots, x_n, b\}$ é uma partição de $[a, b]$, então $\{ak, x_1k, \dots, x_nk, bk\}$ é partição de $[ak, bk]$.

De forma análoga, mostra-se que para cada polígono retangular inscrito em H_{ak}^{bk} , existe um polígono retangular inscrito em H_a^b com a mesma área daquele. Decorre, daí, que as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} possuem as mesmas aproximações por falta, e portanto são iguais, como queríamos demonstrar.



Baseando-se na demonstração do Teorema anterior, acreditamos que os leitores conseguirão mostrar facilmente o teorema a seguir.

Teorema 2. *Sejam $a < c < b$. Então $S(H_a^b) = S(H_a^c) + S(H_c^b)$.*

O teorema acima pode ser melhorado, de modo que seja verdadeiro para quaisquer a, b, c reais positivos. Para isso, convencionaremos que:

1. $S(H_a^a) = 0$;
2. $S(H_b^a) = -S(H_a^b)$.

Em termos mais precisos, a definição acima fornece um significado para o símbolo $S(H_b^a)$, com $a < b$, o qual não fazia sentido até o presente momento. Continuaremos chamando $S(H_b^a)$ a área da faixa H_b^a , por uma questão de convenção. Essa notação não possui significado geométrico preciso, pois sequer existe a faixa de hipérbole H_b^a quando $a < b$ no sentido da Definição 3, mas ela torna verdadeiro o teorema acima para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}_+$.

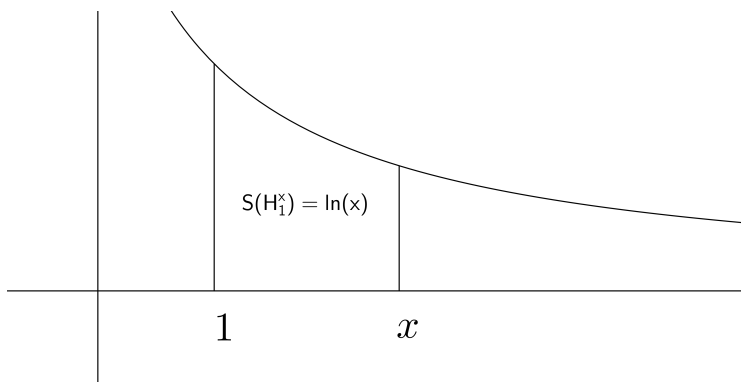
Por exemplo, considere $a < b < c$. Vamos mostrar que $S(H_a^b) = S(H_a^c) + S(H_c^b)$. De fato, já sabemos, da proposição 3, que $S(H_a^c) = S(H_a^b) + S(H_b^c)$. Portanto,

$S(H_a^c) = S(H_a^b) - S(H_c^b)$, donde segue que $S(H_a^b) = S(H_a^c) + S(H_c^b)$, como queríamos. Os outros casos são tratados de maneira análoga.

Observamos, ainda, que admitindo-se as convenções acima, o Teorema 1 continua válido mesmo quando $a > b$. Com efeito, nesse caso teríamos $S(H_a^b) = -S(H_b^a) = -S(H_{bk}^{ak}) = S(H_{ak}^{bk})$.

Passemos, agora, à definição do logaritmo natural.

Definição 5. Seja $x > 0$. Definimos o logaritmo natural de x , e o indicamos por $\ln(x)$, como sendo a área da faixa de hipérbole H_1^x , isto é, $\ln(x) = S(H_1^x)$.



Segue imediatamente, da definição acima, os seguintes fatos:

1. $\ln(1) = 0$, pois $\ln(1) = S(H_1^1) = 0$.
2. Se $0 < x < 1$, então $\ln(x) < 0$, porque $\ln(x) = S(H_1^x) = -S(H_x^1) < 0$ (a faixa que realmente existe é H_x^1). Analogamente, se $x > 1$, então $\ln(x) > 0$.

A correspondência $0 < x \mapsto \ln(x)$ determina uma função $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. O fato mais importante sobre essa função está expresso no teorema abaixo.

Teorema 3. A função \ln é uma função logarítmica.

Demonstração: Tome $x, y \in \mathbb{R}_+$ tais que $x < y$. Vamos provar, primeiro, que \ln é crescente, ou seja, $\ln(x) < \ln(y)$. Considere 3 casos:

Caso 1: $0 < x \leq 1 < y$. Nesse caso, tem-se imediatamente $\ln(x) \leq 0 < \ln(y)$.

Caso 2: $1 \leq x < y$. O Teorema 2 garante que $\ln(y) = \ln(x) + S(H_x^y)$. Como $x < y$,

vem que $S(H_x^y) > 0$, donde segue que $\ln(y) = \ln(x) + S(H_x^y) > \ln(x)$.

Caso 3: $0 < x < y \leq 1$. Novamente, invocando o Teorema 2, obtemos

$$S(H_x^1) = S(H_x^y) + S(H_y^1) \Leftrightarrow -S(H_1^x) = -S(H_y^x) - S(H_1^y)$$

$$\Leftrightarrow S(H_1^x) = S(H_y^x) + S(H_1^y) \Leftrightarrow \ln(x) = S(H_y^x) + \ln(y) \Leftrightarrow S(H_y^x) = \ln(x) - \ln(y).$$

Entretanto, tem-se $S(H_y^x) < 0$, donde segue que $\ln(x) - \ln(y) < 0$, e então $\ln(x) < \ln(y)$. Isso demonstra a monotonicidade de \ln .

Falta mostrar que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. Com efeito, sabemos que $\ln(xy) = \ln(x) + S(H_x^{xy})$, pois mostramos que o Teorema 2 é válido para quaisquer números reais positivos. Por outro lado, o Teorema 1 nos dá $S(H_x^{xy}) = S(H_1^y) = \ln(y)$, como queríamos demonstrar.

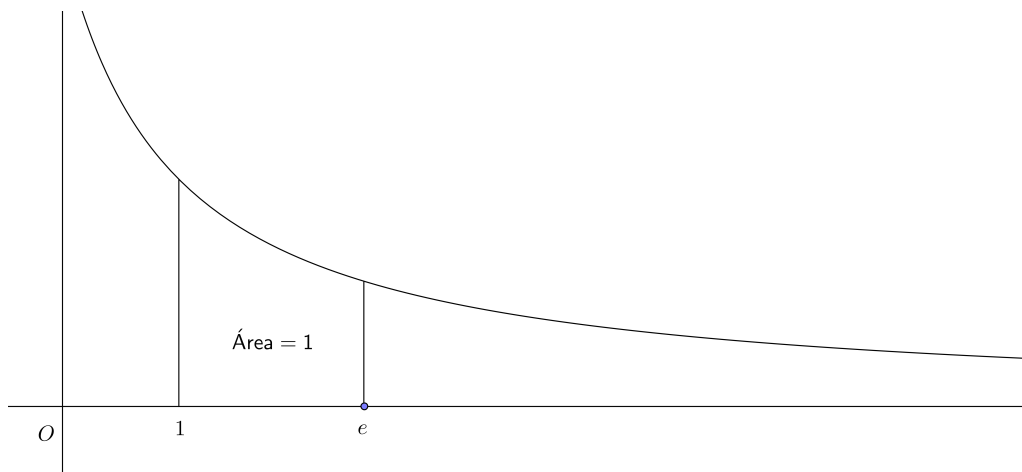
O Número e

O número e é, reconhecidamente, um dos números mais importantes da Matemática atual. Ele é, as vezes, denominado número de Euler, em homenagem ao brilhante matemático suíço Leonhard Euler. Vejamos o que esse número significa.

Definição 6. Definimos o número e como sendo a base da função logarítmica \ln .

Noutras palavras, o número e é o único número real tal que $\ln(e) = 1$. Como os números menores que 1 têm logaritmos naturais negativos, têm-se evidentemente que $e > 1$.

Mais importante do que isso é a interpretação geométrica deste número. O número e é o único número tal que a área da faixa de hipérbole H_1^e é igual a 1. Abaixo, segue uma ilustração desse fato.



Se utilizarmos a notação que havíamos desenvolvido no estudo de funções logarítmicas, podemos escrever que $\ln = L_e$. Para tornar essa notação mais familiar, passaremos a escrever \log_a ao invés de L_a . Portanto $\ln = \log_e$.

Agora que já mostramos a existência de uma função logarítmica, a saber, a função \ln , é fácil encontrar todas as outras funções logarítmicas existentes. Basta aplicarmos o Teorema da Mudança de Base em logaritmos. Com a notação exposta acima, esse teorema passa a assumir a forma

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

Por exemplo, se quisermos determinar a função logarítmica de base 10, aplicamos a fórmula acima para $a = 10$ e $b = e$. O que nos resulta é

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \left(\frac{1}{\ln(10)} \right) \cdot \ln(x).$$

Portanto $\log_{10} = (1/\ln(10)) \cdot \ln$. Isso significa que para obtermos \log_{10} , basta multiplicarmos a função \ln pelo número real $\frac{1}{\ln(10)}$. De forma análoga, obtêm-se funções logarítmicas em qualquer outra base.

A função \log_{10} chama-se função logaritmo decimal. Os logaritmos decimais exercem grande importância no contexto das aplicações de funções logarítmicas, porque

o sistema de numeração mais utilizado é o sistema decimal. Tanto são influentes os logaritmos decimais que costumamos escrever apenas \log em vez de \log_{10} para indicá-los.

Existe uma quantidade bastante satisfatória de curiosidades e resultados a respeito do número e . A seguir, listamos aqueles que julgamos ser os mais expressivos:

1. O número e é irracional. A irracionalidade de tal número foi demonstrada por um matemático suíço chamado Johann Heinrich Lambert, por volta do ano de 1761. Mais tarde, Leonard Euler também deu uma demonstração para esse fato.
2. Um valor aproximado para e com 20 algarismos exatos é $e \approx 2,71828182845904523536$.
3. O número e é transcendente. Isso significa que dado qualquer polinômio de coeficientes racionais, é impossível que e seja uma de suas raízes. Isso foi demonstrado pelo francês Charles Hermite, em 1873.
4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pode-se provar que, quanto maior for o número $n \in \mathbb{N}$, mais próximo x_n está de e . Mais do que isso, os números da forma x_n se aproximam tanto quanto se deseje do número e . Portanto, como na definição da função \ln , pode-se dizer que e é uma aproximação por falta dos números x_n . Esse fato é conhecido como o *Limite Fundamental Exponencial*.

Em verdade, essa foi a primeira definição do número e , fornecida por Jacob Bernoulli, durante um trabalho em que tentava calcular algumas expressões bastante ocorrentes no cálculo de juros compostos.

A correspondência $n \mapsto x_n$ define uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, pondo $x(n) = x_n$. Uma função desse tipo chama-se uma sequência de números reais. Note que x_n é racional para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, o número irracional e pode ser bem aproximado por uma sequência de números racionais.

5. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $y_n = \frac{1}{(n-1)!}$. Defina, também, $a_n = y_1 + \dots + y_n$.

Têm-se, então, $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 1$, $a_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2!}$, $a_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$, e assim por diante. Pois bem, a sequência dos a_n fornece uma aproximação por falta do número e . Novamente, têm-se $a_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Essa aproximação é,

as vezes, indicada pela igualdade a seguir:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Função Exponencial

Mostramos que a função $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função logarítmica, e portanto bijetiva. Vamos indicar a função inversa de \ln por $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Assim, escrever $\ln(x) = y$ é equivalente a escrever que $\exp(y) = x$. Também, vale que $\exp(\ln(x)) = x$ e $\ln(\exp(y)) = y$, para quaisquer x real positivo e $y \in \mathbb{R}$.

Ora, sabemos que, para todo $r \in \mathbb{Q}$, têm-se $\ln(e^r) = r \cdot \ln(e) = r \cdot 1 = r$. Por outro lado, $\ln(\exp(r)) = r$. Pela injetividade de \ln , concluímos que $e^r = \exp(r)$.

Assim, pelo menos para expoentes racionais, a função \exp coincide com a potência de e com expoente r . Ainda não foi definido o que significa e^x para x irracional. Entretanto, a função \exp está definida para todo número real. Nada mais natural do que definirmos, então:

Definição 7. Dado qualquer número real x , a potência e^x é definida como sendo o número $\exp(x)$. A correspondência $x \mapsto e^x$ é uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+ , chamada a Função Exponencial de base e , ou simplesmente, Função Exponencial.

Agora, sim, faz sentido considerarmos e^x , mesmo com x irracional. A interpretação geométrica é, também, bastante simples: o ponto $y = e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa de hipérbole H_1^y tenha área igual a x . Assim, e^π é o número $y > 0$ para o qual a área de H_1^y seja igual a π .

Além disso, a função exponencial $y = e^x$ é a inversa da função logarítmica \ln . Assim, obtemos a definição clássica de logaritmo: dado $x > 0$, tem-se

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow e^y = x,$$

tendo em vista que

$$e^{\ln(y)} = y \text{ e } \ln(e^x) = x.$$

As propriedades fundamentais da função exponencial são dadas pelo teorema que segue abaixo.

Definição 8. A função exponencial é crescente. Para todos os números reais x e y , vale que $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

Demonstração: Tome $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Se fosse $e^a \geq e^b$, teríamos, em virtude da monotonicidade de \ln , que $a = \ln(e^a) \geq \ln(e^b) = b$, uma contradição. Logo $e^a < e^b$ e a função Exponencial é crescente. Agora, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos $\ln(e^x \cdot e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y})$, donde segue, da injetividade de \ln , o resultado, como queríamos demonstrar.

Os itens abaixo são consequências imediatas do teorema acima.

1. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$;
2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
3. $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$.

Fixe $a > 1$. Até o momento, não faz sentido calcular a^x quando x é irracional. Queremos encontrar uma definição para a qual a fórmula $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$, que é válida para expoentes racionais, continue sendo verdadeira. Nada mais justo do que tomar a própria igualdade acima como uma definição de a^x . Assim, temos a:

Definição 9. Dado $x \in \mathbb{R}$, a^x é o único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a $x \cdot \ln(a)$, isto é, $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$.

A correspondência $x \mapsto a^x$ determina uma função, chamada a função exponencial de base a . Como já era de se esperar, essa função goza de várias propriedades, que citaremos a seguir. Suponhamos a e b números reais maiores do que um e $x, y \in \mathbb{R}$.

Tem-se:

1. $\log_a b^x = x \cdot \log_a b$.

Com efeito, invocando o Teorema da Mudança de Base, temos $\log_a b^x = \frac{\ln b^x}{\ln a} = x \cdot \frac{\ln b}{\ln a} = x \cdot \log_a b$.

2. $\log_a a^x = x$ e $a^{\log_a y} = y$, para $y > 0$.

A primeira igualdade segue imediatamente da propriedade anterior. Para provar a segunda, note que $\ln(a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \ln a = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot \ln a = \ln x$. A injetividade de \ln nos dá o resultado.

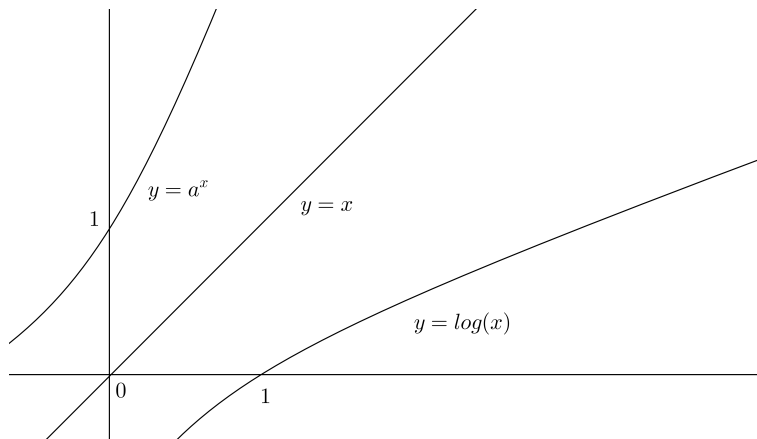
3. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

De fato, $\ln(a^{x+y}) = (x+y) \cdot \ln a = x \ln a + y \ln a = \ln(a^x) + \ln(a^y) = \ln(a^x \cdot a^y)$. Novamente, o fato de \ln ser injetiva justifica a afirmação.

4. $x > y \Rightarrow a^x > a^y$.

Ora, $x > y$ implica $x - y > 0$. Como $a > 1$, temos $\ln a > 0$. Segue que $(x-y) \cdot \ln a > 0$, ou seja, $x \cdot \ln a > y \cdot \ln a$, ou ainda, $\ln(a^x) > \ln(a^y)$. Sendo \ln crescente, obtemos $a^x > a^y$.

As demais propriedades da exponencial de base a são provadas, facilmente, a partir dos fatos acima. Com isso, concluímos, conforme já se esperava, que a aplicação $x \mapsto a^x$ é uma aplicação crescente e atinge todos os números reais positivos. A inversa dessa aplicação é a já conhecida função \log_a . O gráfico dessas duas é esboçada no que se segue.



Uma Desigualdade Interessante

Mostraremos agora como a teoria até aqui exposta permite demonstrar, com bastante clareza e simplicidade, a desigualdade abaixo, válida para todo $x > 0$.

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

A prova é geométrica e bem imediata: Seja P o retângulo que tem como base o intervalo $[1, 1+x]$ e altura 1 e seja Q o retângulo de mesma base, de altura $\frac{1}{1+x}$. Como se vê na figura abaixo, a faixa de hipérbole H_1^{1+x} contém Q e está contida em P . Segue-se que $\frac{x}{1+x} = S(Q) < S(H_1^{1+x}) = \ln(1+x) < S(P) = x$, o que estabelece a desigualdade desejada.

Uma consequência interessante desse fato é a seguinte: como $\ln(1+x) < x$, tem-se $1+x = e^{\ln(1+x)} < e^x$, para todo $x > 0$. Isso mostra imediatamente que a função exponencial e^x é ilimitada superiormente, pois a aplicação $x \mapsto 1+x$ o é.

A exponencial Complexa

A definição de Logaritmo Complexo depende do conhecimento da ideia de exponencial complexa. Ou seja, precisamos fazer sentido a expressão e^z , quando z é um número complexo. Ora, é de se esperar que a exponencial em \mathbb{C} cumpra a propriedade fundamental $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ e que coincida com a exponencial real nos expoentes reais.

Assim, se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, deve-se ter $e^z = e^a \cdot e^{bi}$. Portanto, para se obter a exponencial complexa exigindo que ela possua as duas propriedades acima, basta definir o que significa e^{bi} , para $b \in \mathbb{R}$. Isso será feito de maneira um pouco artificial, como segue.

Primeiro, lembramos que a aplicação $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $E(x) = \cos(x) + i \sin(x)$ é uma sobrejeção sobre o círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Além disso, sabe-se que $E(x+y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i \sin x \cos y + i \sin y \cos x = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = E(x) \cdot E(y)$.

Pois bem, apoiando-se nas propriedades acima, definimos $e^{ix} = E(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Geometricamente, x é uma determinação em radianos do argumento principal de $z = e^{ix}$, ou seja, x difere um múltiplo de 2π da medida do ângulo com que o vetor \vec{Oz} forma com o eixo real, a qual será denotada por $\text{Arg}(z)$.

Tem-se $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$. Também, por definição, $|e^{xi}| = 1$, para todo real x . Segue-se que, dado $z = x + yi \in \mathbb{C}$, com $x, y \in \mathbb{R}$, vale $|e^z| = |e^{x+yi}| = |e^x| \cdot |e^{yi}| = e^x$. Além disso, em virtude de todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ poder ser escrito na forma trigonométrica $z = |z|(\cos(\text{Arg}(z)) + i \sin(\text{Arg}(z)))$, concluímos que $z = |z| \cdot e^{i \text{Arg}(z)}$. Esta chama-se a forma exponencial dos números complexos. Com essas

definições, vale a relação fundamental $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, como queríamos.

Uma consequência imediata desse fato é que a função exponencial complexa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $f(z) = e^z$ é sobrejetiva, mas não injetiva. Com efeito, dado $z \in \mathbb{C}$, tem-se $z = |z|e^{i\theta} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\theta} = e^{\ln|z|+i\theta}$. Além disso $e^{i\theta} = e^{i\theta+2k\pi}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Logo, a definição clássica de logaritmo, como inversa da função exponencial, não é válida no caso complexo. Vamos ver como resolver esse problema.

Logaritmos Complexos

Antes de se pensar em como definir logaritmo de um número complexo, alguns matemáticos se dedicaram a buscar uma definição para logaritmos de números negativos. Essa definição deveria manter válida a propriedade fundamental de que o logaritmo de um produto seja a soma dos logaritmos dos fatores desse produto. Entretanto, a única maneira disso acontecer é colocando $\log(x) = \log(|x|)$, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Com efeito, devemos ter $\log(-1) + \log(-1) = \log((-1)(-1)) = \log(1) = 0$, logo $\log(-1) = 0 = \log(1)$. Daí, vem que $\log(-x) = \log((-1) \cdot x) = \log(-1) + \log(x) = \log(x)$, tornando a função logarítmica $\log : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par.

Portanto, $\log(x) = \log(|x|)$ é a única maneira de definir logaritmos de números negativos de forma que a propriedade fundamental continue válida. Um adendo importante é que é impossível definir o logaritmo de zero (mesmo no conjunto dos Números Complexos). Isso ocorre porque, se existisse logaritmo de zero, então para todo $x \neq 0$, teríamos $\log 0 = \log(0 \cdot x) = \log 0 + \log x$, o que implica $\log(x) = 0$, ou seja, a função logarítmica coincidiria, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com a função identicamente nula.

Um problema em aderir à definição acima é que não vale mais a fórmula $a^{\log_a x} = x$. A única maneira de se resolver essa situação é estendendo nosso ambiente de trabalho do conjunto dos números reais para o conjunto dos números complexos. Essa foi a conclusão a que Leonhard Euler chegou, em 1749. A definição a seguir deve-se a ele.

Definição 10. Seja z um número complexo. Dizemos que w é um logaritmo de z quando $e^w = z$.

Essa definição sugere que um número complexo deve possuir uma infinidade de logaritmos, porque se w for um logaritmo de z , isto é, $z = e^w$, então $e^{w+2\pi ik} = e^w \cdot e^{2\pi ik} = e^w \cdot 1 = e^w = z$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Além disso, em virtude do fato de que

2π é o período fundamental das funções seno e cosseno, qualquer outro logaritmo de z é da forma $w + 2\pi ik$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Ora, $-1 = e^{i\pi}$. Assim, qualquer logaritmo de -1 é da forma $i\pi + 2\pi ik$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, os números reais negativos possuem uma infinidade de logaritmos complexos, e nenhum deles é um número real. Isso resolve um dos problemas anteriores, e tal solução só foi possível devido à passagem de \mathbb{R} para \mathbb{C} .

A mudança mais crucial do caso real para o caso complexo é que não existe a noção de função logarítmica em \mathbb{C} , como consequência do fato de que cada número complexo possui infinitos logaritmos. Em virtude disso, a relação fundamental dos logaritmos parece não mais fazer sentido. Para que ela seja válida, devemos, dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, estabelecer um sentido para $\log z$.

A pergunta mais intuitiva que nos ocorre, então, é: de todos os infinitos logaritmos do número complexo não nulo z , qual deve ser tomado para designar $\log z$? Essa pergunta não possui resposta, porque é impossível escolher, para cada z , um único número complexo $\log z$ de modo que a propriedade fundamental dos logaritmos seja satisfeita (veja [3]).

Para reverter essa situação, vamos denotar por $\log z$ o conjunto de todos os logaritmos de z . Isto é, $\log z = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$. Se A e B são conjuntos de números complexos, definimos sua soma como sendo o conjunto $A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$. Com essa notação, a propriedade esperada para os logaritmos passa a ser verdadeira, conforme colocamos a seguir.

Teorema 4. *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Então $\log(zw) = \log z + \log w$.*

Demonstração: Para provar a inclusão $\log z + \log w \subseteq \log(zw)$, tome $u \in \log z$ e $v \in \log w$. Temos $e^u = z$ e $e^v = w$. Logo $e^{u+v} = e^u \cdot e^v = z \cdot w$, ou seja, $u + v \in \log(zw)$, donde segue a primeira inclusão.

Reciprocamente, seja $y \in \log(zw)$. Devemos encontrar $u \in \log z$ e $v \in \log w$ tais que $y = u + v$. Com efeito, sabemos que $zw = |zw| \cdot e^{i \cdot \text{Arg}(zw)} = e^{\ln |zw|} \cdot e^{i \cdot \text{Arg}(zw)} = e^{\ln |zw| + i \cdot \text{Arg}(zw)}$. Portanto, têm-se $y = \ln |zw| + i \cdot \theta$, em que $\theta = \text{Arg}(zw) + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Agora, $\ln |zw| = \ln(|z||w|) = \ln |z| + \ln |w|$, e $\text{Arg}(zw) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w) + 2\pi k'$, para um certo $k' \in \mathbb{Z}$. Concluimos que $y = (\ln |z| + i \text{Arg}(z)) + (\ln |w| + i(\text{Arg}(w) + 2(k + k')\pi))$. Além disso, é claro que $u = (\ln |z| + i \text{Arg}(z)) \in \log z$ e $v = (\ln |w| + i(\text{Arg}(w) + 2(k + k')\pi)) \in \log w$ e assim $y = u + v \in \log z + \log w$, como queríamos demonstrar.

De uma forma muito parecida, demonstra-se que $\log(z/w) = \log z - \log w$ e que $\log z^n = n \cdot \log z$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Observamos que, durante

a demonstração anterior, usamos o fato de que $\log z = \{\ln |z| + i(\text{Arg}(z) + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Existe, também, uma ideia bastante útil para se referir a logaritmos de números complexos, que consiste na noção de um *ramo de* $\log(z)$. Vejamos o que isso significa.

Definição 11. Uma função $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ chama-se um ramo do logaritmo em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ quando $e^{g(z)} = z$, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

A ideia acima permite-nos novamente pensar em logaritmo como sendo uma função, cuja inversa à esquerda é a função exponencial. É fácil de perceber que existem infinitos ramos do logaritmo. De fato, como $\log(z) = \{\ln |z| + i(\text{Arg}(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$, então, para cada $k \in \mathbb{Z}$, podemos definir $g_k : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ pondo $g_k(z) = \ln |z| + i(\text{Arg}(z) + 2k\pi)$. Cada uma das funções g_k é, pois, um ramo de logaritmo.

Fazendo $k = 0$, obtem-se o chamado *ramo principal do logaritmo*, o qual é denotado, as vezes, por $g_0 = \text{Log}$. Assim, $\text{Log}(z) = \ln |z| + i\text{Arg}(z)$, para todo $z \neq 0$. Para números reais $x \in \mathbb{R}$, vê-se que $\text{Log}(x) = \ln(x)$.

Vejamos que o ramo principal de logaritmo, definido acima, não possui a propriedade fundamental $\text{Log}(zw) = \text{Log}(z) + \text{Log}(w)$ para quaisquer z, w complexos não nulos. De fato, tomemos $z = -1 = w$. Tem-se $\text{Log}(zw) = \text{Log}(1) = 0$. Por outro lado, $\text{Log}(z) = \pi i = \text{Log}(w)$, ou seja, $\text{Log}(z) + \text{Log}(w) = 2\pi i$.

Mais geralmente, mostra-se que essa propriedade é falsa para qualquer ramo de logaritmo, conforme já mencionado anteriormente. A demonstração disso envolve alguns conceitos um pouco mais sofisticados e será omitida. O leitor curioso encontrará uma boa justificativa dessa questão em [3].

Assim como fazemos com os números reais, é possível definir a noção de potências complexas em qualquer base ou expoente, e a partir dela deduzir diversas propriedades. Isso pode até nos conduzir no sentido de definir, também, logaritmos complexos em bases diferentes de e , mas esse é um trabalho um tanto que desnecessário, visto que, como no caso real, logaritmos em outras bases seriam facilmente calculáveis a partir do logaritmo complexo aqui definido.

As noções estabelecidas nessas duas últimas seções possuem uma continuação natural por meio do estudo das Funções de Variáveis Complexas. Para um maior conhecimento do assunto, consulte [3].

Por fim, esperamos que os leitores possam usar esse texto como uma boa forma de estudar as funções logarítmicas reais sem o conhecimento prévio do estudo da função exponencial, bem como consigam sanar suas curiosidades, mesmo que de forma singela, a respeito de como os logaritmos se comportam em \mathbb{C} . Não nos surpreenderemos, porém, caso lembrem dessas notas quando estiverem estudando Cálculo Integral.

Referências

- [1] Elon Lages Lima, *Um Curso de Análise, Vol 01*, 14^a Edição, 2014
- [2] Elon Lages Lima, *Logaritmos*, 6^a Edição, 2016
- [3] Alcides Lins Neto, *Funções de Uma Variável Complexa*, 2^a Edição, 2012

A importância do Desenho Geométrico no ensino da Geometria

Carlos Eduardo Leal de Castro¹

Este artigo procura apresentar a sequência da formação do currículo da matemática e do desenho geométrico, mostrando seu auge e os motivos de sua decadência. Além disso, apresenta argumentos para defender a inclusão das construções geométricas no ensino da geometria, embasando-se principalmente em pesquisas feitas com alunos do ensino fundamental e médio. Por fim, apresenta novas perspectivas do ensino da geometria com o avanço e a inclusão da tecnologia no ensino da matemática.

Introdução

Desde os primórdios da humanidade, os desenhos são utilizados como forma de comunicação. O desenho tem o poder de transmitir o verdadeiro sentimento de quem o faz, a partir de seus traços, sem a necessidade de tradução. Pode-se dizer que o desenho é uma linguagem natural de todos os seres humanos e que aprendemos desde cedo a utilizá-la para traduzir ou fantasiar o que sentimos. Não muito distante, a geometria aparece da necessidade de estudar as formas, planas ou espaciais, e resolver problemas de divisão de terras e construção. Foi a partir dos estudos de Euclides, aproximadamente em 300 a.C., que a geometria passou a ser estudada de forma rigorosa, com os axiomas e postulados citados por ele em sua obra “Os elementos”.

O desenho geométrico surge, assim, como possibilidade de colocar em prática os conceitos, definições e teoremas estudados ao longo do surgimento da geometria plana e espacial. Tais práticas auxiliam no desenvolvimento cognitivo, além de possibilitar aos alunos a prática de conceitos que muitas vezes não são fáceis de se perceber no processo de aprendizagem.

Tendo em vista as considerações supracitadas, este artigo apresenta a história do ensino do desenho geométrico no Brasil, as diretrizes que o excluam como disciplina escolar e desenvolve argumentos que destacam a importância da reinclusão do desenho geométrico como disciplina do ensino básico ou sua utilização como método de ensino da geometria.

¹Licenciando do Curso de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina. Contato: lealdecastro@gmail.com.

Para tanto, este artigo será assim organizado: na seção dois, serão discutidos os caminhos do desenho geométrico no ensino da matemática no Brasil até os dias de hoje. Na seção três, serão desenvolvidos argumentos que defendem a importância do desenho geométrico na geometria e na formação do estudante, além de apresentar novas perspectivas do ensino da geometria prática nos dias atuais.

História do Desenho Geométrico no currículo escolar

O ensino do desenho geométrico no currículo escolar começou por volta do século XVII com o interesse de Portugal em proteger as terras brasileiras. Assim, de acordo com [3] em 1699 se iniciaram, no Rio de Janeiro, as *Aulas de Fortificações*, com intuito de formar pessoal capaz de desenhar fortes para aumentar a defesa do território brasileiro. As academias militares tornaram, nas primeiras décadas do século XVIII, o ensino do desenho geométrico obrigatório, como disciplina das aulas de fortificação, visando à formação de engenheiros militares, cartógrafos e matemáticos.

Ainda no século XVIII, a revolução francesa iniciou um processo de mudanças no pensamento científico, industrial e econômico, forçando modificações no processo educacional em todo o mundo, o que, de acordo com [2], tornou o ensino das ciências primordial. Com isso, o ensino brasileiro sofreu mudanças para adequar-se ao que se pensava na Europa.

No início do século XIX, juntamente com a transferência da corte portuguesa para o Brasil, ocorreram mudanças no sistema educacional brasileiro, como exemplo, a criação da *Academia Real Militar*, consolidando a sistematização do ensino da matemática e ciências no Brasil. De acordo com [5]:

Após a chegada de D. João VI ao Brasil, a necessidade de se estabelecerem as profissões técnicas e científicas faz com que sejam criados cursos de Desenho no país. Para começar a reverter este quadro, em 1816, a Missão Francesa composta por 18 integrantes chega ao Rio de Janeiro, a convite de D. João VI, para organizar e criar a Escola Real de Ciências, Artes e Ofícios no Brasil.

Foi a partir daí que se estabeleceu o ensino da matemática de forma sistemática no Brasil. De acordo com [5], nos cursos da Academia, o Desenho era uma disciplina presente em quase todos os anos de ensino dos cursos da Academia Real Militar, juntamente com disciplinas como Álgebra, Cálculo, Geometria Analítica, Mecânica, Mineralogia e Fortificação Regular e Irregular, entre outros. Podemos com isso observar a importância do desenho nos cursos oferecidos pela Academia Real.

Percebe-se que o ensino da matemática estava fortemente presente na formação

militar. Com o surgimento da revolução industrial, houve a necessidade de se formar mão de obra especializada no Brasil, com o intuito de construir novos portos, fábricas e estradas. Com isso, surgiu a necessidade de se criar cursos de Engenharia Civil, para formar uma mão de obra especializada.

O ensino do desenho e construções geométricas era necessário e importantes para formação técnica dos engenheiros. Este processo de modificação do sistema educacional no Brasil fez com que, no final do século XIX, Rui Barbosa propusesse a criação de um sistema educacional gratuito no Brasil, inspirado nas revoluções educacionais que aconteciam na Alemanha, França, Áustria, Estados Unidos e Inglaterra. Ainda, o Desenho era considerado um “saber notório” para o desenvolvimento do aluno segundo [3].

Este processo de industrialização em que o Brasil se encontrava levou a população aos centros urbanos e trouxe à tona uma maior discussão sobre o processo de educação da população, passando, assim, a ser prioridade no desenvolvimento econômico, como podemos ver em [7]. Nesse contexto, o desenho geométrico era baseado em construção com régua e compasso e desenho de observação e constava no currículo de algumas escolas.

A partir de 1930, o Desenho ganhou força no currículo das escolas a partir de reformas na educação, em busca de uma melhor organização na estrutura curricular. Segundo [7], foi a partir daí que o ensino básico foi tomando a forma que conhecemos hoje. A portaria de 30 de junho de 1931 tornou oficial o desenho geométrico no currículo brasileiro, dividindo-o em quatro modalidades: desenho de observação, desenho geométrico, desenho convencional e desenho decorativo, como afirma [5].

Como o sistema educacional brasileiro estava em constante discussão e modificação, houve mudanças com relação à estrutura de ensino e currículo que influenciaram o ensino de desenho geométrico. Para [7]:

(...) o Desenho estava plenamente instituído enquanto disciplina escolar no currículo brasileiro. Pode-se inferir, inclusive, que as décadas de 1930 a 1950 constituíram os anos de ouro dessa disciplina em nosso país, dada sua visibilidade em meio aos documentos educacionais oficiais.

No início da década de 60, iniciou-se o *Movimento da Matemática Moderna*, que tinha como objetivo aperfeiçoar e aproximar o ensino da matemática com o que se vinha pesquisando na área. Com isso, incluiu-se no currículo conteúdos referentes à teoria dos conjuntos, topologia e estruturas algébricas. Este processo deu início ao enfraquecimento do ensino da Geometria Euclidiana na estrutura curricular brasileira.

Em 1961, a *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB 4.024/61* – determinou Desenho Geométrico como disciplina optativa, enfraquecendo o ensino

de desenho e fazendo com que muitas escolas excluíssem a disciplina de sua matriz curricular e que seu conteúdo fosse retirado dos principais concursos e vestibulares do país. Em 1971, a publicação da *Lei 5692 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, que excluiu o ensino de desenho geométrico da estrutura curricular, tornou a disciplina praticamente abandonada nas matrizes curriculares das escolas do país.

Ainda que enfraquecida, a prática do desenho geométrico passou a ser citada em diversas publicações de livros didáticos na década de 1980, recebendo um novo incentivo em busca da sua importância no ensino. Ainda, na década de 1990, a indicação da importância do ensino do desenho volta a ser mencionada nos *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN)* no emprego do uso da “régua e compasso” no desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos.

Desenho Geométrico e sua importância no ensino da Geometria

Quando nos deparamos com ensinar os tópicos da geometria, seja ela plana ou espacial, sempre tentamos fazer ligações com o “mundo real”. Porém, é importante enxergarmos a geometria além de suas aplicações. Estudar geometria auxilia em diversas áreas da matemática e em diversos aspectos da vida humana. A geometria, e a matemática como um todo, auxiliam no desenvolvimento das percepções espaciais do mundo.

Nesse ponto de vista, Duval em [6] argumenta que não existem outras maneiras de acessar objetos matemáticos sem criar algum tipo de representação sua. O mesmo autor cita que construir objetos e suas representações é uma das principais maneiras de se compreender suas características. Além disso, aprender como se constrói uma figura geométrica é importante para desenvolver a visão matemática.

O desenho geométrico é uma importante ferramenta na aprendizagem matemática e geométrica. Com ela, desenvolve-se a compreensão, fixação e imaginação criativa, afirma Lima em [1]. Lima acredita que a busca pela compreensão de como se constrói a figura auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo. No mesmo caminho, Kalter em [1] argumenta que o ensino de desenho geométrico auxilia também na capacidade do aluno de planejar, projetar e abstrair conceitos, fazendo uma melhor relação entre a representação e o objeto. Segundo Marmo & Marmo em [5]:

O desenho estabelece um canal de comunicação universal para a transmissão da linguagem gráfica. É disciplina que permite ao estudante tirar uma série muito grande de conclusões a partir de um mínimo de informações, liberando a criati-

dade. Interliga as demais disciplinas ajudando a compreensão de desenhos em geral e a resolução de questões de natureza prática do cotidiano. O desenho concretiza os conhecimentos teóricos da Geometria, fortalecendo o ensino desta importante matéria.

Percebe-se que, com o auxílio do desenho geométrico, o estudante adquire uma maior facilidade em desenvolver habilidades matemáticas, concretiza os conhecimentos teóricos da geometria e adquire uma visão espacial mais desenvolvida.

Fazendo uma relação direta do desenho geométrico com o estudo da geometria, Castrucci em [5] aponta a necessidade do estudo do desenho e da geometria acontecerem em paralelo, quando as regras e teoremas dados na geometria irão ser postos em prática no desenho. Conceitos como pontos notáveis, tipos de triângulos, retas paralelas, relação entre circunferência e ângulo são mais fáceis de se visualizar a partir da prática da construção.

Kalter aplicou um teste de geometria a 136 alunos de 8^a série (atual 9^o ano) de seis escolas diferentes para comparar os rendimentos entre alunos que tiveram oportunidade de estudar geometria usando técnicas de construção geométrica, e alunos que estudaram geometria da maneira tradicional. Além disso, aplicou um questionário a diversos professores de diferentes escolas para coletar a opinião deles sobre a importância do desenho geométrico no currículo da matemática. Tais testes mostraram que o desempenho dos alunos das escolas que tiveram contato com construções geométricas é significativamente melhor em relação aos outros. Ademais, professores indicaram o estudo do desenho geométrico como um forte aliado ao estudo da geometria.

Um outro estudo do uso das construções geométricas no ensino da geometria foi feito por Villa em [7]. Em seu trabalho, Villa elaborou diversos problemas para os alunos do ensino médio, que consistiam em efetuar construções geométricas básicas. Alguns dos trabalhos feitos pelo autor foram:

1. Construção de triângulo e método para encontrar o seu incentro, ortocentro, baricentro e circuncentro, com o uso de régua e compasso;
2. Construção da bissetriz, mediana e mediatriz;
3. Construção de polígono regular, a partir da divisão da circunferência;
4. Recuperar centro de circunferência dada e traçar seu diâmetro;
5. Construção de um triângulo numa semicircunferência.

Ao fazer uma análise dos exercícios feitos com os alunos, Villa concluiu que eles tiveram uma maior facilidade em reconhecer os pontos notáveis de um triângulo, além de compreender os conceitos de mediana, mediatriz e bissetriz com mais facilidade. O pesquisador, ainda, observou uma maior capacidade dos alunos em organização e cuidado ao terminarem as atividades.

Na atividade de inscrição de polígono regular em circunferência, os alunos apresentaram uma maior facilidade no aprendizado desta etapa do conteúdo, além de uma boa assimilação das diferenças entre inscrição e circunscritão das figuras.

Como resumo dos resultados obtidos pela experiência, Villa observou uma sensível melhora no aprendizado dos conteúdos de geometria plana. Tal melhora se deu pela prática em si. O pesquisador notou que o interesse e a participação dos alunos pelo método e assunto tratado cresceram em relação ao ensino tradicional de geometria.

Novas perspectivas do ensino do Desenho

Tendo em vista toda problemática do ensino da matemática, em particular da geometria, muito se busca em termos de melhorar o nível qualitativo do conhecimento dos alunos. Considerando os benefícios do ensino do desenho e das construções geométricas no ensino da geometria e da matemática, podemos pensar em como abordar esse tópico nos dias de hoje.

Pensando nisso, não podemos deixar de lembrar que o uso dos instrumentos para a construção, como régua e compasso, é de extrema importância, pois mexe com outras áreas do cognitivo do aluno que vão auxiliá-lo no futuro escolar e pessoal, como mencionado no texto exposto. Porém, podemos pensar também em quais outras ferramentas de ensino podemos usar para obtermos resultados ainda mais satisfatórios.

Gravina (1996) propõe estudar a utilização de programas gráficos de construção geométrica como Cabri-Géomètre e Geoplan em práticas pedagógicas de ensino de geometria. Ela propõe, com o uso dos programas acima citados para a prática da geometria dinâmica, o descobrimento de novas perspectivas na figura e seus possíveis pontos de vista.

O uso desses softwares para o ensino do desenho torna-se interessante por unir o uso de régua e compasso eletrônicos e a prática da construção para o ensino da geometria. Além disso, ambos os programas apresentam recursos de “modificação” do desenho feito, para fins de reflexões conceituais e podem trabalhar tanto o lado geométrico quanto o lado algébrico do problema. Gravina, em [4], afirma que:

Dois são os principais aspectos didáticos de utilização dos programas: a) os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações, quando o objetivo é o

domínio de determinados conceitos através da construção; b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo a descoberta de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível de escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente.

Podemos perceber que o uso de aplicativos de construção geométrica oferece ao aluno uma experiência pedagógica completa em relação ao ensino da geometria. Poder trabalhar com aspectos da experimentação de conceitos e teoremas vistos no ensino tradicional da geometria auxilia ao aluno na visualização mais fácil do que se está sendo trabalhado. Além disso, podemos perceber também que o uso dos softwares dá ao aluno mais possibilidades de tentar por si só chegar ao resultado final por meio de experimentações.

Considerações Finais

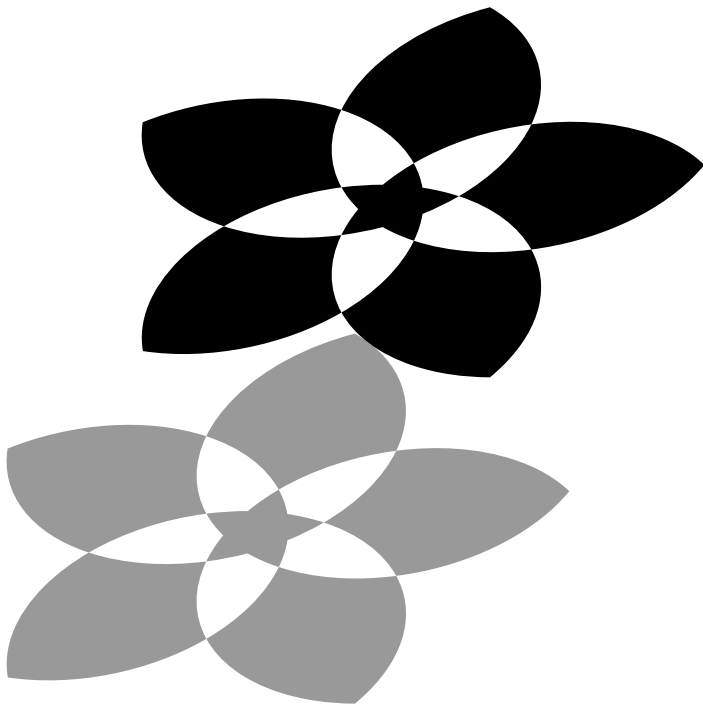
O ensino do desenho geométrico na formação do brasileiro teve sua importância desde a vinda da família real para o Brasil, no século XVIII, até a década de 60, quando as Leis de Diretrizes e Bases da educação a transformaram em matéria optativa e, finalmente, excluíram-na do currículo nacional.

Considera-se o desenho geométrico uma ferramenta importante para o ensino da matemática, em particular da geometria, e para a evolução do cognitivo do estudante. Com ela, o aluno desenvolve sua capacidade de organização, projeção e pensamento matemático e espacial, além de aprimorar os conceitos da geometria de maneira prática.

Dentro das perspectivas propostas pelos pesquisadores em seus trabalhos, todos obtiveram resultados semelhantes. Observou-se com seus estudos que o ensino da geometria com auxílio das construções geométricas traz inúmeras vantagens para o ensino da geometria e melhorias no aprendizado da matemática em geral. Além dos alunos mostrarem uma maior facilidade em compreender a teoria, eles se mostraram mais interessados em acompanhar e aprender pela prática, que é a natureza das construções. Nota-se, portanto, que incluir a metodologia do desenho geométrico como atividade prática do ensino da geometria, ou até a volta do desenho geométrico como disciplina nas matrizes escolares, torna o aluno mais interessado, capaz e faz com que ele desenvolva sua independência, visão espacial e pensamento matemático.

Referências

- [1] Clézio Lemes de Oliveira, *Importância do Desenho Geométrico*, Monografia , Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005.
- [2] Evandro Alexandre da Silva Costa e Milton Rosa, *Fragmentos Históricos do Desenho Geométrico no Currículo Matemático Brasileiro*, Artigo, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.
- [3] Evandro Alexandre da Silva Costa e Milton Rosa, *Historiando o Desenvolvimento do Desenho Geométrico: Possibilidades do Retorno desse Conhecimento no Currículo Escolar*, Artigo, Revista Vidya, Volume 35, 2015.
- [4] Maria Alice Gravina, *Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria*, Artigo, Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, páginas 1-13, Belo Horizonte, 1996.
- [5] Elenice de Souza Lodron Zuin, *Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.
- [6] Raymond Duval, *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning*, 1999.
- [7] Airton Della Villa, *A Resolução de Problemas Matemáticos, Utilizando Como Ferramenta o Ensino do Desenho Geométrico: A importância do desenho geométrico no 8º e 9º anos da Educação Básica*, O Professor PDE e os Desafios da Escola Pública Catarinense, Volume 1, 2012.



Curiosidades

Elon Lages Lima

Elon Lages Lima nasceu em Maceió, capital do Estado do Alagoas, dia 9 de Julho de 1929.

Bacharel em Matemática pela Universidade do Brasil (atual Universidade Federal do Rio de Janeiro) em 1953, obteve, posteriormente, os graus de Mestre em 1955 e Doutor em 1958 pela Universidade de Chicago. Sua contribuição para a Matemática no Brasil não foi apenas no campo da pesquisa, pois atuou como professor, administrador e escreveu vários livros.

Elon obteve seu doutorado na área de Topologia Algébrica. Como pesquisador desenvolveu muitos trabalhos pioneiros no campo de vetores comutativos. Um dos problemas importantes que Elon resolveu nesse campo foi proposto pelo grande matemático da Universidade de Princeton John Milnor, que consistia em demonstrar a inexistência de campos de vetores comutativos na esfera de dimensão 3.

Como escritor, Elon foi extremamente produtivo. Escreveu mais de 40 livros e foi agraciado com o Prêmio Jabuti de Ciências Exatas duas vezes pelos livros *Álgebra Linear* e *Espaços Métricos*. Ademais, criou duas coleções: *Projeto Euclides* e *Coleção Matemática Universitária*, os quais têm como objetivos desenvolver a literatura matemática brasileira e estimular o surgimento de novos autores.

Além de escrever muitos livros e ter sido um pesquisador de alto nível, Elon tinha uma grande preocupação com o Ensino Básico de Matemática no Brasil. Com isso em mente, no ano de 1990, criou o Programa de Aperfeiçoamento de Professores do Ensino Médio (PAPMEM) no IMPA, que está ativo até hoje e já beneficiou mais de 20 mil professores.

Embora não gostasse de tarefas burocráticas, como cita seu amigo e colega Professor Jonas Gomes em um texto que escreveu após a morte de Elon, foi diretor do IMPA por três períodos, de 1969-1971, 1979-1980 e 1989-1993 e já chegou a ocupar a presidência da Sociedade Brasileira de Matemática. Além disso, Elon ajudou a estruturar os cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática da Universidade Nacional de Brasília, instituição na qual recebeu seu último título de Doutor Honoris Causa em 2016.

Elon Lages Lima faleceu na manhã do dia 7 de Maio de 2017 no Rio de Janeiro, deixando cinco filhas de seu primeiro casamento e sua atual esposa Carolina Celano.

Referências

- [1] Giuliana Viggiano, *Morre Elon Lages Lima, um dos maiores matemáticos do Brasil*, Revista Galileu, 2017.
- [2] Jonas Gomes, *Depoimento do Prof. Jonas Gomes*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2017. Link para o texto: <https://www.sbm.org.br/noticias/elon-lages-lima>.

Srinivasa Ramanujan

Srinivasa Ramanujan nasceu no dia 22 de Dezembro de 1887 em Erode, uma pequena cidade no sul da Índia.

Desde muito cedo Ramanujan demonstrava uma enorme curiosidade pela Rainha das Ciências ² e possuía uma grande habilidade para fazer cálculos. Devido a tal curiosidade e habilidade, aos 7 anos, recebeu uma bolsa em uma escola de Kumbakonam, no mesmo estado de sua cidade natal.

Aos 15 anos, teve em mãos seu primeiro livro sobre a disciplina; o livro em questão chama-se *Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics* [1], escrito pelo matemático britânico G.S. Carr. Vale ressaltar que a obra continha muitas demonstrações, algo que era desconhecido de Ramanujan pois não era de seu conhecimento a formalidade e rigor em Matemática, uma vez que jamais havia frequentado ou mesmo conhecido a academia.

Em seguida, aos 16 anos, ganhou uma bolsa para estudar no colégio governamental de Kumbakonam, porém Ramanujan tinha um interesse tão grande pela Matemática que negligenciava outras disciplinas, o que acarretou na perda de sua bolsa.

²O Matemático alemão Karl Friederich Gauss se referia à Matemática como a Rainha das Ciências, segundo o artigo *Gauss zum Gedächtniss*, escrito por H. R. Wohlwend, e publicado pela *Sändig Reprint Verlag* em 1856

Em 1909 casou-se e, como precisava sustentar sua família, foi trabalhar como contabilista na Companhia do Porto de Madrastra. Embora fosse um trabalhador responsável, Ramanujan queria trabalhar efetivamente como matemático e publicar os seus resultados, mas não tinha recursos para isso.

Contudo, com a ajuda de alguns amigos, enviou cartas à Europa para vários matemáticos, contendo aproximadamente 120 teoremas e diversas fórmulas. Apesar do esforço empregado, o único que considerou tais correspondências e percebeu a importância do trabalho desenvolvido por Ramanujan, foi o brilhante matemático Godfrey Harold Hardy, da Trinity College, que a partir de então foi seu amigo e mentor.

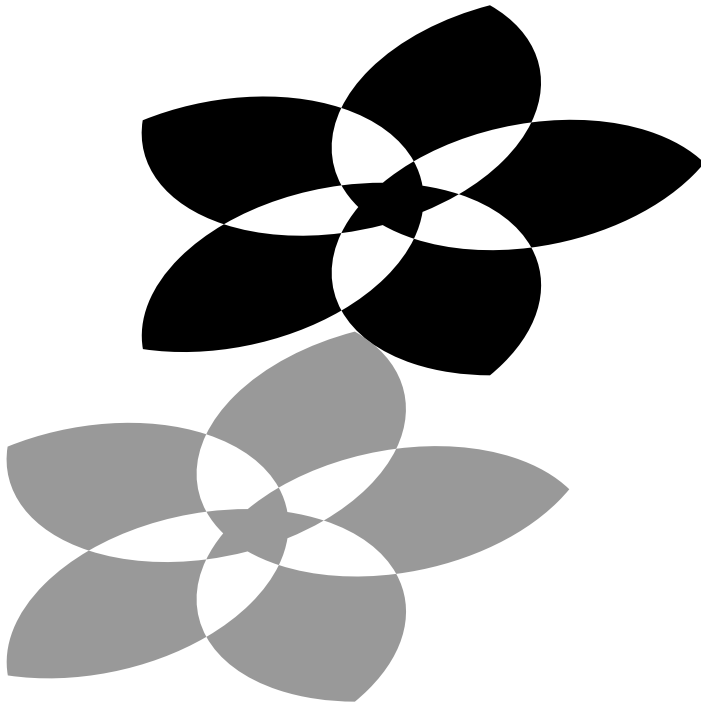
Desde então, Hardy teve a difícil tarefa de introduzir à Ramanujan o método de prova em Matemática para então publicar os trabalhos do jovem indiano. Ramanujan dedicou-se a área da Matemática conhecida como Teoria dos Números, considerada a área mais difícil por muitos matemáticos, inclusive Hardy.

Ramanujan viveu por cinco anos em Cambridge, onde publicou 21 artigos, 5 destes em colaboração com Hardy. Em 1917, ele foi diagnosticado com tuberculose e logo depois, em 1919, voltou à Índia para ficar com sua família onde veio a falecer em 1920 aos 33 anos de idade.

Apesar de ter uma vida curta, Ramanujan deixou um legado para a Matemática de mais de quatro mil teoremas, seus escritos continuam guardados em Cambridge e seu trabalho ainda é estudado por Matemáticos ao redor do mundo. Sobre o seu trabalho, foram descobertas aplicações a diversas áreas do conhecimento como a química de polímeros, buracos negros, ciência da computação e a investigação do cancro.

Referências

- [1] Enrique Gracián, *Ramanujan, o indiano que fazia matemática sem nunca a ter aprendido*, National Geographic, Edição Especial, Os Números Primos: Um Longo Caminho Para o Infinito, Portugal.
- [2] Matthew Brown, *O Homem que Viu o Infinito*, Drama/Filme Biográfico, 2015.



Resoluções dos Problemas Propostos

Problema 6. (Proposto na Revista da ORM/SC, número 14)

Considere uma sequência numérica $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, em que seus primeiros termos são

$$-1, -4, -8, -13, -19, -26, \dots,$$

e sempre que tomarmos três termos consecutivos, digamos x_{n-1} , x_n e x_{n+1} , temos que a diferença entre x_n e x_{n+1} é uma unidade a mais que a diferença entre x_{n-1} e x_n .

Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos que:

a) $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = -1$

b) $x_n = \frac{2 - 3n - n^2}{2}.$

Resolução (Pedro Lourenço, aluno do curso de graduação de Licenciatura em Matemática da UFSC)

Pelo enunciado temos que a diferença entre x_n e x_{n+1} é uma unidade a mais que a diferença entre x_{n-1} e x_n .

Logo,

$$x_n - x_{n+1} = x_{n-1} - x_n + 1 \Rightarrow -1 = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}.$$

Como queríamos mostrar no item (a).

Para demonstrarmos o item (b) precisamos do seguinte resultado:

$$x_{n+1} = S_n + x_1$$

em que S_n é a soma da sequência $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, em que $b_n = x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vamos primeiramente mostrar a veracidade deste resultado parcial.

Note que: $b_1 = x_2 - x_1 = -4 - (-1) = -3$, $b_2 = x_3 - x_2 = -8 - (-4) = -4$ e $b_3 = x_4 - x_3 = -18 - (-8) = -10$. A sequência $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ forma uma progressão aritmética de razão igual a -1 em que o primeiro termo da sequência é igual a -3 .

Será útil calcular a soma dos n primeiros termos da sequência $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. A soma dos n de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{(b_1 + b_n) \cdot n}{2}$$

onde b_1 e b_n são os termos da P.A., n a quantidade de termos e S_n a soma dos n primeiros termos. Calculando a soma dos n primeiros termos de $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, em que

$b_1 = -3$ e $b_n = b_1 + (n-1).r$ em que r é a razão da P.A., ou seja, $b_n = -3 + (n-1).(-1) = -2 - n$. Substituindo b_1 e b_n na fórmula da soma da P.A., tem-se:

$$S_n = \frac{(-3 + (-2 - n)).n}{2} = \frac{(-5 - n).n}{2} = \frac{5n - n^2}{2}. \quad (*)$$

Será útil também calcular S_{n-1} dos termos de $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, que podemos obter apenas retirando o termo b_n da soma S_n , ou seja:

$$S_{n-1} = S_n - b_n = \frac{(-5 - n).n}{2} - (-2 - n) = \frac{4 - 3n - n^2}{2}. \quad (**)$$

De forma análoga, podemos calcular S_{n-2} que será útil para a resolução, então:

$$S_{n-2} = S_{n-1} - b_{n-1} = \frac{6 - n - n^2}{2}. \quad (***)$$

Para mostrar que $x_n = \frac{2-3n-n^2}{2}$, vamos mostrar que $x_n = S_n + x_1$, em que S_n é a soma dos n primeiros termos de $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Usaremos Indução Forte para mostrar que $x_{n+1} = S_n + x_1$.

Para $n = 1$ tem-se que $x_2 = -4$ e, por outro lado, $S_1 + x_1 = b_1 + x_1 = -3 + (-1) = -4$. Logo, a igualdade é verdadeira para $n=1$. Agora suponha ser verdadeira para $k-1 \in \mathbb{N}^*$, e para todos os anteriores também, que:

$$x_k = S_{k-1} + x_1.$$

Devemos mostrar que a igualdade acima é válida para $k \in \mathbb{N}^*$. De (a) fazendo $n = k$ tem-se que $x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} = -1$, logo $x_{k+1} = 2x_k - x_{k-1} - 1$.

Por Hipótese de Indução, temos:

$$x_k = S_{k-1} + x_1 \quad e \quad x_{k-1} = S_{k-2} + x_1.$$

Substituindo em $x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} = -1$, temos:

$$x_{k+1} = 2(S_{k-1} + x_1) - (S_{k-2} + x_1) - 1.$$

De (**) e (***) fazendo $n = k$ tem-se que $S_{k-1} = \frac{4-3k-k^2}{2}$ e $S_{k-2} = \frac{6-k-k^2}{2}$. Logo:

$$x_{k+1} = 2 \left(\frac{4-3k-k^2}{2} + x_1 \right) - \left(\frac{6-k-k^2}{2} + x_1 \right) - 1$$

$$x_{k+1} = \frac{8 - 6k - 2k^2}{2} + 2x_1 - \frac{6 - k - k^2}{2} - x_1 - 1$$

$$x_{k+1} = \frac{8 - 6k - 2k^2 + 4x_1 - 6 + k + k^2 - 2x_1 - 2}{2}$$

$$x_{k+1} = \frac{-5k - k^2}{2} + x_1.$$

De (\star) temos que $S_k = \frac{-5k - k^2}{2}$, logo:

$$x_{k+1} = S_k + x_1. \quad (\star \star \star)$$

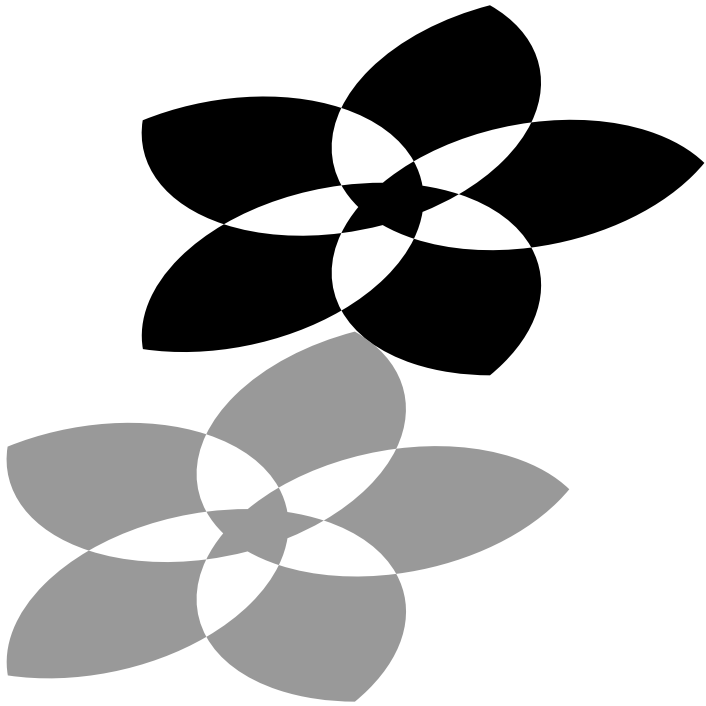
Concluindo o que queríamos demonstrar como resultados parcial.

Com este resultado de $(\star \star \star)$ para $k = n - 1$ e sabendo de $(\star \star)$ que: $S_{n-1} = \frac{4-3n-n^2}{2}$. Então podemos obter o resultado final desejado:

$$x_n = S_{n-1} + x_1 = \frac{4 - 3n - n^2}{2} + (-1) = \frac{4 - 3n - n^2}{2} - \frac{2}{2} =$$

$$x_n = \frac{2 - 3n - n^2}{2}.$$

Como queríamos demonstrar em (b).



Problemas Propostos

A partir deste ano, não vamos mais contar do zero os problemas de cada número da revista, ou seja, vamos sempre continuar a contar do último problema do número anterior da revista. Como nas 14 edições anteriores da revista foram propostos 60 exercícios ao total, nosso primeiro problema desta edição será o de número 61!

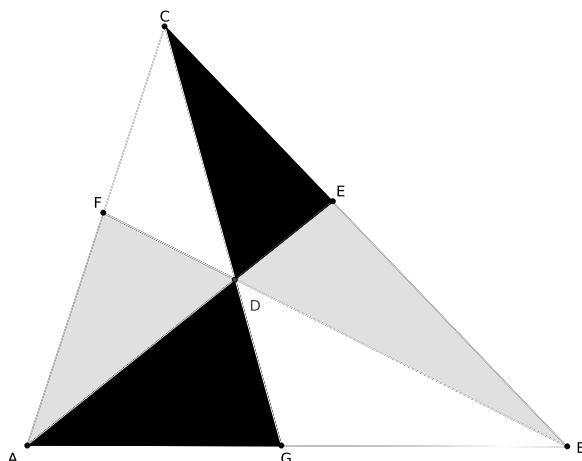
Problema 61. (Proposto por José Luiz Rosas Pinho, Professor da Universidade Federal de Santa Catarina, Tutor do PET Matemática e Coordenador da Olimpíada Regional de Santa Catarina.)

Um resultado clássico sobre as medianas de um triângulo é:

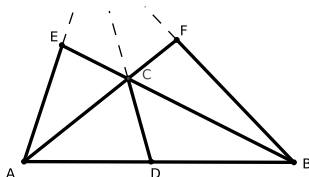
As três medianas de qualquer triângulo se intersectam em um único ponto chamado baricentro do triângulo e esse ponto divide cada uma delas na razão 2:1 (a distância do baricentro a cada vértice é o dobro da sua distância ao ponto médio do lado oposto àquele vértice). Além disso, essas medianas dividem o triângulo em seis triângulos de mesma área.

Pouco se fala de recíprocas desse resultado. Vejamos algumas (para provar):

- a) Se três cevianas de um triângulo se intersectam em um único ponto interior e se as áreas dos seis triângulos formados forem iguais, então essas cevianas são as medianas do triângulo maior.
- b) (Com a hipótese em (a) mais “fraca”): Se três cevianas de um triângulo se intersectam em um único ponto interior e se cada par de triângulos, dentre os seis triângulos formados, cada um com um lado contido em um lado do triângulo maior, tiverem a mesma área, então essas cevianas são as medianas do triângulo maior.
- c) (Com a hipótese em (b) mais “fraca”): Se três cevianas de um triângulo se intersectam em um único ponto interior e se dois pares de triângulos, dentre os seis triângulos formados, cada um com um lado contido em um lado do triângulo maior, tiverem a mesma área, então essas cevianas são as medianas do triângulo maior.
- d) Se três cevianas de um triângulo se intersectam em um único ponto interior D e se as áreas dos triângulos $\triangle AGD$ e $\triangle CED$ forem iguais, se as áreas dos triângulos $\triangle BGD$ e $\triangle CFD$ forem iguais e finalmente se as áreas dos triângulos $\triangle BED$ e $\triangle AFD$ forem iguais, então essas cevianas são as medianas do triângulo maior.



- e) (Dificultando um pouco mais – notação da figura acima) Se três cevianas de um triângulo se intersectam em um único ponto interior D, se as áreas dos triângulos $\triangle BED$ e $\triangle CFD$ forem iguais e se as áreas dos triângulos $\triangle CED$ e $\triangle AFD$ forem iguais, então essas cevianas são as medianas do triângulo maior.
- f) Se três cevianas de um triângulo se intersectam em um único ponto que as divide na razão 2:1, então esse ponto é o baricentro do triângulo.
- g) (Com a hipótese em (f) mais “fraca”): Se duas cevianas de um triângulo se intersectam em um ponto que as divide na razão 2:1, então esse ponto é o baricentro do triângulo.
- h) Se três cevianas de um triângulo se intersectam em um único ponto interior D e se as áreas dos triângulos $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ e $\triangle ACD$ forem iguais (notação da figura acima), então essas cevianas são as medianas do triângulo maior.
- i) Se os quatro triângulos da figura abaixo, em que C está em \vec{AF} e em \vec{BE} e D está em \vec{AB} , tiverem a mesma área, então as semirretas \vec{AE} , \vec{DC} e \vec{BF} se intersectam em um único ponto e C é o baricentro do triângulo formado por aquele ponto e os pontos A e B (figura abaixo).



j) Falso ou verdadeiro:

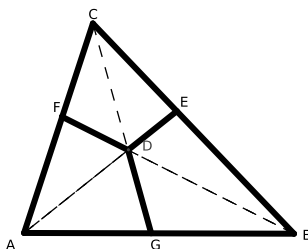
Se três cevianas de um triângulo se intersectam em um único ponto interior D e se as áreas dos triângulos $\triangle AGD$ e $\triangle BGD$ forem iguais e se as áreas dos triângulos $\triangle CDF$ e $\triangle CDE$ forem iguais, então essas cevianas são as medianas do triângulo maior.

k) Falso ou verdadeiro:

Se três cevianas de um triângulo se intersectam em um único ponto interior D e se as áreas dos triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle ACD$ forem iguais, então essas cevianas são as medianas do triângulo maior.

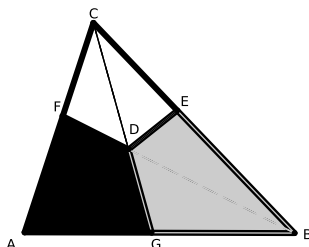
l) Falso ou verdadeiro:

Se três cevianas de um triângulo $\triangle ABC$ se intersectam em um único ponto D e se os três quadriláteros DFAG, DGBE e DECF, que têm D como ponto comum, tiverem a mesma área (figura abaixo), então o ponto D é o baricentro do triângulo $\triangle ABC$.



m) Falso ou verdadeiro:

Se três cevianas de um triângulo $\triangle ABC$ se intersectam em um único ponto D, se os triângulos $\triangle ADG$ e $\triangle ADF$ têm a mesma área e se os triângulos $\triangle BDG$ e $\triangle BDE$ têm a mesma área (figura abaixo), então os triângulos $\triangle CDF$ e $\triangle CDE$ têm a mesma área (isso é verdadeiro) e o ponto D é o baricentro do triângulo $\triangle ABC$.



Problema 62. (Proposto por Antônio Vladimir Martins, Professor da Universidade Federal de Santa Catarina.)

Mostre que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Problema 63. (Proposto por Antônio Vladimir Martins, Professor da Universidade Federal de Santa Catarina.)

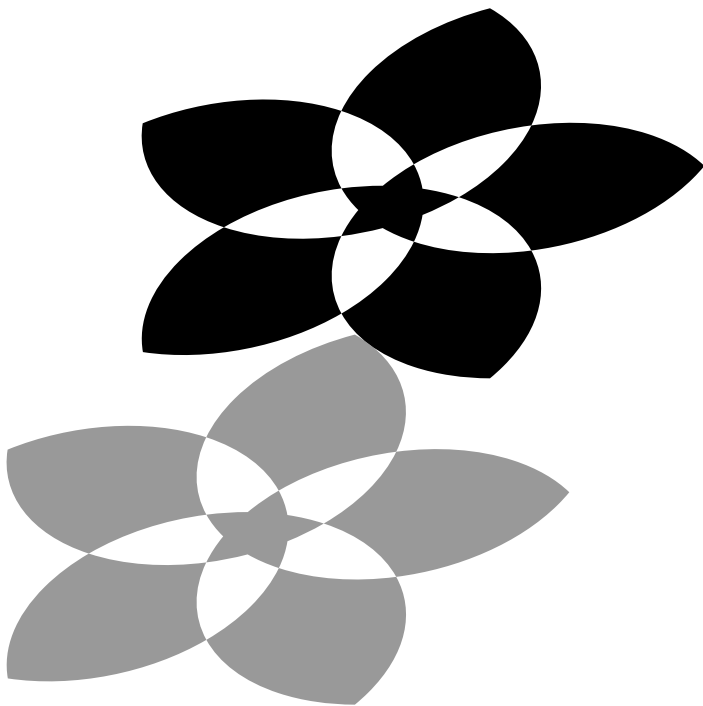
Se $\theta = \frac{2\pi}{7}$, mostre que

$$\cos\theta + \cos2\theta + \cos3\theta + \cos4\theta + \cos5\theta + \cos6\theta = -1.$$

Problema 64. (Proposto por Antônio Vladimir Martins, Professor da Universidade Federal de Santa Catarina.)

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ qualquer, tal que para todo $k \in \mathbb{Z}$ temos que $\theta \neq 2k\pi$. Mostre que

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos2\theta + \cos3\theta + \dots + \cos(n-1)\theta + \cos n\theta = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$



Premiados da ORM/SC
em Outras Olimpíadas
de Matemática

Airton José Schmitt Junior - Biguaçu

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 3)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

Medalha de prata na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 3)

Medalha de prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Amadeo Zimermann - São Pedro de Alcântara

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Prata na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Ana Carolina de Medeiros da Silva - Joinville

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Ana Cláudia Zezulka Machado - Florianópolis

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Medalha de bronze na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 1)

Medalha de prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 1)

Anderson Negreli - São Bento do Sul

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Prata na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2009 (Nível 2)

Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

André Victória Matias - Criciúma

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Bruno da Silveira Dias - Florianópolis

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Bruno Leonardo Schneider - São José

Medalha de Bronze na I Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1998 (Nível 1)

Medalha de Prata na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)

Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Menção Honrosa na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Menção Honrosa na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)

Medalha de Prata na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Bruno Mota - Joinville

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Bruno Nunes - Joinville

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Bruno Visnadi da Luz - Florianópolis

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2015 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Menção Honrosa na XXXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2015 (Nível 3)

Menção Honrosa na XIX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2016 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 12ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2016 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XXXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2016 (Nível 3)

Carlos Bruno Medeiros da Costa Pereira Neto - Joinville

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Carlos Eduardo dos Santos Feliciano - Cocal Do Sul

Menção Honrosa na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 1)

Caroline da Silveira - Joinville

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Cristine Buettgen - Pomerode

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Cristine Dominico - Antônio Carlos

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2016 (Nível 2)

Medalha de Prata na 12ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2016 (Nível 2)

Douglas Ohf - Joinville

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 3)

Menção Honrosa na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Eduardo Adelano Agostini Pasold - Timbó

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Eduardo José Mendes - Biguaçu

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Eduardo Lennert Rammé - Joinville

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2011 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

Elisangela Dornelles - Massaranduba

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

Enzo Jardim Vendramin - Florianópolis

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 1)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2015 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2016 (Nível 2)

Felipe Paupitz Schlichting - Florianópolis

Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)

Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2001 (Nível 2)

Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Fernanda Momm Antunes - Joinville

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Fernando Luiz Alves Lapa - Joinville

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

Gabriel Augusto Moreira - Joinville

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Gabriel Machado - Massaranduba

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Gabriel Savi - Cocal Do Sul

Medalha de Ouro na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2015 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 1)

Gabriella Maria Radke Chaves - Joinville

Medalha de Bronze na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Gislaine Hoffmann - Antônio Carlos

Medalha de Prata na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Medalha de Prata na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Giuliano Boava - Criciúma

Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 3)

Medalha de Prata na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 3)

Menção Honrosa na III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2000

Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2001

Menção Honrosa na IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em

2001

Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2002

Menção Honrosa na V Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2002

Medalha de Bronze na XXV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2003

Medalha de Bronze (Third Prize) na X Internacional Mathematical Competition for University Students em 2003 - Cluj-Napoca, Romênia

Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2004

Guilherme Rohden Echelmeier - Itajaí

Medalha de Prata na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)

Medalha de Ouro na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)

Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)

Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 2)

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)

Guilherme Weber Menon - Joinville

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Gustavo Bernardo de Oliveira - Joinville

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Gustavo Lisbôa Empinotti - Florianópolis

Medalha de Prata na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)

Medalha de Ouro na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Medalha de Prata na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na 13ª Olimpíada de Maio em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XIX Olimpíada de Matemática do Cone Sul em 2008 - Temuco, Chile

Medalha de Prata na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na LI Olimpíada Internacional de Matemática em 2010 - Astana, Cazaquistão

Medalha de Bronze na III Romanian Master in Mathematics em 2010

Medalha de Bronze na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2010

Medalha de Prata na 25ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2010 - Assunção, Paraguai

Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na IV Romanian Master in Mathematics em 2011

Medalha de Prata na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2011

Medalha de Bronze na LII Olimpíada Internacional de Matemática em 2011 - Amsterdã, Holanda

Hanna Kurihara e Silva - Florianópolis

Medalha de Bronze na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)

Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000

(Nível 1)

Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)

Medalha de Bronze na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)

Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Helena Carolina Rengel Koch - Jaraguá do Sul

Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Heloisa Gabriela Paterno - Rio do Sul

Menção Honrosa na XIX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2016 (Nível 3)

Medalha de Prata na 12ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2016 (Nível 3)

Heloisa Rosá Panini - Timbó

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

Ivani Ivanova Ivanova - Blumenau

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Prata na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Janine Garcia - São Francisco do Sul

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Jaqueline Wenk - Massaranduba

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

João Marcos Carnieletto Nicolodi - Florianópolis

Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 1)

Medalha de Ouro na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Julia Almeida Oliveira - Joaçaba

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Júlia Bertelli - Joinville

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XIII Olimpíada Regional de

Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 1)

Medalha de Prata na 17ª Olimpíada de Maio em 2011 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Julia Heck Deters - Itapiranga

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

Karina Livramento dos Santos - Navegantes

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Katarine Emanuela Klitzke - Timbó

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 2)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 2)

Medalha de Prata na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

Laiane Freitas Suzart - Joinville

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Leandro Augusto Lichtenfelz - Blumenau

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2008

Medalha de Prata (Second Prize) na XVI Internacional Mathematical Competition for University Students em 2009 - Budapeste, Hungria

Leandro Jun Kimura - Joinville

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Leandro Roza Livramento - Florianópolis

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Leonard Henrrik Wodtke - Joinville

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Leonardo Gonçalves Fischer - Fraiburgo

Medalha de Bronze na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)

Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Leonardo Lennert Rammé - Joinville

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Letícia Perini - Timbó

Menção Honrosa na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Lorenzo Andreus - Blumenau

Medalha de Ouro na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XXXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2014 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2015 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XXXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2015 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XIX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2016 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 12ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2016 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XXXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática 2016 (Nível 3)

Lucas Bruno Barbosa Sandoval - Florianópolis

Medalha de Ouro na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 2)

Medalha de Bronze na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 3)

Lucas Gabriel Krutzsch - Massaranduba

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 1)

Lucas Lolli Savi - Florianópolis

Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 2)

Medalha de Bronze na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)

Lucas Westfal - Cocal Do Sul

Medalha de Bronze na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 1)

Medalha de Prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 1)

Luiz Carlos Possa Bendo - Cocal Do Sul

Medalha de Bronze na XIX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2016 (Nível 2)

Medalha de Prata na 12ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2016 (Nível 2)

Luis Fernando Momm Antunes - Joinville

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Luiz Fernando Bossa - Brusque

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na XXXV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2013 (Nível Universitário)

Maria Julia Lemos Ramos - Içara

Menção Honrosa na XIX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2016 (Nível 2)

Medalha de Prata na 12ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2016 (Nível 2)

Mateus Israel Silva - Florianópolis

Medalha de Bronze na XIX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2016 (Nível 3)

Medalha de Prata na 12ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2016 (Nível 3)

Mateus Spezia - Blumenau

Medalha de Prata na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 3)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 3)

Medalha de ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Mikhail Zimmer Heidrich - Lages

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2007 (Nível 1)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Murilo Schoffen Prado - Florianópolis

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2014 (Nível 1)

Natália Deyse Koch - Chapecó

Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Natan Cardozo Leal - São Bento do Sul

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2005 (Nível 2)

Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)

Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 3)

Medalha de Prata na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Nicole Braga de Medeiros Nicolak - Joinville

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Rafael Della Giustina Basilone Leite - Florianópolis

Medalha de Ouro na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2012 (Nível 1)

Medalha de Prata na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 2)

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 2)

Menção Honrosa na XXXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2014 (Nível 2)

Renan Henrique Finder - Joinville

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)

Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Medalha de Prata na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)

Menção Honrosa na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 2)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 2)

Medalha de Prata na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XVIII Olimpíada de Matemática do Cone sul em 2007 - Uruguai

Medalha de Prata na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)

Medalha de Prata na 23ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2008 - Brasil

Medalha de Prata na 49ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2008 - Madri, Espanha

Medalha de Prata na 50ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2009 - Bremen, Alemanha

Medalha de Ouro na 24ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2009 - Santiago de Querétaro, México

Medalha de Ouro na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2010

Medalha de Ouro na XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2011

Medalha de Ouro (First Prize) na XVIII International Mathematics Competition for University Students em 2011

Medalha de Prata na III Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática

em 2011 - Quito, Equador

Medalha de Ouro (First Prize) na XIX Internacional Mathematical Competition for University Students em 2012 - Blagoevgrad, Bulgária

Medalha de Ouro na IV Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática em 2012 - Guanajuato, México

Ricardo Gonçalves Marques Junior - Joinville

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 3)

Medalha de Prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Rodrigo Vicente Cercal - Joinville

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

Rogério Hannemann Júnior - Joinville

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Ruan Victor Soares da Silva - Joinville

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Sandro Roberto Pauli Junior - Antônio Carlos

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Medalha de prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 2)

Medalha de Prata na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

Shadi Bavar - Blumenau

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Sidnei Rodrigo Dos Santos - Jaraguá do Sul

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Medalha de Prata na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 3)

Simon Joel Warkentin - Joinville

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

Thais Jandre - Pomerode

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 1)

Thiago Roberto Kuchenbecker Leu - Massaranduba

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

Tiago Madeira - Itajaí

Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 1)

Medalha de Bronze na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 2)

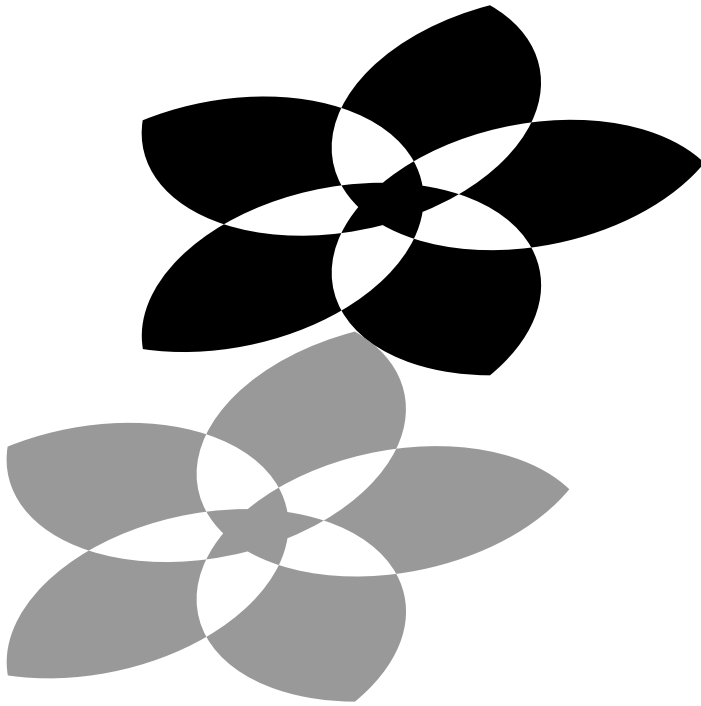
Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada de Maio em 2003 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 2)
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada de Maio em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)
Medalha de Prata na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)

Vitor Costa Fabris - Criciúma

Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)
Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Vitor Probst Curtarelli - Timbó

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Medalha de Prata na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)



Informações Gerais

Cadastramento

A partir de 2017 as escolas que quiserem participar da ORM devem fazer um cadastro no nosso site (www.orm.mtm.ufsc.br) no início do ano, fique atento as informações na nossa página para se inteirar dos prazos.

Como Adquirir a Revista

Desde 2017, a revista não está mais sendo enviada às escolas do estado de Santa Catarina, devido a cortes feitos no orçamento do projeto. No entanto, as escolas que desejarem um exemplar da revista podem solicitar o envio da mesma, desde que o custo do envio seja pago pelo solicitante.

Entretanto, continuamos a enviar um exemplar da revista às universidades federais brasileiras (um exemplar por IES), por intermédio da Biblioteca Universitária da UFSC.

Além disso, no site da ORM/SC (www.orm.mtm.ufsc.br), você pode visualizar cada um dos 15 exemplares da revista da ORM/SC. Caso tenha interesse em adquirir um de nossos exemplares, você pode fazer isto entrando em contato com o PET Matemática da UFSC.

Erramos

Na Revista nº 14, deve ser observada a seguinte alteração no item (a) do problema proposto 1, da p. 95, na parte de Problemas Propostos:

A equação

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = -1, \quad (14)$$

deve ser substituída pela equação

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = -1. \quad (15)$$

A alteração deve-se ao fato de termos o termo x_{n-1} na equação (14), apresentada na revista nº 14. Assim, como n varia entre os valores $\{1, 2, 3, \dots\}$, quando $n = 1$ teríamos o termo x_0 , o qual não pertence a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ (o primeiro termo desta sequência é $x_1 = -1$). Na equação (15), o problema é solucionado.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

- endereços eletrônicos: www.orm.mtm.ufsc.br;
- correios eletrônicos: orm@pet.mtm.ufsc.br;
- telefone: (48) 3721-4595 (PET Matemática da UFSC);
- endereço: PET Matemática
Departamento de Matemática - CFM
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Universitário - Trindade
88040-900 – Florianópolis/SC.