
Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

nº 14, 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Reitor: Luiz Carlos Cancellier de Olivo

Vice-Reitora: Alacoque Lorenzini Erdmann

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO - PROEX

Pró-Reitor: Rogério Cid Bastos

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD

Pró-Reitor: Felício Wessling Margotti

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM

Diretor: Valdir Rosa Correia

Vice-Diretor: Lício Hernanes Bezerra

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Chefe: Aldrovando Luís Azeredo Araújo

Sub-Chefe: Matheus Cheque Bortolan

Apoio:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

SBM - Sociedade Brasileira de Matemática

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina/
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],
2004 -
v.: 14 (2017) 23 cm

Anual
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas,
Exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas.

Coordenadora da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina: Alda Dayana Mattos Mortari

Bolsista da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina: Mateus Souza Oliveira

Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM/SC): José Luiz Rosas Pinho

Professores da ORM/SC: Alda Dayana Mattos Mortari, Carmem Suzane Comitre Gimenez, Danilo Royer, Eliezer Batista, Giuliano Boava, José Luiz Rosas Pinho, Leonardo Koller Sacht, Licio Hernanes Bezerra e Nereu Estanislau Burin

Bolsista da ORM/SC: Crislaine Botelho Costa

Bolsistas do PET Matemática: Ana Carolina Altomani, André Borges Carlos, Ben-Hur Eidt, Bruna da Silva Donadel, Carlos Eduardo Caldeira, Carlos Eduardo Leal de Castro, Gabriel Simon Schafaschek, Helena Carolina Rengel Koch, Jean Carlo Gengnagel, João Rafael de Melo Ruiz, Letícia Figueredo de Carvalho, Lidiane Camini e Matheus Pimenta Carracelas

Colaboradores: acadêmica Isabele Sartor e professor Leandro Batista Morgado

Coordenadora da Olimpíada Regional Mirim de Matemática (ORMM): Alda Dayana Mattos Mortari

Professores da ORMM: Alda Dayana Mattos Mortari, Carmem Suzane Comitre Gimenez e Gilles Gonçalves de Castro

Bolsista da ORMM: Liana Garcia Ribeiro

Comitê Editorial da Revista:

Alda Dayana Mattos Mortari
Danilo Royer
Eliezer Batista
Giuliano Boava
Helena Carolina Rengel Koch
José Luiz Rosas Pinho
Leonardo Koller Sacht
Licio Hernanes Bezerra
Mateus Souza Oliveira
Nereu Estanislau Burin

Editoração Eletrônica:

Alda Dayana Mattos Mortari
Carlos Eduardo Leal de Castro
Jean Carlo Gengnagel
Mateus Souza Oliveira
Rodrigo Maciel Rosa

Tiragem:

800 exemplares

Arte da Capa:

Rafaela Goulart de Andrade
Renata Leandro Becker

Postagem:

Segundo semestre de 2016

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina nº 14, 2017

ISSN 1679-7612

Sumário

Apresentação	7
XVIII ORM/SC (2015)	9
XVIII ORM/SC em Números	11
Premiados	13
Nível 1	13
Nível 2	15
Nível 3	15
Escolas Participantes	17
Provas	19
Nível 1	19
Nível 2	21
Nível 3	23
Resoluções	25
Nível 1	25
Nível 2	29
Nível 3	35
V ORMM (2015)	43
V ORMM em Números	45
Prova	48
Resolução	50
Artigos	53
Sequências periódicas e problemas de calendário	
Leandro Batista Morgado	55
Criação e resolução de um problema de geometria via construção geométrica	
José Luiz Rosas Pinho	64
Curiosidades	83

Soluções dos Problemas Propostos	87
---	-----------

Problemas Propostos	93
----------------------------	-----------

Premiados da ORM/SC em Outras Olimpíadas de Matemática	97
---	-----------

Informações Gerais	129
---------------------------	------------

Envio de Problemas e Soluções	131
Envio de Artigos	131
Cadastramento	131
Como Adquirir a Revista	132
Fale Conosco	132

Apresentação

A *Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina* é o resultado de um projeto de extensão da UFSC e uma atividade de extensão do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática (SESu/MEC) da UFSC. Participam deste projeto oito professores do Departamento de Matemática da UFSC. O 14º número da Revista foi financiado com recursos da Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), na forma de um auxílio financeiro para um evento da *Olimpíada Brasileira de Matemática*. A Revista é um projeto independente de outros dois projetos de extensão da UFSC, a *Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM/SC)* e a *Olimpíada Regional Mirim de Matemática (ORMM)*; cada um destes três projetos contaram com a participação de bolsistas de extensão do programa PROBOLSAS, da Pró-Reitoria de Extensão (PROEX) e de alunos voluntários. Além disso, a ORM/SC faz parte, em 2016, do projeto Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática / Olimpíada Brasileira de Matemática (editais universais do CNPq: CHAMADA MCTI/CNPQ/SECIS/Nº19/2015 - Olimpíadas Científicas, sob a direção de Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira).

O principal objetivo da Revista é divulgar a ORM/SC e a ORMM em todo o estado de Santa Catarina. Desde a nossa primeira edição nós distribuímos gratuitamente a Revista para cerca de 1000 escolas públicas e particulares, às Secretarias de Educação de todos os municípios do estado e a todas as Gerências de Educação do estado. Infelizmente nesta edição, em virtude de cortes orçamentários feitos na nossa instituição e no projeto, a distribuição será reduzida às escolas que participarem da cerimônia de premiação da ORM/SC e ORMM em 2016. No entanto, continuaremos a enviar um exemplar para cerca de 60 IES públicas através do programa de divulgação da Biblioteca Universitária da UFSC. Além disso, a Revista está disponível na sua versão digital e a versão impressa poderá ser solicitada pelas escolas e professores. Para maiores informações veja a nossa seção “Como Adquirir a Revista”.

Como sempre, encorajamos todos os leitores a enviar problemas para a seção “Problemas Propostos”, bem como soluções dos problemas daquela seção propostos em números anteriores. Artigos serão bem recebidos e publicados desde que sejam aprovados pelo Comitê Editorial da Revista.

Florianópolis, 11 de novembro de 2016.

Alda Dayana Mattos Mortari
Coordenadora da Revista da ORM/SC
Coordenadora da ORMM

José Luiz Rosas Pinho
Tutor do PET Matemática da UFSC
Coordenador da ORM/SC

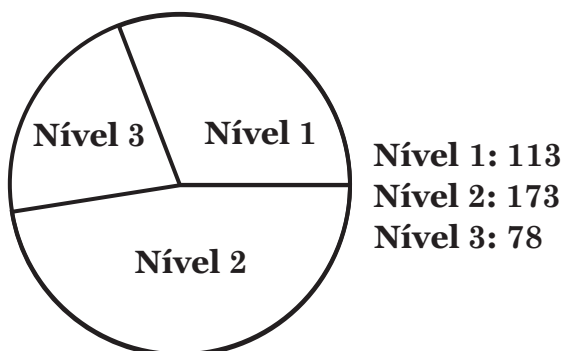


XVIII ORM/SC (2015)

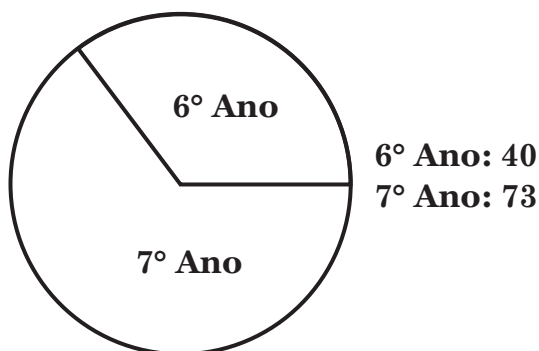
XVIII ORM/SC em Números

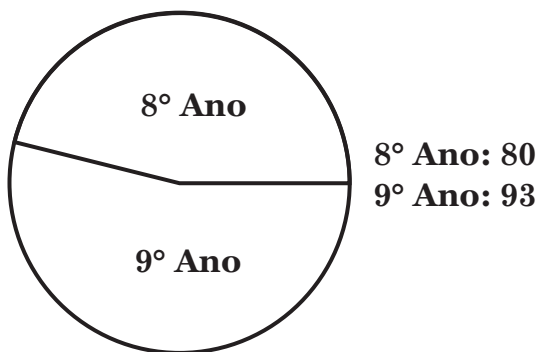
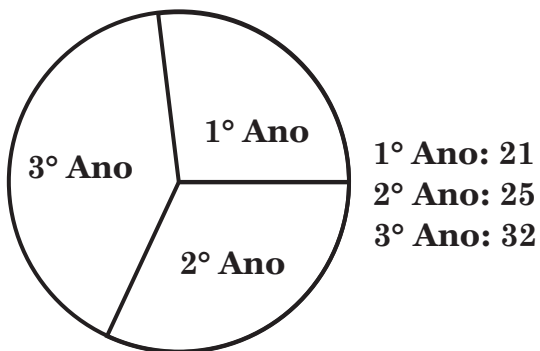
Na primeira fase da XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina participaram 6692 alunos dos ensinos fundamental e médio, oriundos de 150 escolas públicas e particulares de 45 municípios do estado. Deste total, foram classificados 912 alunos para a segunda fase, dos quais 364 compareceram para realizar a prova, cujas distribuições por níveis e anos são mostradas abaixo.

Total de alunos participantes da segunda fase, separados por níveis



Nível 1



Nível 2**Nível 3**

Premiados

A cerimônia de Premiação da XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina ocorreu no dia 29 de novembro de 2015, no Centro de Cultura e Eventos da Universidade Federal de Santa Catarina e contou com a presença das seguintes autoridades: professora Tereza Cristina Rozone de Souza, Diretora do Departamento de Ensino da Pró-Reitoria de Graduação, Maristela Helena Zimmer Bortolini, Pró-Reitora Adjunta de Extensão, professor Lício Hernanes Bezerra, Diretor em exercício do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, professora Silvia Martini de Holanda Janesch, Coordenadora do Curso de Matemática, acadêmica Crislaine Botelho Costa, bolsista de extensão da ORM/SC, acadêmica Daniella Losso da Costa, colaboradora da ORMM, acadêmico Carlos Eduardo Caldeira, bolsista do PET Matemática, professora Carmem Suzane Comitre Gimenez, Coordenadora da ORMM e professor José Luiz Rosas Pinho, Coordenador da ORM/SC e Tutor do PET Matemática.

Na cerimônia, foram premiados 42 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 11% dos alunos que participaram da segunda fase): 4 com medalhas de ouro, 9 com medalhas de prata, 8 com medalhas de bronze e 21 com menções honrosas.

Prêmio William Glenn Whitley¹

- Enzo Jardim Vendramin (Florianópolis)

Nível 1

Ouro

- Eduardo Masselli (Florianópolis)
- Enzo Jardim Vendramin (Florianópolis)

Prata

- Gabriel Rodrigues de Almeida França (Itajaí)
- Julia Tirloni Valle (Florianópolis)
- Martin Baraldi Lobe (Blumenau)

¹O prêmio é destinado ao aluno com a maior pontuação na Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina. Esta é uma homenagem ao professor William Glenn Whitley (ver revista da ORM/SC nº 4) e começou a ser entregue no ano de 2006.

Bronze

- Ana Cláudia Zezulka Machado (Florianópolis)
- Arthur Afonso Brisolara (Florianópolis)
- Helena Schwochow Pereira (Joinville)
- Larissa Zimmermann (Florianópolis)
- Sofia Nuernberg Dias (Florianópolis)

Menção Honrosa

- Carlos Eduardo dos Santos Feliciano (Cocal Do Sul)
- Douglas Felipe Speck (Itajaí)
- Enthony Antunes Negrello (Joinville)
- Gabriel Savi (Cocal Do Sul)
- Gustavo Henrique Potter Scheidt (Itajaí)
- Gustavo Sartorelli de Carvalho Rego (Florianópolis)
- Jean Cesar Terres Rodrigues (Lages)
- Kauan Henrique Werlich (Joinville)
- Lucas Westfal (Cocal Do Sul)
- Paulo Vinícios Appelt (Florianópolis)
- Sara Furtado Pereira (Florianópolis)
- Tainara Luana de Souza (Joinville)

Nível 2**Ouro**

- Gustavo de Medeiros Carlos (Tubarão)

Prata

- Katarine Emanuela Klitzke (Timbó)
- Luiza Machado de Freitas (Florianópolis)
- Sandro Roberto Pauli Junior (Antônio Carlos)

Bronze

- Jaqueline Wenk (Massaranduba)
- Thiago Roberto Kuchenbecker Leu (Massaranduba)

Menção Honrosa

- Cristine Dominico (Antônio Carlos)
- Felipe Roque Rossi (Florianópolis)
- Heloisa Rosá Panini (Timbó)
- Murilo Schoffen Prado (Florianópolis)

Nível 3**Ouro**

- Lorenzo Andreus (Blumenau)

Prata

- Airton José Schmitt Junior (Biguaçu)
- Bruno Visnadi da Luz (Florianópolis)
- Mateus Spezia (Blumenau)

Bronze

- Ricardo Gonçalves Marques Junior (Joinville)

Menção Honrosa

- Cristine Buettgen (Blumenau)
- Douglas Ohf (Joinville)
- Gabriel Pereira do Nascimento (Florianópolis)
- Janio João Farias Junior (Joinville)
- Lucas Steuernagel (Joinville)

Escolas Participantes

Abaixo a relação de todas as 66 escolas participantes da 2ª fase da XVIII ORM/SC:

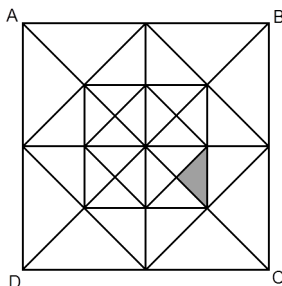
Associação Educacional Luterana Bom Jesus/Ielusc (Joinville); Centro de Ensino Guroo (Florianópolis); Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis); Centro Educacional Universo (Florianópolis); Colégio Bom Jesus Coração de Jesus (Florianópolis); Colégio Bom Jesus Santo Antônio (Blumenau); Colégio Caminho do Saber (Rio Negrinho); Colégio Catarinense (Florianópolis); Colégio Cenecista José Elias Moreira (Joinville); Colégio Cenecista Pedro Antônio Fayal (Itajaí); Colégio Cenecista São José (Rio Negrinho); Colégio Cooperativa Educacional de Imbituba (Imbituba); Colégio Criativo (Florianópolis); Colégio Cruz e Sousa (Florianópolis); Colégio da Lagoa (Florianópolis); Colégio da Univille (São Bento do Sul); Colégio de Aplicação da UFSC (Florianópolis); Colégio Dehon (Tubarão); Colégio Dom Bosco (Rio do Sul); Colégio Dom Jaime Câmara (São José); Colégio dos Santos Anjos (Joinville); Colégio Elisa Andreoli (São José); Colégio Estimoarte (Florianópolis); Colégio Jardim Anchieta (Florianópolis); Colégio Machado de Assis (Joinville); Colégio Marista (Criciúma); Colégio Maximiliano Gaidzinski (Cocal do Sul); Colégio Nossa Senhora da Conceição (Florianópolis); Colégio Paulo Freire (São José); Colégio Posiville (Joinville); Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí); Colégio Santa Catarina (Florianópolis); Colégio Santa Rosa de Lima (Lages); Colégio São Bento (Criciúma); Colégio São Luiz (Brusque); Colégio Servos de Maria (Turvo); Colégio Sinodal Doutor Blumenau (Pomerode); Colégio Super Incentivo (Biguaçu); Colégio Tradição (Florianópolis); Colégio Tupy (Joinville); Colégio Visão (Blumenau); Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis); Escola Autonomia (Florianópolis); Escola Barão do Rio Branco (Blumenau); Escola Básica Municipal Professora Maria da Graça dos Santos Salai (Indaial); Escola de Educação Básica Altamiro Guimarães (Antônio Carlos); Escola de Educação Básica Professora Adélia Cabral Varejão (Laguna); Escola de Ensino Fundamental Cristo Rei (Cocal do Sul); Escola de Ensino Fundamental Demétrio Bettiol (Cocal do Sul); Escola Dinâmica (Florianópolis); Escola In-

ternacional de Florianópolis (Florianópolis); **Escola Municipal de Ensino Fundamental Ministro Pedro Aleixo** (Massaranduba); **Escola Municipal Erwin Prade** (Timbó); **Escola Municipal Padre Martinho Stein** (Timbó); **Escola Sarapiquá** (Florianópolis); **Escola Técnica de Comércio de Tubarão** (Tubarão); **Escola Técnica do Vale do Itajaí** (Blumenau); **Escola da Universidade do Alto Vale do Itajaí** (Rio do Sul); **Escolas Municipais de Educação Infantil e Ensino Fundamental Padre Ludovico Coccolo** (Criciúma); **Fundação Bradesco** (Laguna); **Instituto Federal de Santa Catarina - Campus Florianópolis** (Florianópolis); **Instituto Federal de Santa Catarina - Campus Joinville** (Joinville); **Sistema de Ensino Energia** (Balneário Camboriú); **Sistema de Ensino Energia** (Florianópolis); **Sistema de Ensino Energia** (Itajaí); **Sistema de Ensino Energia** (Rio do Sul).

Provas

Nível 1

Problema 1. Na figura, a área do triângulo sombreado é igual a 1 unidade de área. Determine a área do quadrado $ABCD$.



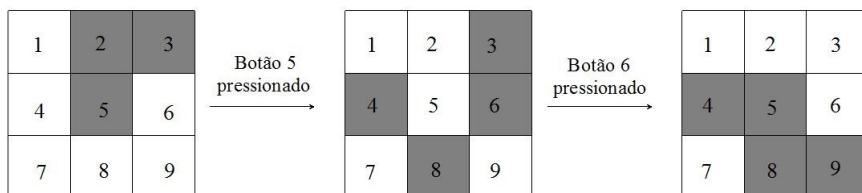
Problema 2. No planeta Gatox existem gatos de cada uma das três cores: verde, azul e vermelho. Os gatos verdes possuem 3 patas, os azuis possuem 4 patas e os vermelhos possuem 5 patas.

Jucavo mora em Gatox e cuida de gatos das três cores. Dos gatos que Jucavo cuida, o número de gatos verdes dividido por 3 é igual ao número de gatos azuis dividido por 4, que também é igual ao número de gatos vermelhos dividido por 5. Um certo dia, Jucavo contou as patas dos seus gatos e obteve um total de 300 patas.

Quantos gatos de cada cor são cuidados por Jucavo?

Problema 3. Dizemos que um número é *curioso* se é formado por três algarismos diferentes e a soma destes algarismos é 15. Por exemplo, 582 é curioso, mas 744 e 813 não são curiosos. Quantos números curiosos existem?

Problema 4. O jogo das luzes é composto por um tabuleiro 3×3 com nove botões numerados de 1 a 9 que podem estar acesos ou apagados. O único movimento permitido no jogo é apertar um botão aceso. Toda vez que um movimento é realizado, o botão que foi apertado apaga e os botões que possuem algum lado comum com o botão apertado se invertem, isto é, os acesos se apagam e os apagados se acendem. Por exemplo, na figura abaixo (em que os botões acesos são os que estão sombreados) foram efetuados dois movimentos:



O jogo termina quando todos os botões são apagados.

- Partindo de um tabuleiro em que apenas os botões 1, 3, 4, 6, 7 e 9 estão acesos, encontre uma sequência de movimentos para terminar o jogo.
- Descreva como terminar o jogo partindo-se de um tabuleiro em que apenas o botão 5 está aceso.

Problema 5. Luísa criou uma maneira de construir sequências de números naturais. A regra é a seguinte:

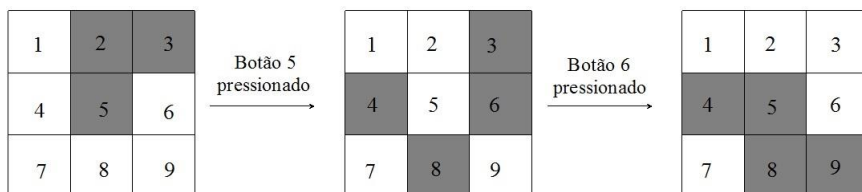
- o primeiro termo é um número natural maior do que 1;
- o segundo termo é igual ao primeiro termo somado ao quociente da divisão dele por 2;
- o terceiro termo é igual ao segundo termo somado ao quociente da divisão dele por 2, e assim por diante.

Por exemplo, uma sequência construída desta forma é 2, 3, 4, 6, 9,

- Qual o oitavo termo da sequência do exemplo acima?
- Se Luísa escrever uma sequência de números seguindo estas regras, de modo que 49 é um termo, então qual é o termo anterior ao 49?

Nível 2

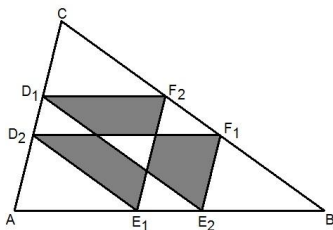
Problema 1. O jogo das luzes é composto por um tabuleiro 3×3 com nove botões numerados de 1 a 9 que podem estar acesos ou apagados. O único movimento permitido no jogo é apertar um botão aceso. Toda vez que um movimento é realizado, o botão que foi apertado apaga e os botões que possuem algum lado comum com o botão apertado se invertem, isto é, os acesos se apagam e os apagados se acendem. Por exemplo, na figura abaixo (em que os botões acesos são os que estão sombreados) foram efetuados dois movimentos:



O jogo termina quando todos os botões são apagados.

- Partindo de um tabuleiro em que apenas o botão 5 está aceso, encontre uma sequência de movimentos para terminar o jogo.
- Mostre que é possível terminar o jogo partindo de qualquer tabuleiro em que apenas um botão está aceso.

Problema 2. Na figura abaixo, ABC é um triângulo de área 25 cm^2 . Sabe-se que os segmentos AD_2 e CD_1 possuem o dobro do comprimento do segmento D_1D_2 . Da mesma forma, $CF_2 = BF_1 = 2 \cdot F_1F_2$ e $AE_1 = BE_2 = 2 \cdot E_1E_2$. Com isso, cada segmento desenhado na figura que está no interior do triângulo ABC é paralelo a algum dos lados do triângulo ABC (por exemplo, D_1E_2 é paralelo a BC). Calcule a área sombreada.



Problema 3. Considere os números de três algarismos não nulos xyz , yzx e zxy . Mostre que a soma

$$S = xyz + yzx + zxy$$

é sempre um múltiplo de 37.

Observação: Note que, no número abc , a é o algarismo das centenas, b é o algarismo das dezenas e c é o algarismo das unidades.

Problema 4. A pedido de sua mãe, Ayrton deve ir ao mercado para comprar apenas produtos de limpeza, cujos preços são descritos na tabela abaixo:

Produto A	Produto B	Produto C	Produto D	Produto E	Produto F
R\$ 1,30	R\$ 3,80	R\$ 5,90	R\$ 7,10	R\$ 8,90	R\$ 12,90

A mãe lhe deu R\$ 20,00 e pediu para ele comprar pelo menos três produtos, com nenhum repetido. Como recompensa, ela dará ao Ayrton o menor valor entre o troco e 10% do valor gasto nos produtos de limpeza.

Por exemplo, se ele comprar R\$ 15,00 em produtos, ele ganhará R\$ 1,50 de recompensa. Se comprar R\$ 19,00 em produtos, ganhará R\$ 1,00.

Que produtos da tabela acima Ayrton deve comprar para ganhar a maior recompensa possível?

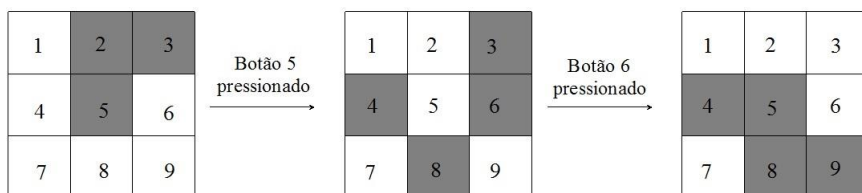
Problema 5.

- (a) Mostre que, para qualquer número natural n , os números n e n^5 têm o mesmo algarismo das unidades.
- (b) Determine o algarismo das unidades do número

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 2013^5 + 2014^5 + 2015^5.$$

Nível 3

Problema 1. O jogo das luzes é composto por um tabuleiro 3×3 com nove botões numerados de 1 a 9 que podem estar acesos ou apagados. O único movimento permitido no jogo é apertar um botão aceso. Toda vez que um movimento é realizado, o botão que foi apertado apaga e os botões que possuem algum lado comum com o botão apertado se invertem, isto é, os acesos se apagam e os apagados se acendem. Por exemplo, na figura abaixo (em que os botões acesos são os que estão sombreados) foram efetuados dois movimentos:



O jogo termina quando todos os botões são apagados. Mostre que é possível terminar o jogo partindo de qualquer configuração do tabuleiro em que apenas um botão está aceso.

Problema 2. Determine o algoritmo das unidades do número

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 2013^5 + 2014^5 + 2015^5.$$

Problema 3. Se x é um número real, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x . Por exemplo, $\lfloor 4, 12 \rfloor = 4$, $\lfloor -3, 5 \rfloor = -4$ e $\lfloor 10 \rfloor = 10$. Considere a função f , definida para todo número inteiro $n \geq 1$, dada por

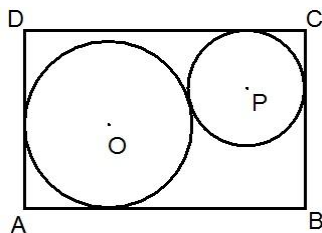
$$f(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

- Mostre que, para todo inteiro $k \geq 0$, o número $3k + 2$ não pertence ao conjunto imagem de f .
- Mostre que, se m e n são números inteiros maiores que 0 tais que $f(m) = f(n)$, então $m = n$.

Problema 4. Um retângulo $ABCD$ é denominado *bicircular* se existem duas circunferências de centro O e P , contidas nesse retângulo, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) A circunferência de centro O é tangente aos lados AB e AD do retângulo.
- (ii) A circunferência de centro P é tangente aos lados BC e CD do retângulo.
- (iii) As duas circunferências são tangentes entre si.

Um exemplo de retângulo bicircular é mostrado na figura abaixo.



- (a) Mostre que, para um retângulo bicircular dado, a soma dos raios de duas circunferências satisfazendo as condições acima é constante, independente da escolha das circunferências.
- (b) Nas condições do enunciado, mostre que se os pontos A , O , P e C forem colineares, então $ABCD$ é um quadrado.

Problema 5. Sejam n e k números naturais, com $k \leq n$, e seja X um conjunto com n elementos. Escolhendo aleatoriamente dois subconjuntos A e B de X , calcule a probabilidade de a intersecção entre A e B possuir k elementos.

Resoluções

Nível 1

Problema 1. Quatro triângulos sombreados formam um pequeno quadrado com 4 *u.a.* No quadrado $ABCD$ há 16 destes quadrados pequenos; logo a área do quadrado $ABCD$ é $16 \times 4 = 64 \text{ u.a.}$

Solução Alternativa:

Há 64 triângulos sombreados no quadrado $ABCD$, o que resulta em uma área de 64 *u.a.*

Problema 2. O número de gatos verdes é múltiplo de 3; o número de gatos azuis é múltiplo de 4, e o número de gatos vermelhos é múltiplo de 5. Também observe que os quocientes da divisão destes números por 3, 4 e 5, respectivamente, são iguais, o que significa que devem ser “produzidos” pelo mesmo fator, que será divisor de 300; além disso, a soma destes números é 300.

Vamos montar um quadro para descobrir o quociente e com isso resolver o problema.

Fator ou quociente comum (q)	Número de gatos verdes (A)	Número de gatos azuis (B)	Número de gatos vermelhos (C)	Soma das patas $3A + 4B + 5C = 300$
1	3	4	5	$3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5 = 50$
2	6	8	10	$3 \times 6 + 4 \times 8 + 5 \times 10 = 100$
3	9	12	15	$3 \times 9 + 4 \times 12 + 5 \times 15 = 150$
4	12	16	20	$3 \times 12 + 4 \times 16 + 5 \times 20 = 200$
5	15	20	25	$3 \times 15 + 4 \times 20 + 5 \times 25 = 250$
6	18	24	30	$3 \times 18 + 4 \times 24 + 5 \times 30 = 300$

Portanto, há 18 gatos verdes, 24 gatos azuis e 30 gatos vermelhos.

Solução Alternativa:

A busca pelos números pode ser feita via número de patas: o número de gatos verdes é múltiplo de 3, e como cada gato verde tem 3 patas, o número de patas verdes é múltiplo de $3 \times 3 = 9$. Também pelo mesmo argumento, o número de patas azuis é múltiplo de $4 \times 4 = 16$ e o número de patas vermelhas é múltiplo de $5 \times 5 = 25$. Como a soma destes “primeiros múltiplos” é $9 + 16 + 25 = 50$ e $300 = 6 \times 50$, devemos ter $6 \times (9 + 16 + 25) = 6 \times 50$ e $54 + 96 + 150 = 300$. Assim, $54 \div 3 = 18$

gatos verdes, $96 \div 4 = 24$ gatos azuis e $150 \div 5 = 30$ gatos vermelhos.

Problema 3. Vamos fazer uma análise por casos.

- Quando no número aparece o algarismo 9: aqui precisamos lembrar que, por exemplo, 096 e 078 não são números de três algarismos, ou seja, não podemos ter o zero na “casa” das centenas.

$9 + 0 + 6$, resultando nos números 906, 960, 609 e 690 (4 números);

$9 + 1 + 5$, resultando nos números 915, 951, 519, 591, 159 e 195 (6 números);

$9 + 2 + 4$, resultando nos números 924, 942, 429, 492, 249 e 294 (6 números).

Total: 16 números.

Observe que, se temos os algarismos 9 e 3 no número, então $9 + 3 = 12$ e como o número deve ser curioso temos que a soma de seus algarismos é 15. Logo o outro algarismo deve ser 3. Mas neste caso teríamos dois algarismos repetidos, o que não é permitido. Assim, em um número curioso não podemos ter os algarismos 9 e 3.

- Quando no número aparece o algarismo 8:

$8 + 0 + 7$, resultando nos números: 807, 870, 708 e 780 (4 números);

$8 + 1 + 6$, resultando nos números 816, 861, 618, 681, 168 e 186 (6 números);

$8 + 2 + 5$, resultando nos números 825, 852, 528, 582, 258 e 285 (6 números);

$8 + 3 + 4$, resultando nos números 834, 843, 438, 483, 348 e 384 (6 números).

Total: 22 números.

- Quando no número aparece o algarismo 7:

$7 + 2 + 6$, resultando nos números 726, 762, 627, 672, 267 e 276 (6 números);

$7 + 3 + 5$, resultando nos números 735, 753, 537, 573, 357 e 375 (6 números).

Total: 12 números.

Observe que a soma $7 + 0 + 8$ já foi contada anteriormente. Além disso, se temos os algarismos 7 e 1 no número, então $7 + 1 = 8$ e como o número deve

ser curioso temos que a soma de seus algarismos é 15. Logo o outro algarismo deve ser 7. Mas neste caso teríamos dois algarismos repetidos, o que não é permitido. Assim, em um número curioso não podemos ter os algarismos 7 e 1. Por um raciocínio análogo, mostra-se que em um número curioso não podemos ter os algarismos 7 e 4.

- Quando no número aparece o algarismo 6:

$6 + 5 + 4$, resultando nos números 654, 645, 546, 564, 456 e 465 (6 números).

Total: 6 números.

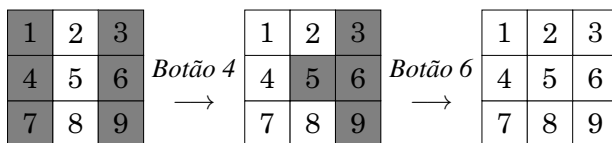
Observe que as soma $6 + 0 + 9$, $6 + 1 + 8$, $6 + 2 + 7$ já foram contadas anteriormente. Além disso, se temos os algarismos 6 e 3 no número, então $6 + 3 = 9$ e como o número deve ser curioso temos que a soma de seus algarismos é 15. Logo o outro algarismo deve ser 6. Mas neste caso teríamos dois algarismos repetidos, o que não é permitido. Assim, em um número curioso não podemos ter os algarismos 6 e 3.

Por fim, observe que os números em que aparecem os algarismos 5, 4, 3, 2, 1 e 0 já foram contados.

Portanto, existem $16 + 22 + 12 + 6 = 56$ números curiosos.

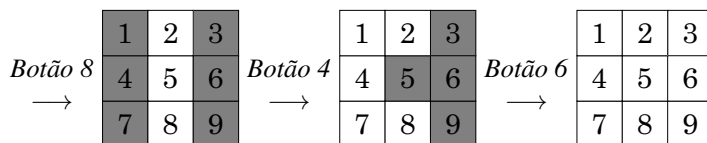
Problema 4.

- (a) Aperte os seguintes botões em sequência: 4 e 6.



- (b) Aperte os seguintes botões em sequência: 5, 2, 8, 4 e 6.





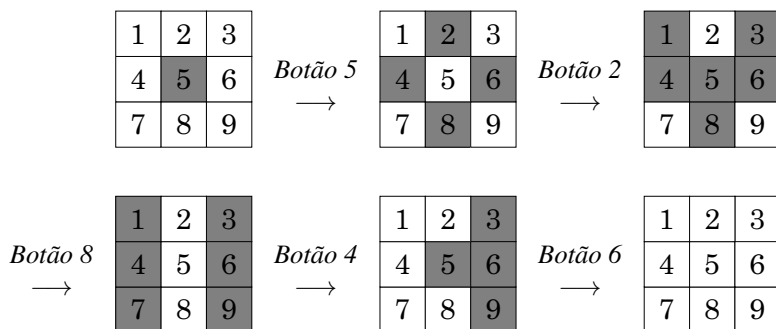
Problema 5.

- (a) Sabemos que a sequência até o quinto termo é 2, 3, 4, 6 e 9. Para calcular o oitavo termo precisamos antes calcular o sexto e o sétimo termos:
- 6º termo: como $9 = 2 \times 4 + 1$ e $9 + 4 = 13$, então o sexto termo é 13;
 - 7º termo: $13 = 2 \times 6 + 1$ e $13 + 6 = 19$, então o sétimo termo é 19;
 - 8º termo: $19 = 2 \times 9 + 1$ e $19 + 9 = 28$, então o oitavo termo é 28.
- (b) Se 49 é um termo, ele é a soma do termo anterior mais o quociente deste termo anterior por 2; isto significa que 49 está “próximo” de três metades do termo anterior. Como $49 = 3 \times 16 + 1$, tomamos o 16 como o quociente do termo anterior por 2, ou seja, o termo anterior é 32 ou 33; mas como 49 é ímpar ele não pode ser a soma de dois pares. Assim, o termo anterior será 33 ($33 + 16 = 49$).

Nível 2

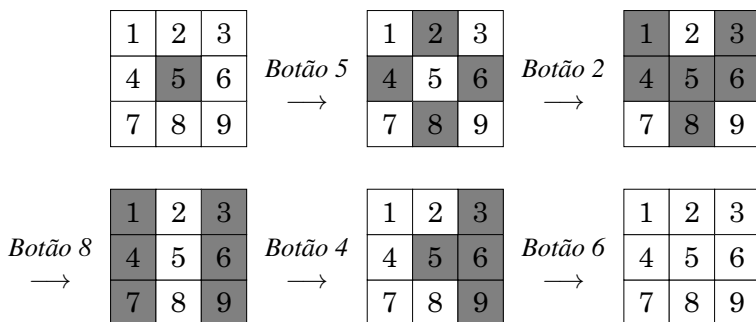
Problema 1.

- a) Uma forma de terminar o jogo é apertar os seguintes botões, nesta mesma sequência: 5, 2, 8, 4 e 6.

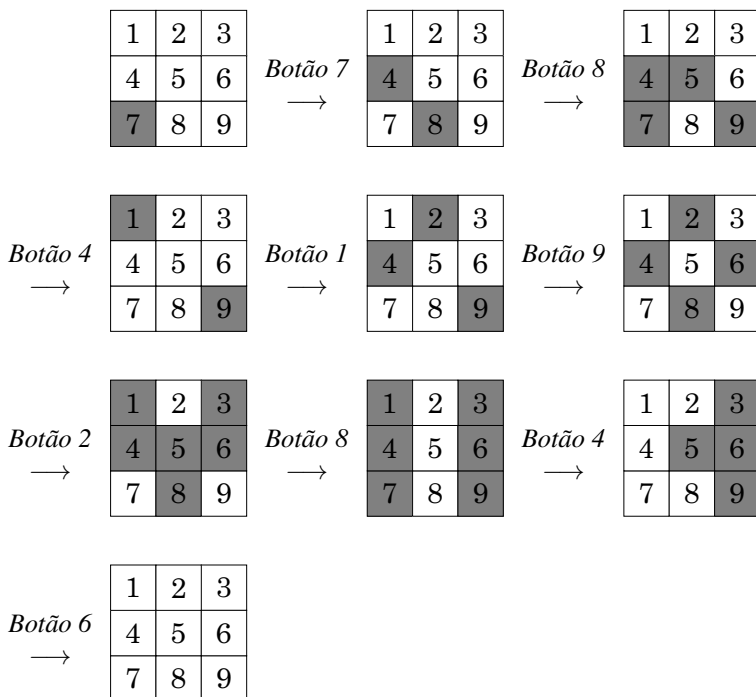


- b) Observe que pela simetria do tabuleiro precisamos analisar somente 3 casos:

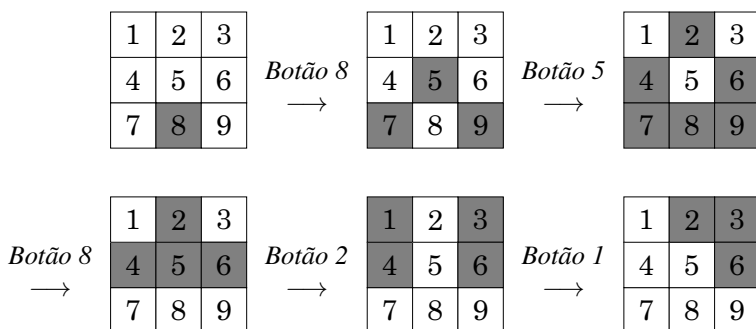
- **Caso 1:** Botão 5 aceso. Neste caso podemos apertar a sequência de botões do item anterior.



- **Caso 2:** Botão 7 aceso (que é a mesma análise de quando os botões acesos são o 1, 3 ou 9). Neste caso, apertamos nesta ordem, os botões 7, 8, 4, 1, 9, 2, 8, 4 e 6.

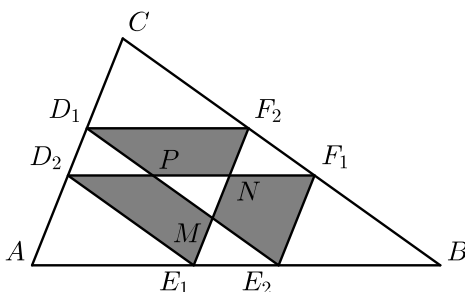


- **Caso 3:** Botão 8 aceso (que é a mesma análise de quando os botões acesos são o 2, 4 ou 6). Neste caso, apertamos os botões 8, 5, 8, 2, 1 e 3.



Botão 3
→

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Problema 2.

Note que $AE_2F_1D_2$, $AE_1F_2D_1$ e $D_1E_2F_1C$ são paralelogramos. Assim, $AD_2 = E_2F_1 = D_1C$. Além disso, $AE_1 = D_1F_2$ e os ângulos $\angle D_2AE_1$, $\angle F_1E_2B$ e $\angle CD_1F_2$ são congruentes.

Portanto, os três triângulos “médios” $\triangle AE_1D_2$, $\triangle E_2BF_1$ e $\triangle D_1F_2C$ são congruentes entre si. Como suas dimensões (lados) são iguais a $\frac{2}{5}$ dos respectivos lados do $\triangle ABC$, cada uma de suas áreas é igual a $(\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$ da área do $\triangle ABC$.

Agora, do fato de $D_2E_1MD_1$, $E_1E_2PD_2$, $D_2NF_2D_1$ e $E_1E_2F_1N$ serem paralelogramos, concluímos que os triângulos $\triangle E_1E_2M$, $\triangle NF_1F_2$ e $\triangle D_2PD_1$ (triângulos menores) são congruentes entre si e, como seus lados são iguais a $\frac{1}{5}$ dos respectivos lados do $\triangle ABC$, cada uma de suas áreas é igual a $(\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25}$ da área do $\triangle ABC$.

Finalmente, como D_2D_1 é igual a $\frac{1}{3}$ de D_2C , então $D_2P = \frac{1}{3}D_2F_1 = NF_1 = PN$. Analogamente vê-se que $MN = \frac{1}{3}E_1F_2 = E_1M = NF_2$. Portanto, o triângulo $\triangle MNP$ é congruente aos triângulos “menores” citados anteriormente.

Então, sendo AH a área hachurada, temos que

$$\begin{aligned} AH &= A_{\triangle ABC} - (3A_{\triangle AE_1D_2} + 4A_{\triangle E_1E_2M}) = 25 - (3 \cdot \frac{4}{25} \cdot 25 + 4 \cdot \frac{1}{25} \cdot 25) = \\ &= 25 - (12 + 4) = 9 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Problema 3. Dado um número de 3 algarismos, da forma abc , note que $abc = 100a + 10b + c$. Usando este fato para os números xyz , yzx e zxy obtemos que

$$\begin{aligned}
 S &= xyz + yzx + zxy \\
 &= 100x + 10y + z + 100y + 10z + x + 100z + 10x + y \\
 &= 111x + 111y + 111z \\
 &= 111 \cdot (x + y + z) \\
 &= 37 \cdot 3 \cdot (x + y + z).
 \end{aligned}$$

Logo, S é múltiplo de 37.

Problema 4. Vamos chamar de g o valor gasto. Então, a recompensa de Ayrton será o menor valor entre $\frac{g}{10}$ e $20 - g$. Note que a recompensa seria a maior possível caso $\frac{g}{10} = 20 - g$, isto é,

$$\frac{g}{10} = 20 - g \Leftrightarrow \frac{g}{10} + g = 20 \Leftrightarrow \frac{11g}{10} = 20 \Leftrightarrow g = \frac{200}{11} = 18, \overline{18}.$$

Ou seja, para que a recompensa de Ayrton seja a maior possível é necessário que o valor total gasto seja o mais próximo possível de R\$ 18,18, para mais ou para menos. Porém, os produtos da tabela todos têm preços que são múltiplos de 10 centavos. Então pensemos em dois casos:

- Caso o valor gasto seja R\$ 18,20, ele ficaria com o troco de R\$ 1,80, pois

$$20,00 - 18,20 = 1,80 < 1,82 = \frac{18,20}{10}.$$

- Caso o valor gasto seja R\$ 18,10, ele ficaria R\$ 1,81 pois

$$\frac{18,10}{10} = 1,81 < 1,90 = 20,00 - 18,10.$$

Portanto, Ayrton deve fazer uma compra no valor de R\$ 18,10, a qual é obtida comprando uma unidade dos produtos A, B, C e D , a fim de obter o máximo valor de recompensa.

Problema 5.

- a) Primeiramente vamos mostrar que, se n é um número natural qualquer, então n e n^5 possuem o mesmo algarismo das unidades. Para isto, vamos mostrar que $10 \mid (n^5 - n)$ (lê-se: 10 divide $n^5 - n$). Para tal vamos mostrar que $2 \mid (n^5 - n)$ e $5 \mid (n^5 - n)$. Observe que

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1).$$

Logo $n^5 - n$ é um número par (pois n ou $n + 1$ é par) e, portanto, $2 \mid (n^5 - n)$. Assim, resta-nos mostrar que $5 \mid (n^5 - n)$. Pelo algoritmo da divisão euclidiana sabemos que existem únicos números naturais q e r de modo que

$$n = 5q + r, \text{ com } 0 \leq r \leq 4.$$

Assim, precisamos analisar 5 casos:

- **Caso 1:** Se $r = 0$, então $n = 5q$, do qual segue que $n^5 - n$ é um múltiplo de 5.
- **Caso 2:** Se $r = 1$, então $n = 5q + 1$, do qual segue que $n^5 - n$ é um múltiplo de 5, já que $n - 1 = 5q$.
- **Caso 3:** Se $r = 2$, então $n = 5q + 2$, do qual segue que $n^5 - n$ é um múltiplo de 5, já que

$$n^2 + 1 = (5q + 2)^2 + 1 = 25q^2 + 20q + 5 = 5 \cdot (5q^2 + 4q + 1).$$

- **Caso 4:** Se $r = 3$, então $n = 5q + 3$, do qual segue que $n^5 - n$ é um múltiplo de 5, já que

$$n^2 + 1 = (5q + 3)^2 + 1 = 25q^2 + 30q + 10 = 5 \cdot (5q^2 + 6q + 2).$$

- **Caso 5:** Se $r = 4$, então $n = 5q + 4$, do qual segue que $n^5 - n$ é um múltiplo de 5, já que

$$n + 1 = 5q + 5 = 5 \cdot (q + 1).$$

Portanto, concluímos que $5 \mid (n^5 - n)$.

- b) Agora, já que todo número natural n possui o mesmo algarismo das unidades de n^5 , temos que o algarismo das unidades de $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 2013^5 + 2014^5 + 2015^5$ é o mesmo que o algarismo das unidades de $1 + 2 + 3 + \cdots + 2013 + 2014 + 2015$. Agora veja que

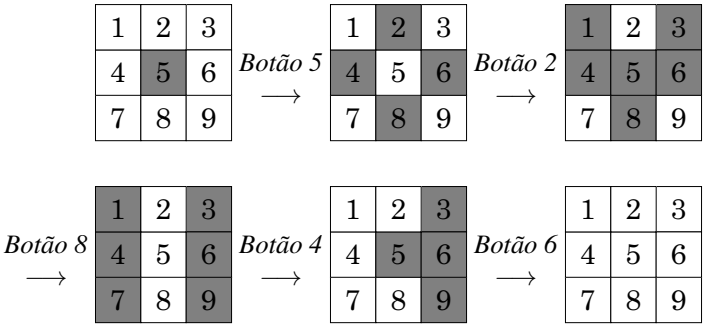
$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2013 + 2014 + 2015 = \frac{(1 + 2015) \cdot 2015}{2} = 1008 \cdot 2015,$$

e $8 \cdot 5 = 40$. Portanto, o algarismo das unidades será zero.

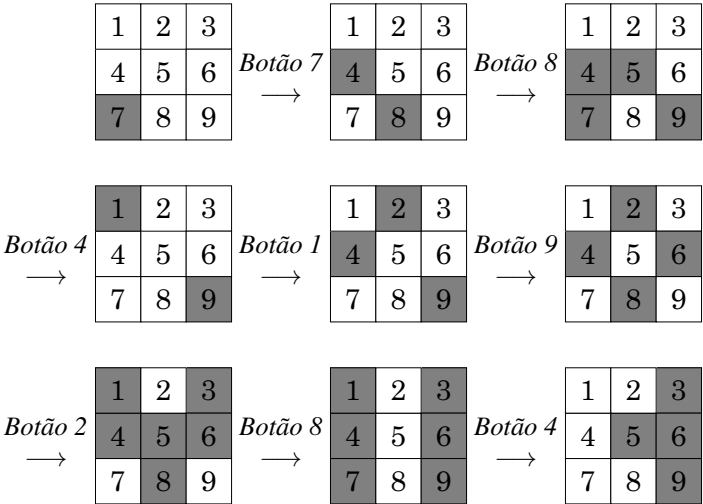
Nível 3

Problema 1. Observe que pela simetria do tabuleiro precisamos analisar somente 3 casos:

- **Caso 1:** Botão 5 aceso. Neste caso podemos apertar os seguintes botões nesta mesma sequência: 5, 2, 8, 4 e 6.



- **Caso 2:** Botão 7 aceso (que é a mesma análise de quando os botões acesos são o 1, 3 ou 9). Neste caso, apertamos nesta ordem os botões 7, 8, 4, 1, 9, 2, 8, 4 e 6.



Botão 6
→

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- **Caso 3:** Botão 8 aceso (que é a mesma análise de quando os botões acesos são o 2, 4 ou 6). Neste caso, apertamos os botões 8, 5, 8, 2, 1 e 3.

1	2	3	<i>Botão 8</i> →	1	2	3	<i>Botão 5</i> →	1	2	3
4	5	6		4	5	6		4	5	6
7	8	9		7	8	9		7	8	9

<i>Botão 8</i> →	1	2	3	<i>Botão 2</i> →	1	2	3	<i>Botão 1</i> →	1	2	3
	4	5	6		4	5	6		4	5	6
	7	8	9		7	8	9		7	8	9

<i>Botão 3</i> →	1	2	3						
	4	5	6						
	7	8	9						

Problema 2. Note que para quaisquer números naturais n e m temos que

$$n^5 + m^5 = (n + m)(n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4). \quad (1)$$

Agora considere as somas $(1^5 + 2014^5), (2^5 + 2013^5), \dots, (1007^5 + 1008^5)$ e observe que, de (1), todas elas são múltiplas de 2015, já que $1 + 2014 = 2015, 2 + 2013 = 2015, \dots, 1007 + 1008 = 2015$ e, portanto, todas são múltiplas de 5.

Agora, se $n + m = 2015$, então um dos números n e m deve ser par e o outro deve ser ímpar. Vamos analisar cada um dos possíveis casos.

- **Caso 1:** n é par e m é ímpar.

Se n é par, então $n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3$ também será par e, como m é ímpar, m^4 será ímpar. Logo, $n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4$ é ímpar, do qual segue que o produto $(n + m)(n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4)$ é ímpar e, portanto, o algarismo das unidades de $n^5 + m^5$ é 5.

• **Caso 2:** n é ímpar e m é par.

Se m é par, então $-n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4$ também será par e, como n é ímpar, n^4 será ímpar. Logo, $n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4$ é ímpar, do qual segue que o produto $(n + m)(n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4)$ é ímpar e, portanto, o algarismo das unidades de $n^5 + m^5$ é 5.

Por fim, observe que temos $\frac{2014}{2} = 1007$ pares de somas do tipo $n^5 + m^5$ em $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 2013^5 + 2014^5$. Então $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 2013^5 + 2014^5$ tem o algarismo das unidades igual a 5 e, portanto,

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 2013^5 + 2014^5 + 2015^5$$

tem o algarismo das unidades igual a 0.

Problema 3.

(a) Seja n um número inteiro maior ou igual a 1. Então pelo algoritmo da divisão euclidiana sabemos que existe um único número inteiro k de modo que $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$. Observe que o fato de n ser um número inteiro maior ou igual a 1 implica em k ser um número inteiro maior ou igual a zero. Agora vamos analisar as duas possibilidades:

• **Caso 1:** Se $n = 2k$, então

$$f(n) = f(2k) = 2k + \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = 2k + k = 3k.$$

• **Caso 2:** Se $n = 2k + 1$, então

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2k + 1) = 2k + 1 + \left\lfloor \frac{2k + 1}{2} \right\rfloor = 2k + 1 + \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= 2k + 1 + k = 3k + 1. \end{aligned}$$

Logo, para todo inteiro $k \geq 0$, o número $3k + 2$ não pertence ao conjunto imagem de f .

- (b) Sejam m e n números inteiros maiores que 0 tais que $f(m) = f(n)$. Precisamos mostrar que $m = n$.

Sabemos do algoritmo da divisão euclidiana que existem únicos números inteiros q e r de modo que:

(a) $m = 2q$ ou $m = 2q + 1$ e

(b) $n = 2r$ ou $n = 2r + 1$.

Agora vamos analisar cada uma destas possibilidades:

- **Caso 1:** Se $m = 2q$ e $n = 2r$, então temos que

$$\begin{aligned} f(n) = f(m) &\Rightarrow 2q + \left\lfloor \frac{2q}{2} \right\rfloor = 2r + \left\lfloor \frac{2r}{2} \right\rfloor \Rightarrow 2q + q = 2r + r \\ &\Rightarrow 3q = 3r \Rightarrow q = r \Rightarrow m = n. \end{aligned}$$

- **Caso 2:** Se $m = 2q$ e $n = 2r + 1$, então temos que

$$\begin{aligned} f(n) = f(m) &\Rightarrow 2q + \left\lfloor \frac{2q}{2} \right\rfloor = 2r + 1 + \left\lfloor \frac{2r + 1}{2} \right\rfloor \\ &\Rightarrow 2q + q = 2r + 1 + r \Rightarrow 3q = 3r + 1 \Rightarrow 3(q - r) = 1, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois 3 não divide 1.

Portanto, se $m = 2q$ e $n = 2r + 1$, então não é possível que $f(m)$ seja igual a $f(n)$.

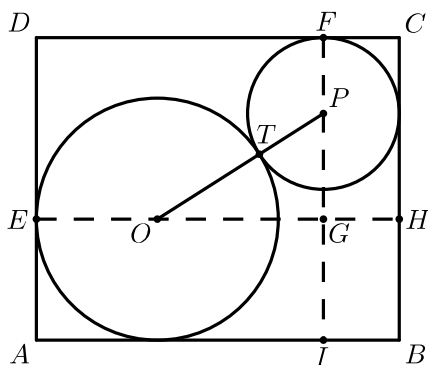
- **Caso 3:** Se $m = 2q + 1$ e $n = 2r$, note que a conclusão será a mesma que no caso 2.
- **Caso 4:** Se $m = 2q + 1$ e $n = 2r + 1$, então temos que

$$\begin{aligned} f(n) = f(m) &\Rightarrow 2q + 1 + \left\lfloor \frac{2q + 1}{2} \right\rfloor = 2r + 1 + \left\lfloor \frac{2r + 1}{2} \right\rfloor \\ &\Rightarrow 2q + 1 + q = 2r + 1 + r \Rightarrow 3q + 1 = 3r + 1 \\ &\Rightarrow q = r \Rightarrow m = n. \end{aligned}$$

Portanto, se m e n são números inteiros maiores que 0 tais que $f(m) = f(n)$, então $m = n$.

Problema 4.

- (a) Sejam $AB = a$, $BC = b$, R o raio da circunferência de centro O e r o raio da circunferência de centro P . Observe que os pontos O , P e T (ponto de tangência das duas circunferências) são colineares. Além disso, $OT = R$ e $PT = r$.



Se E é o ponto de tangência da circunferência de centro O com o lado AD , e se F é o ponto de tangência da circunferência de centro P com o lado CD , então a reta OE é perpendicular ao lado AD e a reta FP é perpendicular ao lado CD . Assim, essas duas retas são perpendiculares entre si cruzando-se no ponto G .

Agora note que

$$OG = EH - OE - GH = a - R - r = a - (R + r),$$

e

$$PG = FI - FP - GI = b - r - R = b - (R + r).$$

Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo $\triangle OGP$, temos:

$$OP^2 = OG^2 + PG^2 \Rightarrow (R + r)^2 = [a - (R + r)]^2 + [b - (R + r)]^2.$$

Resolvendo esta equação em $R + r$ obtemos:

$$R + r = (a + b) \pm \sqrt{2ab},$$

que depende somente de a e b e, portanto, é constante.

Observação: $R + r = (a + b) + \sqrt{2ab}$ não é uma solução possível, já que este valor é maior que o tamanho da diagonal do retângulo.

(b) Se A, O, P e C são colineares, então temos que $P\hat{O}G = C\hat{A}B$. Assim,

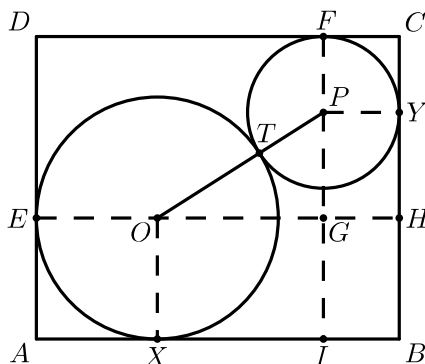
$$\frac{PG}{OG} = \frac{BC}{AB} = \frac{b}{a},$$

ou seja, $\frac{b - S}{a - S} = \frac{b}{a}$, em que $S = R + r$. Isso nos dá

$$ab - aS = ab - bS,$$

ou seja, $a = b$. Logo, $ABCD$ é um quadrado.

Solução alternativa para o item (b):



Note que $AEOX$ e $PFCY$ são quadrados. Logo os ângulos $O\hat{A}X$ e $C\hat{P}Y$ medem 45° . Como A, O, P e C são colineares, segue que $P\hat{O}G$ também mede 45° . Assim, AC é a diagonal de um retângulo que forma com a base um ângulo de 45° . Portanto $1 = \operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{BC}{AB}$, do qual segue que $AB = BC$ e, portanto, $ABCD$ é um quadrado.

Problema 5. Observe que há 2^n possibilidades de escolha para o conjunto A , assim como para a escolha do conjunto B . Logo, há $2^n \cdot 2^n = 4^n$ possibilidades de escolha para o par (A, B) .

Contemos, agora, quantas destas escolhas satisfazem a condição que o número de elementos de A intersecção B é k .

Há $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher k elementos de X . Fixe uma dessas escolhas. O número de formas de escolher (A, B) de modo que a intersecção entre eles seja exatamente essa escolha fixada é 3^{n-k} . De fato, para os k elementos fixados, obrigatoriamente todos devem pertencer a A e B . Para os outros $n - k$ elementos de X , para que tais elementos não estejam na intersecção de A e B , devemos ter que cada um desses elementos satisfaça o seguinte:

- i) pertence a A e não pertence a B , ou
- ii) não pertence a A e pertence a B , ou
- iii) não pertence a A e não pertence a B .

Portanto, para cada um dos $n - k$ elementos de X que não pertencem a intersecção de A e B temos três possibilidades, resultando num total de 3^{n-k} possibilidades.

Por fim, concluímos que o número de escolhas tais que o número de elementos da intersecção de A e B é k é $\binom{n}{k} \cdot 3^{n-k}$. Lembrando que a probabilidade de um evento A ocorrer é dada pela razão entre o números de casos favoráveis a A e o número total de casos, temos que a probabilidade pedida é

$$\frac{\binom{n}{k} \cdot 3^{n-k}}{4^n}.$$



V ORMM (2015)

V ORMM em Números

Na V Olimpíada Regional Mirim de Matemática participaram 502 alunos do quinto ano do ensino fundamental, oriundos de três escolas particulares (Educandário Imaculada Conceição, Escola Dinâmica e Colégio Catarinense) e cinco escolas públicas (Colégio de Aplicação UFSC, Escola de Educação Básica Padre Anchieta, Escola de Ensino Fundamental Demétrio Betiol, Escola de Ensino Fundamental Cristo Rei e Escola de Ensino Fundamental José Perucchi) de Florianópolis e Cocal do Sul. Foi a primeira vez que a ORMM contou com a participação de escolas fora de Florianópolis.

Na cerimônia, foram premiados 55 estudantes: 5 medalhas de ouro, 8 com medalhas de prata, 33 com medalhas de bronze, 6 com menções honrosas e 3 como alunos destaques de sala.

Ouro

- Anita Bertollo Vandrezem (Florianópolis)
- Bruno Napoleão Gama Salles (Florianópolis)
- Pedro Jahnel (Florianópolis)
- Roberto Cintra de Vicenzi (Florianópolis)
- Vinicius de Faria Goulart (Florianópolis)

Prata

- Daniel Machado Barbosa (Florianópolis)
- Isabela Camargo Roumeliotis (Florianópolis)
- Júlia Rosseto Teixeira (Florianópolis)
- Lara de Mello Schneider Bier Hoechner (Florianópolis)
- Lara Steinwandter Porto (Florianópolis)
- Marcelle Milak dos Reis (Cocal do Sul)
- Maria Eduarda Souza dos Santos (Florianópolis)

- Mariahna Vieira Frassetto de Campos (Florianópolis)

Bronze

- Abdel Aziz Hani Hussein (Florianópolis)
- Arthur Ceccato do Amaral (Florianópolis)
- Bruna de Aguiar Soares (Florianópolis)
- Bruna Lucca Cabral (Florianópolis)
- Bruna Rosseto Teixeira (Florianópolis)
- Caetano Vasudeva Gamero Cordeiro (Florianópolis)
- Carlos Eduardo Ribeiro (Florianópolis)
- Dimitri Moros Scheibe (Florianópolis)
- Felipe Custódio Nunes (Cocal do Sul)
- Guilherme Ryuji Weber Nakamura (Florianópolis)
- Guilherme Valgas Schmidt (Florianópolis)
- Gustavo Luca de Oliveira Silva (Florianópolis)
- Gustavo Pessoli Buffon Leal (Florianópolis)
- Hamilton Salome Vieira (Florianópolis)
- Helena Beckhäuser Ubaldo (Florianópolis)
- Iago Vieira Nunes (Florianópolis)
- Isabelle Kanarec Nunes de Souza (Cocal do Sul)
- João Henrique Brognoli Raupp (Florianópolis)
- Júlia D'alascio Rangel de Moraes (Florianópolis)
- Leonardo Martins Cheper (Cocal do Sul)

- Lucas Cuellar Ramil (Florianópolis)
- Maria Antônia Gomes (Florianópolis)
- Marina Engelberg Wigg (Florianópolis)
- Natan de Oliveira Viana (Cocal do Sul)
- Nicole Iata (Florianópolis)
- Pedro Daniel Aguiar Paes da Silva (Florianópolis)
- Pedro El-Jaick Costa Vieira (Florianópolis)
- Pedro Rossi (Florianópolis)
- Pedro Victor de Figueiredo Ribeiro (Florianópolis)
- Tayna Da Silva da Rosa (Cocal do Sul)
- Thiago Mechelet Quintaes Credidio (Florianópolis)
- Tulio Prates (Florianópolis)
- Victoria da Cunha Martins (Florianópolis)

Menção Honrosa

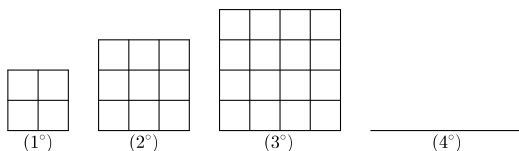
- Gustavo Naschenweng Damian (Florianópolis)
- Izadora Bernardes (Florianópolis)
- Luigi de Moraes Bonadio Grande (Florianópolis)
- Maria Eduarda Pires da Luz (Cocal do Sul)
- Olivia Frasson Souza (Cocal do Sul)
- Sofia Hermes Naschenweng (Florianópolis)

Alunos Destaques de Sala

- Arthur Moreira de Moraes (Cocal do Sul)
- Eduardo Campos (Florianópolis)
- Matheus Mafioletti (Cocal do Sul)

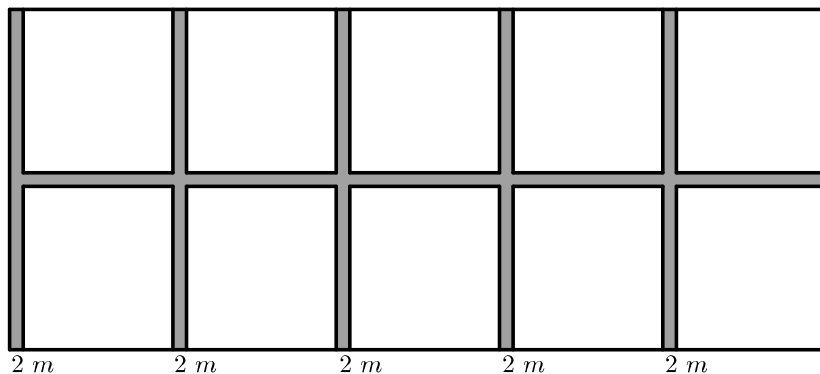
Prova

Problema 1. Com palitos de fósforo, Aline fez vários quadrados grandes em sequência, formados por quadradinhos pequenos. Ela usa um palito para fazer o lado do quadradinho pequeno. O primeiro quadrado grande tem 4 quadradinhos e usa 12 palitos. O segundo tem 9 quadradinhos e usa 24 palitos. O terceiro tem 16 quadradinhos e usa 40 palitos, e assim por diante. Os três primeiros quadrados grandes que Aline fez são mostrados na figura abaixo.



Desenhe o 4° quadrado que Aline fez. Quantos palitos de fósforo ela usou?

Problema 2. Seu Tide tem uma horta com 120 metros de comprimento por 50 metros de largura, organizada como na figura a seguir. A parte branca da figura são os canteiros de verduras e a parte sombreada são os corredores que ele usa para cuidar dos canteiros. Todos os canteiros têm o mesmo tamanho, e a largura de todos os corredores é 2 metros. Qual é o total da área ocupada pelos canteiros na horta de seu Tide?



Problema 3. Juca e Joca são irmãos. Juca disse para Joca:

– Se eu diminuir 2 da minha idade e multiplicar o resultado por 6, dá a idade do vovô!

Joca respondeu:

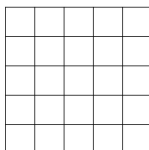
– É verdade! Estamos em 2015, o vovô nasceu em 1955 e ele já fez aniversário este ano!

Qual é a idade de Joca, se ele é três anos mais velho do que Juca?

Problema 4. Anita distribuiu todos os seus livros em três caixas. Na caixa maior, Anita colocou metade de seus livros. Na segunda caixa, Anita colocou a metade dos que sobraram. Na terceira caixa, Anita colocou os últimos 16 livros. Quantos livros tem Anita?

Resolução

Problema 1. O 4º quadrado grande que Aline fez é formado por 25 quadradinhos pequenos, como mostrado na figura abaixo:



Contando os palitos, temos:

- 5 palitos em cada fileira vertical, e como neste quadrado temos seis fileiras verticais, foram usados então $5 \times 6 = 30$ palitos.
- 5 palitos em cada fileira horizontal, e como neste quadrado temos seis fileiras horizontais, foram usados então $5 \times 6 = 30$ palitos.

Total de palitos utilizados: $30 + 30 = 60$ palitos.

Portanto, Aline usou 60 palitos.

Problema 2.

Resolução 1: Para encontrar as dimensões da área ocupada, subtraímos $5 \times 2 = 10$ m no comprimento e 2 m na largura; o comprimento é $120 - 10 = 110$ m e a largura é $50 - 2 = 48$ m. A área ocupada é $110 \times 48 = 5280$ m².

Resolução 2: Vamos encontrar as dimensões de cada canteiro. Cada corredor tem 2 m de largura; como são cinco corredores na vertical, devemos subtrair $5 \times 2 = 10$ m no comprimento, resultando $120 - 10 = 110$ m. Como são cinco canteiros (na horizontal), temos que uma das dimensões de um canteiro é $110 \div 5 = 22$ m (comprimento). Para calcular a outra dimensão (largura) subtraímos 2 metros na largura e resulta $50 - 2 = 48$; como são dois canteiros (na vertical), cada um deles ficará com a outra dimensão medindo $48 \div 2 = 24$ m. Assim, cada canteiro tem 22 m de comprimento por 24 m de largura; a área de cada canteiro é $22 \times 24 = 528$ m². Como são 10 canteiros, todos do mesmo tamanho, a área total ocupada pelos canteiros é $528 \times 10 = 5280$ m².

Resolução 3: A área total da horta é $120 \times 50 = 6000 \text{ m}^2$. Vamos calcular a área dos corredores; são cinco corredores verticais, cada um com área $2 \times 50 = 100 \text{ m}^2$, resultando $5 \times 100 = 500 \text{ m}^2$. O corredor horizontal tem dimensões de 2 m por 120 m , resultando em $2 \times 120 = 240 \text{ m}^2$. Mas há intersecção entre os corredores, que foram “contadas” duas vezes: devemos subtrair as cinco intersecções, cada uma com $2 \times 2 = 4 \text{ m}^2$ de área, resultando $5 \times 4 = 20 \text{ m}^2$. Assim, a área ocupada pelos corredores é $500 + 240 - 20 = 720 \text{ m}^2$. Então a área ocupada pelos canteiros é $6000 - 720 = 5280 \text{ m}^2$.

Problema 3. Primeiro vamos calcular a idade do vovô; como ele nasceu em 1955 e já fez aniversário em 2015, sua idade é $2015 - 1955 = 60$ anos. Então o resultado da idade de Juca depois de subtrair duas unidades é $60 \div 6 = 10$. Como foram subtraídas duas unidades, a idade de Juca é $10 + 2 = 12$ anos. E como Joca é três anos mais velho, sua idade é $12 + 3 = 15$ anos.

Problema 4.

Resolução 1: Na caixa maior está a metade dos livros; conseqüentemente, sobrou a outra metade para ser distribuída nas outras duas caixas. Desta sobra, a metade foi para a segunda caixa: a metade da metade é $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (cada “metade” tem dois pedaços de $\frac{1}{4}$). Então, da metade que sobrou, $\frac{1}{4}$ foi para a segunda caixa e sobrou $\frac{1}{4}$, que corresponde aos 16 livros da última caixa. Se 16 livros corresponde a $\frac{1}{4}$ dos livros distribuídos, então o total de livros é $16 \times 4 = 64$ livros.

Resolução 2: A quantidade de livros na terceira caixa é igual à quantidade de livros na segunda caixa: ambas contêm 16 livros. Esta quantidade é a metade dos livros que estão na primeira caixa. Logo, na primeira caixa há $16 \times 2 = 32$ livros. Somando com a quantidade da segunda e da terceira caixas, temos que a quantidade total de livros é $32 + 16 + 16 = 64$.



Artigos

Sequências periódicas e problemas de calendário

Leandro Batista Morgado¹

leandro.morgado@ufsc.br

Resumo: Neste artigo, abordamos as sequências periódicas, em que os termos se repetem a partir de certo ponto. Discutimos como o algoritmo da divisão euclidiana (divisão com resto) pode ser útil para identificar um termo específico dessas sequências. Em seguida, apresentamos uma aplicação dessa teoria, relacionada a problemas de calendário e, ao final, resolvemos algumas questões de Olimpíadas de Matemática e outros concursos relacionadas ao tema.

Generalidades

Pensando de forma intuitiva, uma sequência é uma lista ordenada de termos, que podem ser números, objetos, letras, símbolos, etc. Como exemplos simples, podemos mencionar a sequência de números pares positivos (2, 4, 6, 8, ...); a sequência dos dias da semana (Domingo, Segunda, Terça, Quarta, ...); a sequência de letras do alfabeto (A, B, C, D, ...); a famosa sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), entre muitas outras. Formalmente, temos:

Definição 1. *Sequência é uma função $a : \mathbb{N}^* \rightarrow X$, em que \mathbb{N}^* é o conjunto dos números naturais não nulos, e X é um conjunto.*

Nesse contexto, uma progressão aritmética dada por (3, 7, 11, 15, ...) é vista como uma função $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, onde $a(1) = 3$, $a(2) = 7$, $a(3) = 11$, $a(4) = 15$, ... Para simplificar a notação, vamos denotar esses termos por a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , e assim sucessivamente. Escrevemos também $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ para denotar sequências.

Note que o contradomínio de uma sequência pode ser qualquer conjunto. Assim, faz sentido considerar sequências de letras, sequências de símbolos, sequências de

¹Professor do Departamento de Matemática da UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina

comidas, seqüências de dias da semana, etc. Uma boa leitura sobre outros aspectos de seqüências pode ser encontrada na referência [3]. Neste artigo, estamos interessados em um tipo especial de seqüências, que definimos a seguir:

Definição 2. *Uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é dita periódica se existe um número natural não nulo p tal que $a_{n+p} = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Nesse caso, o menor $p \in \mathbb{N}^*$ com a propriedade acima é denominado o período da seqüência.*

Em outras palavras, o que caracteriza uma seqüência periódica é que, a partir de um certo ponto, os seus termos se repetem indefinidamente. Considere, por exemplo, a seqüência de letras a seguir:

O R M O R M O R M O R M . . .

Nesse caso, temos $a_1 = O$, $a_2 = R$, $a_3 = M$, $a_4 = O$, $a_5 = R$, $a_6 = M$, e os termos seguintes seguem o mesmo padrão. Assim, esta seqüência satisfaz a condição de ser periódica (tomando $p = 3$), pois:

- $a_4 = a_{1+3} = a_1$;
- $a_5 = a_{2+3} = a_2$;
- $a_6 = a_{3+3} = a_3$, e assim sucessivamente.

De fato, neste exemplo temos que o período da seqüência é $p = 3$. No entanto, é interessante verificar que, para qualquer \bar{p} múltiplo de 3, também vale que $a_{n+\bar{p}} = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Na próxima seção, veremos que o algoritmo da divisão euclidiana (divisão com resto) é uma ferramenta simples e eficaz para identificar um termo específico de uma seqüência periódica, sem necessidade de escrevê-la até o termo desejado.

Identificando os termos de uma seqüência periódica

Considere agora a seguinte seqüência:

<i>U</i>	<i>F</i>	<i>S</i>	<i>C</i>	<i>U</i>	<i>F</i>	<i>S</i>	<i>C</i>	<i>U</i>	<i>F</i>	<i>S</i>	<i>C</i>	...
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	...

Trata-se de uma sequência periódica de período 4. Como mencionamos anteriormente, para determinar um termo específico, vamos trabalhar com divisão euclidiana. Para intuir nosso método, verificamos as posições referentes a cada uma das letras da sequência:

- Letra U : posições 1, 5, 9, 13, ...
- Letra F : posições 2, 6, 10, 14, ...
- Letra S : posições 3, 7, 11, 15, ...
- Letra C : posições 4, 8, 12, 16, ...

Ora, o que têm em comum as posições referentes à letra C ? São os números que deixam resto 0 na divisão por 4 (divisão exata). Da mesma forma, as posições referentes às letras U , F e S deixam, respectivamente, restos 1, 2 e 3 na divisão euclidiana por 4.

Assim, se quisermos saber qual o 1354º termo desta sequência, basta efetuar a divisão por 4 e ver o resto! Como nesse caso o resto é 2, obtemos diretamente (sem precisar escrever os termos) que $a_{1354} = F$.

De fato, esse método vale para qualquer sequência periódica (a demonstração formal será apresentada logo a seguir). Se desejarmos saber qual o m -ésimo termo de uma sequência periódica de período p , basta calcular o resto na divisão euclidiana de m por p . Se o resto for 0, teremos $a_m = a_p$. Se o resto for 1, então $a_m = a_1$. Para resto 2, temos $a_m = a_2$, e assim sucessivamente.

Para mais detalhes e outras aplicações da divisão euclidiana, veja as referências [1] e [5], entre outras.

Formalizando e demonstrando o resultado

Considere uma sequência periódica qualquer, digamos $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Seja p o período desta sequência e tome b_m um termo genérico. Fazendo a divisão euclidiana de m por p , podemos escrever $m = q \cdot p + r$, em que q é o quociente e r é o resto. Lembre que as possibilidades de resto são limitadas, ou seja, devemos ter $0 \leq r \leq p - 1$. Então:

Teorema 3. *Nas condições acima, $b_m = b_r$ quando $1 \leq r \leq p - 1$. Por outro lado, se $r = 0$, temos $b_m = b_p$.*

Demonstração. Pela definição de sequência periódica, sabemos que $b_n = b_{n+p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, supondo $1 \leq r \leq p-1$, basta aplicar q vezes a definição para obter $b_r = b_{r+p} = b_{r+2p} = \dots = b_{r+qp} = b_m$. Analogamente, se $r = 0$, temos $b_p = b_{2p} = \dots = b_{qp} = b_m$, o que conclui a demonstração. \square

Uma aplicação interessante de sequências periódicas são os problemas de calendário em que desejamos determinar um dia de semana específico, apresentados na seção a seguir.

Problemas de calendário

Um exemplo corriqueiro de sequência periódica é a sucessão dos dias da semana: depois de um sábado, vem sempre um domingo; depois de um domingo, vem sempre uma segunda-feira (mesmo que essa ideia não seja muito agradável!), e assim por diante. Obviamente, o período desta sequência é 7, e o primeiro termo pode ser escolhido conforme a situação proposta.

Nesse contexto, considere o seguinte problema: você deixou seu carro no conserto em uma segunda-feira, e o mecânico informou que em 60 dias ele estará pronto. Em que dia da semana isso ocorrerá? Ora, nesse caso, o dia 1 será uma terça-feira, e assim é mais conveniente considerar a seguinte sequência periódica de dias da semana:

<i>Ter</i>	<i>Qua</i>	<i>Qui</i>	<i>Sex</i>	<i>Sab</i>	<i>Dom</i>	<i>Seg</i>	...
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	...

Agora, para identificar o dia 60 desta sequência, basta verificar qual o resto na divisão euclidiana de 60 por 7. Nesse caso obtemos resto 4, e assim concluímos que o carro ficará pronto numa sexta-feira!

Se quisermos saber em que dia da semana será uma data específica do calendário, o procedimento é basicamente o mesmo, mas é preciso estar atento ao número de dias de cada mês, bem como anos bissextos, assunto da próxima seção.

Anos bissextos

Considerando que o tempo que o planeta Terra leva para completar uma volta ao redor do Sol é aproximadamente 365,256 dias, é preciso fazer um ajuste de tempos em tempos para que nosso calendário continue acompanhando certos eventos sazonais,

como estações do ano, por exemplo. Para uma leitura interessante sobre o assunto, veja a referência [2].

Nesse contexto, surgem os anos bissextos, com um total de 366 dias (mês de fevereiro possui um dia a mais), que em geral ocorrem a cada quatro anos. Nos problemas olímpicos de calendário, é importante saber se o ano em questão é ou não bissexto, para determinar o dia exato da semana. Nesse sentido, temos dois casos a considerar:

1. **Para os anos cujos dois últimos algarismos estão entre 01 a 99**, os anos bissextos são os divisíveis por 4. Por exemplo, os anos 2008, 2012, 2016, foram bissextos, e ano 2017 não será bissexto.

Aqui, é bastante útil o critério de divisibilidade por 4. Um número será divisível por 4 se e somente se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4. Nesse sentido, para verificar que 2016 é um ano bissexto, basta notar que 16 é divisível por 4. Para relembrar outros critérios de divisibilidade, veja, por exemplo, a referência [4].

2. **Para os anos cujos dois últimos algarismos são 00**, o critério é outro. Nesse caso, apenas os anos múltiplos de 400 são bissextos! Assim, por exemplo, temos que o ano 2000 foi bissexto, mas o ano 2100 não será bissexto (pois não é múltiplo de 400).

Esse último caso é interessante em particular, porque contraria o senso comum que os anos bissextos sempre ocorrem de 4 em 4 anos. Esse fato é quase sempre verdade, mas na virada do século XX, o ano 1896 foi bissexto, e o próximo ano bissexto só ocorreu em 1904 (8 anos depois), pois 1900 não foi bissexto.

Com essas noções, podemos estimar o dia exato da semana em um período maior do calendário. Considere, por exemplo, que uma pessoa nasceu em um sábado no inverno de 1966, e que essa pessoa deseja organizar uma festa no dia em que completara 50 anos. Em que dia da semana será essa festa?

Nesse caso, faz sentido considerar a seguinte sequência periódica:

<i>Sab</i>	<i>Dom</i>	<i>Seg</i>	<i>Ter</i>	<i>Qua</i>	<i>Qui</i>	<i>Sex</i>	...
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	...

Ora, no período considerado de 1966 a 2016 temos 13 anos bissextos (o ano de 2016 está incluído entre eles, pois o aniversário ocorrerá no inverno!). Assim, do dia de seu nascimento até um dia antes de seu aniversário temos 50 anos completos e, entre eles, 13 bissextos. Isso nos dá um total de $365 \cdot 50 + 13 = 18.263$ dias.

Dessa forma, o dia do 50º aniversário desta pessoa corresponde ao termo 18.264 dessa sequência, que deixa resto 1 na divisão por 7. Concluimos, assim, que a grande festa será realizada em um sábado!

Sequências periódicas em Olimpíadas e concursos

Nesta seção, apresentamos algumas questões de Olimpíadas de Matemática e concursos públicos sobre sequências periódicas e calendário, que podem ser resolvidas pelo método apresentado nas seções anteriores. Iniciamos com a seguinte questão olímpica:

Questão 1 (ORM/SC 2013) - Anos bissextos têm um dia a mais, 29 de fevereiro, que os demais anos e ocorrem a cada 4 anos. Esmeralda nasceu no dia 29 de fevereiro, em um domingo. Sabendo que 29 de fevereiro de 2012 caiu em uma quarta-feira, em qual ano Esmeralda pode ter nascido?

A) 1972 B) 1976 C) 1980 D) 1984 E) 1988

Como Esmeralda nasceu em um domingo, vamos considerar a seguinte sequência periódica de dias de semana:

<i>Dom</i>	<i>Seg</i>	<i>Ter</i>	<i>Qua</i>	<i>Qui</i>	<i>Sex</i>	<i>Sab</i>	<i>...</i>
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$...$

Ademais, entre 29 de fevereiro de um determinado ano, e 28 de fevereiro do próximo ano bissexto, transcorreu um período de $366 + 365 + 365 + 365 = 1.461$ dias. Com base nessa informação, vamos testar as alternativas.

Segundo a alternativa A, Esmeralda nasceu em 1972. Assumindo que esse dia é um domingo, teríamos 10 períodos de 1.461 dias até o dia 28 de fevereiro de 2012 (pois são 40 anos de diferença). Isso nos dá um total de 14.610 dias entre 29 de fevereiro de 1972 e 28 de fevereiro de 2012.

Dessa forma, o dia 29 de fevereiro de 2012 corresponde ao 14.611º termo dessa sequência. Mas dividindo 14611 por 7 (período da sequência), obtemos resto 2, e assim o dia 29 de fevereiro de 2012 seria uma segunda-feira. Mas esse dia de semana não corresponde ao enunciado, ou seja, esta alternativa está incorreta.

De acordo com a alternativa B, Esmeralda nasceu em 1976. Assumindo que esse dia é um domingo, temos 9 períodos de 1.461 dias até 28 de fevereiro de 2012 (36 anos

de diferença). Fazendo as contas, temos um total de 13.149 dias de 29 de fevereiro de 1972 a 28 de fevereiro de 2012.

Então, o dia 29 de fevereiro de 2012 corresponde ao 13.150º termo dessa sequência. Dividindo 13.150 por 7 (período da sequência), o resto obtido é 4, e assim o dia 29 de fevereiro de 2012 seria uma quarta-feira, o que está totalmente de acordo com o enunciado. Assim, a alternativa correta é a letra B! \square

Conforme comentamos na primeira seção, o contradomínio de uma sequência pode ser qualquer conjunto. Nesse sentido, podemos considerar uma sequência de figuras e símbolos, como na seguinte questão de concurso público:

Questão 2 (IBFC 2015) - Considerando que as figuras abaixo (separadas por vírgulas) seguem uma sequência lógica, então a 76ª figura da sequência é:

$\otimes \uparrow \wedge \sim \odot \dagger \otimes \uparrow \wedge \sim \odot \dagger \otimes \uparrow \wedge \sim \odot \dagger \dots$

A) \otimes B) \uparrow C) \wedge D) \sim E) \dagger

Para resolver essa questão, basta notar que a sequência de símbolos acima é uma sequência periódica, com período 6. Temos que $a_1 = \otimes$, $a_2 = \uparrow$, $a_3 = \wedge$, $a_4 = \sim$, $a_5 = \odot$ e $a_6 = \dagger$, e assim sucessivamente.

Usando o método descrito na seção anterior, para identificar a 76ª figura basta verificar que na divisão euclidiana de 76 por 6 obtemos resto 4, e assim o símbolo correspondente é \sim . Portanto, a alternativa correta é a letra D! \square

Em seguida, apresentamos mais uma questão de Olimpíada de Matemática, cujo tema é funções, e pode ser resolvida com a teoria de sequências periódicas:

Questão 3 (ORM/SC 2004) - A função f é definida pela tabela a seguir:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Por exemplo, $f(2) = 1$. Quanto vale $\underbrace{f(f(f\dots(f(4))\dots))}_{2004 \text{ vezes}}$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Pelas informações do enunciado, considerando aplicações sucessivas da função f em 4, obtemos os seguintes resultados:

- f aplicada uma vez: $f(4) = 5$;
- f aplicada duas vezes: $f(f(4)) = f(5) = 2$;
- f aplicada três vezes: $f(f(f(4))) = f(2) = 1$;
- f aplicada quatro vezes: $f(f(f(f(4)))) = f(1) = 4$;
- f aplicada cinco vezes: $f(f(f(f(f(4))))) = f(4) = 5$, e assim sucessivamente.

Nesse sentido, estamos diante de uma sequência periódica, onde o período 4 e o primeiro termo é 5, dada por:

$$\begin{array}{cccccccc}
 5 & 2 & 1 & 4 & 5 & 2 & 1 & 4 & \dots \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & \dots
 \end{array}$$

Ora, a pergunta do enunciado corresponde ao 2004º item dessa sequência, que podemos identificar pelo resto na divisão euclidiana por 4. Como a divisão de 2004 por 4 é exata (resto 0), segue que o valor correspondente é 4. Assim, a alternativa correta é a letra D! \square

Finalmente, apresentamos mais uma questão de concurso público referente a calendário, na qual podemos considerar a sequência periódica formada pelos dias de semana:

Questão 4 (FCC 2012) - Se em um determinado ano o mês de agosto teve cinco sextas-feiras, cinco sábados e cinco domingos, então o dia 13 de dezembro desse ano caiu em:

A) Quarta B) Quinta C) Sexta D) Sábado E) Domingo

Pelo enunciado, o mês de agosto teve cinco sextas, cinco sábados e cinco domingos. Ora, sabemos que o mês de agosto tem 31 dias, o que corresponde a quatro semanas completas e três dias. Assim, além de sexta, sábado e domingo, nenhum outro dia da semana pode se repetir cinco vezes. Portanto, concluímos que o último dia de agosto foi um domingo, e assim, o dia 1º de setembro será segunda-feira.

Consideramos assim a seguinte sequência periódica iniciando em 1º de setembro:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \textit{Seg} & \textit{Ter} & \textit{Qua} & \textit{Qui} & \textit{Sex} & \textit{Sab} & \textit{Dom} & \dots \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \dots
 \end{array}$$

Agora, precisamos ver a que termo dessa sequência corresponde o dia 13 de dezembro. Como setembro tem 30 dias, outubro tem 31 dias, e novembro tem 30 dias, o termo correspondente é dado por $30 + 31 + 30 + 13 = 104$. Fazendo a divisão euclidiana de 104 por 7, obtemos resto 6, e assim a alternativa correta é a letra D! \square

De fato, o tema de sequências periódicas é recorrente em Olimpíadas de Matemática e outros concursos em geral. E como vimos em vários exemplos e questões, para descobrir um termo específico dessas sequências, não é necessário escrevê-las até esse termo! É muito mais simples calcular o resto no algoritmo da divisão euclidiana, no qual o divisor é o período da sequência.

Referências

- [1] CARVALHO, Neri e GIMENEZ, Carmen. *Fundamentos de Matemática I*. Universidade Federal de Santa Catarina - EAD, 2009.
- [2] FARIA, Romildo et al. *Fundamentos de Astronomia*. Papirus, 1985.
- [3] IEZZI, Gelson et al. *Fundamentos de Matemática Elementar - volume 4*. Editora Atual, 2004.
- [4] JUNQUEIRA, Luís. *Crêterios de divisibilidade*. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal de Santa Catarina, 2001. Disponível em repositório.ufsc.br.
- [5] MOREIRA, Carlos. *Divisibilidade, congruências e aritmética módulo n*. Revista Eureka (Sociedade Brasileira de Matemática), vol.2, 41-52, 1998.

Criação e resolução de um problema de geometria via construção geométrica

José Luiz Rosas Pinho ¹

pinho@pet.mtm.ufsc.br

O seguinte problema foi mantido, durante alguns anos, em nosso banco de questões de problemas olímpicos, mas, por diversas razões, nunca chegou a ser utilizado. Resolvemos trazê-lo à tona agora, abrindo mão dele em nossa olimpíada ou como sugestão para a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), pois pareceu-nos mais interessante apresentá-lo aqui pela história de sua criação e, especialmente neste caso, pela ideia de sua resolução via construção geométrica. Como consequência, obtemos uma nova demonstração do chamado teorema da borboleta.

O Problema

Problema (ORM/SC): Na figura 1, a circunferência de centro O tem raio R , os arcos (menores) AB e CD medem, respectivamente, 90° e 120° e as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} fazem um ângulo de 30° . Seja X um ponto qualquer no arco CD e sejam F e G as intersecções dos segmentos \overline{XA} e \overline{XB} respectivamente com o segmento \overline{CD} . Variando o ponto X no arco CD o comprimento do segmento \overline{FG} também varia. Qual é o maior comprimento possível para o segmento \overline{FG} ?

¹Professor do Departamento de Matemática da UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina.

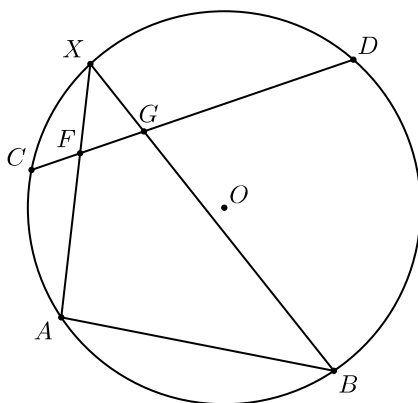


Figura 1

Convidamos o leitor a refletir sobre o problema fazendo uma análise do mesmo. Analisar um problema significa decompô-lo em partes, desconstruí-lo, obtendo novas maneiras de olhá-lo e descobrindo novos elementos ou resultados parciais, para depois realizar a síntese, ou seja, juntar todos esses elementos resultantes da análise e finalmente chegar à solução. Isso pode ser feito através de várias estratégias, sendo a mais comum delas, em geometria, o traçado de linhas auxiliares (ou “escondidas”). Outras estratégias consistem em estudar casos particulares (mas cuidado com as particularizações!), como uma possível forma de induzir resultados mais gerais, ou então enfraquecer hipóteses. Essas últimas estratégias poderiam ser resumidas na expressão: “E se...?”. Diversos métodos heurísticos para a resolução de problemas em matemática podem ser encontrados em um livro bem conhecido de Pólya [8].

Vejamos uma particularização:

E se as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} do problema fossem paralelas (figura 2)?

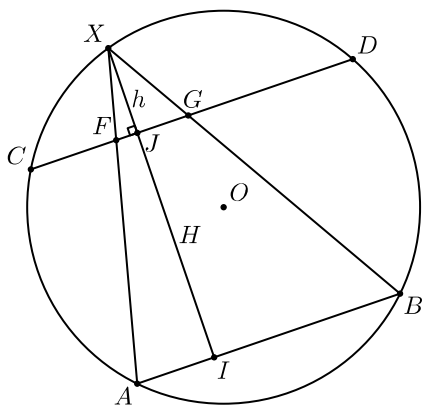


Figura 2

Nesse caso o problema é simples, pois se J e I são os pontos de intersecção da perpendicular por X às retas \overleftrightarrow{CD} e \overleftrightarrow{AB} respectivamente, então FG dependerá de $h = XJ$. Da semelhança dos triângulos XFG e XAB temos

$$\frac{AB}{h+H} = \frac{FG}{h} \Rightarrow \frac{AB}{FG} = \frac{h+H}{h} = 1 + \frac{H}{h}.$$

Portanto, como AB e $H = OI$ são constantes, FG será máximo quando h for máximo, e isso ocorrerá quando os pontos X, J, I e o centro O da circunferência forem colineares (figura 3).

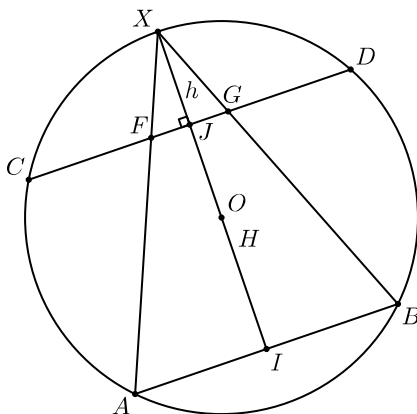


Figura 3

Observe que nesse caso o ponto J será ponto médio não somente do segmento CD , mas também do segmento \overline{FG} . Poderíamos generalizar essa observação? No caso do problema original, FG será máximo quando o ponto médio do segmento \overline{FG} coincidir com o ponto médio do segmento \overline{CD} ? A análise através de softwares de geometria dinâmica (SGD), como o *Geogebra*® ou o *Cabri*®, tem sido atualmente mais uma estratégia na resolução de problemas de geometria. Porém sua confiabilidade tem limites, dado que a imagem na tela de um computador não é um *continuum*, sendo formada apenas por um conjunto finito de pontos discretos (*pixels*). A grande vantagem de um SGD é justamente o seu lado dinâmico. Movendo o ponto X no arco CD e acompanhando a medida do segmento \overline{FG} , provavelmente teremos a impressão de que seu ponto médio coincide com o ponto médio do segmento \overline{CD} quando a medida de FG for máximo, segundo o SGD. Mas o mais importante é que, se variarmos o raio da circunferência, ou os comprimentos dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , ou ainda seu ângulo, em qualquer caso, ao ajustarmos X no arco CD , de modo que FG fique máximo, possivelmente permaneceremos com a impressão de que o ponto médio de \overline{FG} coincidirá com o ponto médio de \overline{CD} . Apesar dessa capacidade dinâmica de análise, o software não garante que o resultado acima seja verdadeiro e, caso seja, ainda assim aparentemente em nada ajuda na resolução do nosso problema.

Aliás, toda essa discussão nos remete à pergunta: existe um ponto X , no arco CD ,

tal que o segmento \overline{FG} resultante das intersecções de \overline{XA} e \overline{XB} com \overline{CD} seja tal que seu ponto médio coincida com o ponto médio de \overline{CD} ? Ou, de outra forma, é possível achar com régua e compasso um ponto X sobre o arco CD de forma que o ponto médio de \overline{FG} seja o ponto médio de \overline{CD} ? Esse problema de construção equivale a construir um quadrilátero $ABGF$ sendo dados: o lado \overline{AB} , a reta que contém o lado \overline{FG} , seu ponto médio (nessa reta) e o ângulo entre os lados \overline{AF} e \overline{BG} (ver a seção Problemas Propostos, problema número 3).

Uma última observação, no que concerne à análise do problema: intuitivamente observamos que, quando X se “aproxima” de C ou de D , variando no arco CD , o segmento \overline{FG} diminui de comprimento. Assim, nossa intuição nos diz que, variando o ponto X de C até D sobre o arco CD , o comprimento do segmento \overline{FG} começa “pequeno”, cresce e depois volta a decrescer, o que nos indica a existência de um (pelo menos um) valor máximo para o comprimento de \overline{FG} . Mais ainda, ela nos diz também que haverá duas posições distintas do ponto X no arco CD que resultarão em segmentos \overline{FG} de mesmo comprimento, e que um desses segmentos está mais “próximo” de C e o outro mais “próximo” de D (figura 4). Haverá alguma simetria entre esses dois segmentos de mesmo comprimento? Haverá um caso em que um único ponto X produzirá um segmento \overline{FG} de comprimento distinto de qualquer outro? Será essa a situação de máximo?

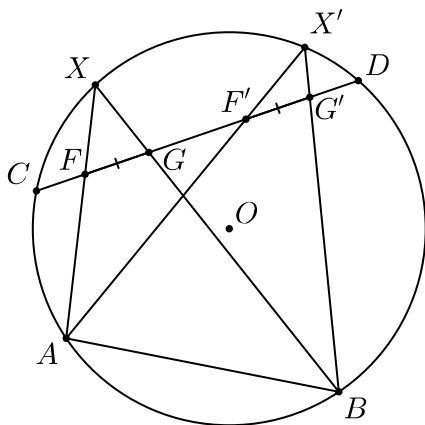


Figura 4

Pode parecer estranho ao leitor (em especial estudantes do ensino básico) fazer a análise de um problema, olhá-lo de vários ângulos distintos e considerar casos particulares. Afinal, por que perder tempo com raciocínios um tanto vagos e pouco objetivos? Não é a matemática puramente operacional, quantitativa? Isso é o que é normalmente ensinado para os estudantes pré-universitários e, mesmo para os universitários de áreas exatas, essa é a impressão dominante. Os aspectos qualitativos da matemática (propriedades, teoremas) são menos considerados no ensino médio. Mesmo no aspecto quantitativo, poucas vezes estudantes têm a oportunidade de poder perceber, por exemplo, que em matemática as desigualdades são tão ou mais importantes do que as igualdades. Pode parecer estranho também falar em intuição matemática. A esse respeito, recomendamos a leitura de um artigo do matemático francês Henri Poincaré que, já no início do século XX, escrevia sobre intuição e criação em matemática [7], ou a leitura de um livro de Jacques Hadamard [3], outro matemático francês, contemporâneo de Poincaré.

Como surgiu o problema

Esse problema teve origem em um problema de construção geométrica, envolvendo translação, de um livro do matemático dinamarquês Julius Petersen sobre construções geométricas que foi publicado pela primeira vez em 1866 [6]. Tivemos a ideia do problema quando orientávamos o trabalho de conclusão de curso de uma aluna que justamente estudava os problemas de construção daquele livro que envolviam translações [5]. No livro de Petersen, estão propostos mais de 400 problemas e o problema que deu origem ao nosso é o de número 260. Seu enunciado é:

Problema (Petersen): Numa circunferência, traçamos duas cordas, \overline{AB} e \overline{CD} . Encontrar sobre a circunferência um ponto X , tal que as linhas \overline{XA} e \overline{XB} determinem sobre a corda \overline{CD} um segmento \overline{FG} , igual a um segmento dado.

Note que a diferença entre o *Problema (Petersen)* acima e o *Problema (ORM/SC)* é que o comprimento do segmento resultante das intersecções de \overline{XA} e \overline{XB} com a corda \overline{CD} é dado no *Problema (Petersen)*, enquanto que no *Problema (ORM/SC)* é pedido aquele de comprimento máximo. Na verdade o nosso problema não foi enunciado como um problema de construção, mas veremos que o problema colocado dessa forma levará à solução do nosso. Podemos dizer que, nesse caso, a resolução do problema

é não analítica. Um exemplo clássico desse tipo de resolução ocorre no problema de reflexão de Heron, um problema de minimização:

Problema (Heron): Dada uma reta e dados pontos A e B , no mesmo semiplano em relação à reta dada, achar um ponto P nessa reta tal que a soma de suas distâncias aos pontos A e B seja mínima.

Sua resolução é construtiva (de fato, o problema é enunciado como problema de construção) e a parte quantitativa do problema (achar, por exemplo, a distância do ponto P a uma das projeções dos pontos A ou B na reta dada) pode ser calculada a partir dos resultados e propriedades que são obtidos como subprodutos da análise do problema para a resolução construtiva.

Um ponto a ressaltar aqui é a ampla perspectiva que se estabelece para a criação de problemas de extremos em geometria a partir de problemas específicos, sejam ou não de construção, e mesmo a partir de outros problemas de extremos. Assim, por exemplo, o problema de Heron gera outros problemas de extremos relativamente simples. Além disso, a solução do problema de Heron também pode ser usada na resolução de outro problema de extremo: a solução de Fejér do problema de Fagnano [4].

A resolução analítica

A (re)solução analítica do nosso problema utiliza ferramentas do Cálculo Diferencial e segue as seguintes etapas:

- 1) Estabelecemos um referencial cartesiano com, por exemplo, a origem no ponto A e o eixo das abscissas coincidindo com a reta \overleftrightarrow{AB} e escrevemos as equações da reta \overleftrightarrow{CD} e da circunferência.
- 2) O ponto X varia no arco CD e, portanto, suas coordenadas estão amarradas pela equação da circunferência; escrevemos as equações das retas \overleftrightarrow{XA} e \overleftrightarrow{XB} e obtemos as coordenadas de seus pontos de intersecção F e G , respectivamente, com a reta \overleftrightarrow{CD} em função das coordenadas de X .
- 3) Finalmente escrevemos a equação da distância entre os pontos F e G que dependerá das coordenadas do ponto X ; como essas coordenadas estão amarradas pela equação da circunferência, obtemos no final uma função distância que dependerá apenas de uma variável (uma das coordenadas de X). Usando Cálculo, obtemos o máximo dessa função.

Observe que esse procedimento consiste de muitas etapas envolvendo alguma complexidade operacional e que o cálculo dos pontos críticos da função que se quer maximizar pode se tornar eventualmente inviável.

A resolução não-analítica (construção)

Inicialmente vejamos como resolver o *Problema (Petersen)*, enunciado anteriormente. Para efeito de análise do problema suponhamos o problema resolvido.

Supondo que o segmento \overline{FG} obtido em \overline{CD} seja congruente ao segmento \overline{EJ} dado, tracemos a paralela à reta \overleftrightarrow{CD} pelo ponto A e marquemos nessa reta o ponto K de modo que \overline{AK} seja congruente a \overline{FG} . Então o quadrilátero $AKGF$ será um paralelogramo e, portanto, \overline{KG} será paralelo a \overline{AX} . Segue que $\alpha = \angle AXB = \angle KGB$ (figura 5).

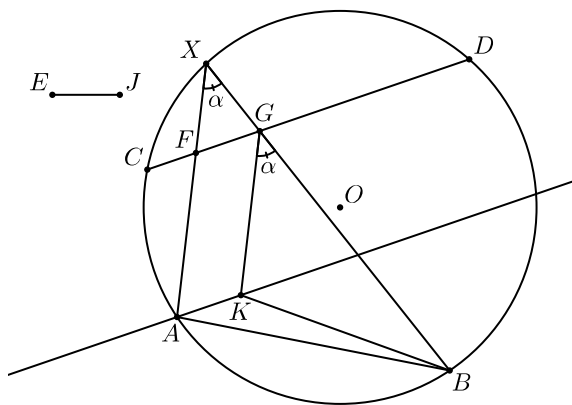


Figura 5

Portanto, o ponto G estará no arco capaz do ângulo α em relação ao segmento \overline{KB} . Como temos o ângulo α , o ponto K e o segmento \overline{KB} , o ponto G pode ser obtido. Note que pode haver uma segunda solução em um ponto G' que seria outra intersecção do arco capaz com o segmento \overline{CD} . O ponto X e um segundo ponto X' , são então obtidos respectivamente, como intersecções das semirretas \overrightarrow{BG} e $\overrightarrow{BG'}$.

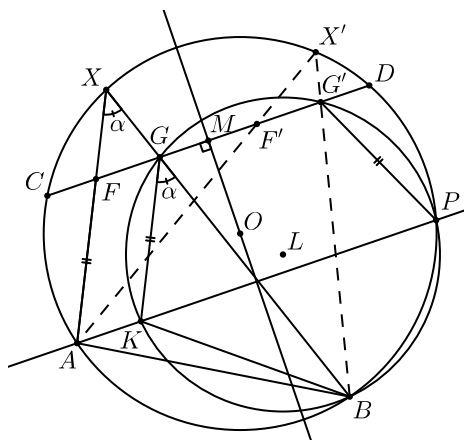


Figura 7

Concluimos que a cada solução \overline{FG} obtida no segmento \overline{CD} há outra solução simétrica a ela em relação ao ponto médio M de \overline{CD} . Se houver uma solução \overline{FG} tal que o ponto G coincida com o ponto médio M da corda \overline{CD} , então a outra solução será simétrica a ela em relação a esse ponto M , ou seja, uma de suas extremidades também coincidirá com M e a outra será o simétrico de F em relação a M .

Vejamos agora o que ocorre com a solução, ainda considerando o *Problema (Petersen)*, se modificarmos o segmento \overline{EJ} dado para um segmento $\overline{EJ'}$ de comprimento maior que \overline{EJ} . Observe que, ao marcarmos $\overline{AK'}$ sobre a reta \overleftrightarrow{AP} (a qual é paralela à corda \overline{CD}), obtemos um segmento $\overline{K'B}$ cuja mediatriz encontrará a mediatriz de \overline{BP} (por onde passa qualquer arco capaz de α) em um ponto L' , centro do arco capaz de α , que está mais próximo dos pontos B e P do que o centro L (figura 8).

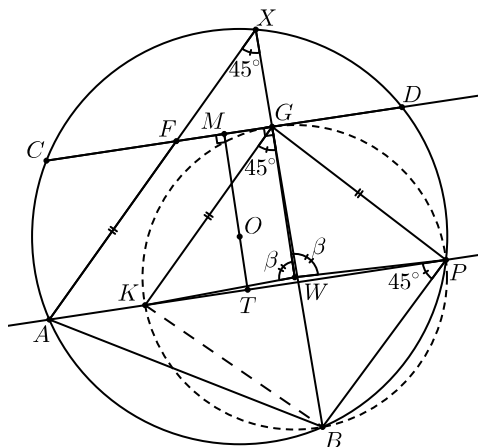


Figura 9

Assim, se T for o ponto médio da corda \overline{AP} , a perpendicular a essa corda por T deverá passar pelo centro O da circunferência dada no problema e cruzará a corda \overline{CD} em seu ponto médio M , que será também ponto médio do lado \overline{FG} do trapézio isósceles $APGF$. Então o ponto X encontrado dessa maneira gera a solução máxima \overline{FG} que é simétrica a ela mesma em relação ao ponto médio M de \overline{CD} .

As contas, finalmente

Para calcular o comprimento do segmento máximo \overline{FG} , determinado na corda \overline{CD} , devemos entender como se determina, com régua e compasso, o ponto de tangência G . Seja Q o ponto de intersecção das retas \overline{CD} e \overline{BP} . Então

$$\begin{aligned} \widehat{CQB} &= \frac{\text{arc}(BAC) - \text{arc}(PD)}{2} = \frac{[\text{arc}(BA) + \text{arc}(AC)] - \text{arc}(PD)}{2} \\ &= \frac{\text{arc}(BA)}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ, \end{aligned}$$

pois $\text{arc}(AC) = \text{arc}(PD)$, em que $\text{arc}(Y)$ significa medida do arco Y (figura 10).

Além disso, como $\text{arc}(CD) = 120^\circ$ e $\text{arc}(AB) = 90^\circ$, então

$$CD = R\sqrt{3} \quad \text{e} \quad AB = R\sqrt{2}.$$

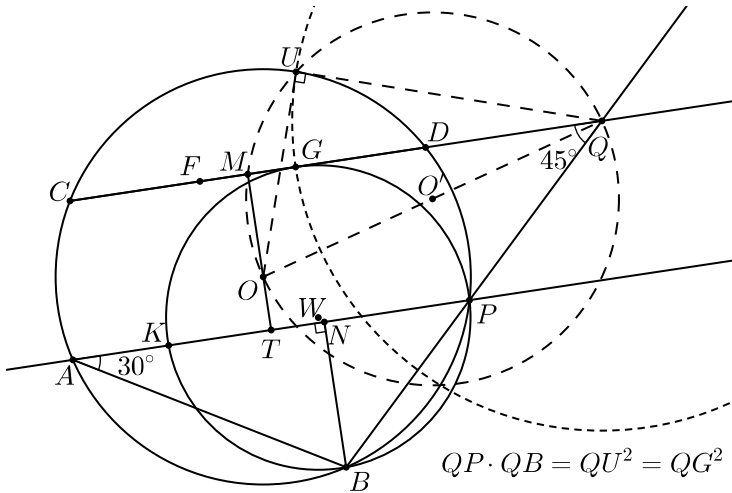


Figura 10

Por potência do ponto Q em relação à circunferência de centro W e tangente a \overline{CD} temos

$$QP \cdot QB = QG^2,$$

em que \overline{QG} é o segmento tangente por Q a essa circunferência.

Por potência do ponto Q em relação à circunferência dada de centro O temos

$$QP \cdot QB = QU^2,$$

em que \overline{QU} é a tangente por Q a essa circunferência.

Então $QU = QG$ e, para determinarmos o comprimento QG e, portanto, o ponto G , basta traçar a tangente por Q à circunferência de centro O , conforme a figura 10.

Vamos calcular as distâncias QP e QB , para poder calcular QG . Sejam d e d' respectivamente as distâncias dos pontos B e P à reta CD . Então

$$d' = TM = OM + OT \quad \text{e} \quad d = BN + TM.$$

Como o arco CD mede 120° , então

$$OM = \frac{R}{2}.$$

Agora,

$$\text{arc}(ABP) = \text{arc}(AB) + \text{arc}(BP) = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

Então, pela lei do cosseno no $\triangle AOP$, temos

$$\begin{aligned} AP^2 &= R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(150^\circ) = 2R^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \Rightarrow AP &= R\sqrt{2 + \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} OT^2 &= R^2 - \left(\frac{AP}{2}\right)^2 = R^2 \left(1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{R^2}{4} (2 - \sqrt{3}) \\ \Rightarrow OT &= \frac{R}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Então

$$d' = TM = \frac{R}{2} \left(1 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right).$$

Do $\triangle ANB$, temos

$$BN = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Segue que

$$d = \frac{R}{2} \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right).$$

Como $C\hat{Q}B = 45^\circ$ temos

$$QB = d\sqrt{2} = \frac{R}{2} \left(2 + \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right),$$

e

$$QP = d'\sqrt{2} = \frac{R}{2} \left(\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \right).$$

Note que $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$. Então

$$QB = \frac{R}{2} \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1 \right) \quad \text{e} \quad QP = \frac{R}{2} \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 \right).$$

Portanto

$$\begin{aligned} QG^2 &= \frac{R^2}{4} \left(\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} \right)^2 - 1 \right) = \frac{R^2}{4} (4 + 2\sqrt{6}) \\ \Rightarrow QG &= \frac{R}{2} \sqrt{4 + 2\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, por potência do ponto Q em relação à circunferência dada de centro O e como $CD = R\sqrt{3}$, temos

$$QG^2 = QP \cdot QB = QD \cdot QC = QD \cdot (QD + CD) = QD \cdot (QD + R\sqrt{3}).$$

Resolvendo a equação do segundo grau em QD obtemos

$$QD = \frac{R}{2} (1 + \sqrt{6} - \sqrt{3}).$$

Segue que

$$DG = QG - QD = \frac{R}{2} \left[\sqrt{4 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{3} - \sqrt{6} - 1 \right].$$

Assim, o valor máximo FG será igual a

$$FG = CD - 2 \cdot DG = R \left[1 + \sqrt{6} - \sqrt{4 + 2\sqrt{6}} \right].$$

O Teorema da Borboleta

A conclusão obtida após a figura 7 permite provar o chamado Teorema da Borboleta.

Teorema da Borboleta: São dadas uma circunferência e uma corda \overline{CD} nessa circunferência. Seja M o ponto médio de \overline{CD} e sejam \overline{XB} e $\overline{X'A}$ duas cordas quaisquer que passam por M . Sejam F e F' respectivamente os pontos de intersecção das cordas \overline{XA} e $\overline{X'B}$ com \overline{CD} . Então $FM = F'M$ (figura 11).

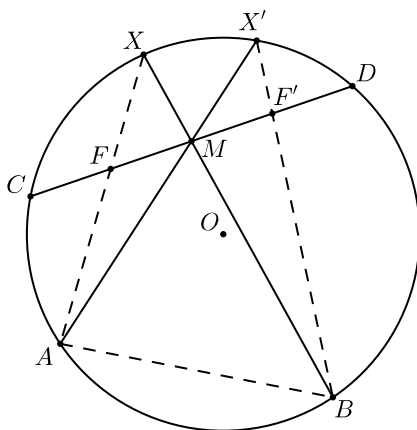


Figura 11

Segundo Coxeter e Greitzer [2], este teorema surgiu em um artigo de William Horner (1786-1837) publicado em 1815. Diversas demonstrações do teorema podem ser encontradas em [1] e um interessante comentário político, em conexão com este teorema, pode ser encontrado em um livro de Ruelle [9].

“Neste ponto uma questão chocante deve ser discutida: como nosso teorema da borboleta poderia ser incluído em nossa lista de problemas “antissemiticos”? O cenário da estória é a União Soviética, e a época são os anos 70 e 80... Excelência científica era recompensada... mas ao final, as autoridades soviéticas, através dos comitês do partido nas universidades, procuraram mudar essa situação. Em particular, eles limitavam a admissão de judeus e outros grupos minoritários às maiores universidades (em particular a Universidade de Moscou)... Alguns detalhes são fornecidos nos artigos de Anatoly Vershik e Alexander Shen, em que eles

dão uma lista de problemas “assassinos” usados para reprovar aqueles que não eram considerados étnica ou politicamente corretos. Provar o teorema da borboleta estava na lista dos problemas “assassinos”, e pode-se ver porque: a maneira natural de abordar o problema não leva a lugar algum.”²

Vejamos aqui uma nova demonstração, baseada no que vimos na resolução do *Problema (ORM/SC)*.

Basta observar que as cordas \overline{XB} e $\overline{X'A}$ definem a corda \overline{AB} como no *Problema (Petersen)*. Os segmentos \overline{FM} e $\overline{F'M}$ também estão definidos na corda \overline{CD} . Se considerarmos \overline{FM} como uma solução do *Problema (Petersen)* para um segmento dado congruente a \overline{FM} , então haverá uma segunda solução simétrica a \overline{FM} em relação ao ponto médio M de \overline{CD} . Pelo que vimos anteriormente, essa solução só pode ser $\overline{F'M}$. Logo, $FM = F'M$, e o teorema fica provado.

Referências

- [1] BOGOLMONY, Alexander: The Butterfly Theorem. In: <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml>, acessado em 24 de julho de 2016.
- [2] COXETER, Harold Scott MacDonald; GREITZER, Samuel L.: Geometry revisited. The Mathematical Association of America: New York – Toronto, 1967.
- [3] HADAMARD, Jacques: Psicologia da invenção na Matemática, Contraponto editora: Rio de Janeiro, 2009.
- [4] PASQUALI, Kely Cristina: Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana. (Trabalho de Conclusão de Curso) Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2004.
- [5] PEREIRA, Diva Cristiane Nascimento: Resolução de problemas de construção geométrica do livro de Julius Petersen envolvendo a transformação translação. (Trabalho de Conclusão de Curso) Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2012.

²Tradução livre.

-
- [6] PETERSEN, Julius: Construções Geométricas. São Paulo: Nobel, 1963.
 - [7] POINCARÉ, Henri: Mathematical Creation, Science and Method (trad. George Bruce Halsted), The Science Press, NY, 1913.
 - [8] PÓLYA, György: A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1975.
 - [9] RUELLE, David: The Mathematician's Brain, Princeton University Press, 2007.



Curiosidades

Marcelo Viana

Marcelo Miranda Viana da Silva nasceu em 4 de março de 1962, no Rio de Janeiro. É graduado pela Universidade do Porto, em Portugal, e obteve título de doutor pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), além de pós-doutorado nas Universidades de Princeton e Califórnia, nos Estados Unidos. Ganhou os prêmios TWAS em 1998, UMALCA em 2000, Ramanujan em 2005 e Universidade de Coimbra em 2007.

Atualmente é pesquisador titular e diretor geral do IMPA e, neste ano, foi vencedor do Prêmio Grand Prix Scientifique Louis D. juntamente com o colega francês François Labourie. Esta foi a primeira vez que este prêmio foi concedido à Matemática e a um brasileiro.

Marcelo já participou, como colaborador, na função de presidente de Juri Internacional, da Olimpíada Ibero-Americana de Matemática (OIAM), em 2008. Além disso, o IMPA hoje é o realizador da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

Para maiores informações, acesse o *Lattes* do pesquisador Marcelo Viana:

<http://lattes.cnpq.br/6233887751567079>

Prêmio Grand Prix Scientifique Louis D.

O Prêmio Grand Prix Scientifique Louis D., considerado o principal prêmio científico francês, é anualmente oferecido pela Academia de Ciências da França desde 2000.

A ideia do prêmio é incentivar projetos de vanguarda de pesquisa científica. O valor recebido é de 450 mil euros, os quais 10% ficam com o autor do projeto, e os outros 90% são usados para financiar o projeto.

Além de Marcelo e François, ainda participam do projeto na área de Sistemas Dinâmicos outros matemáticos, sendo esta equipe composta igualmente por brasileiros e franceses.

Para maiores informações sobre o projeto e o assunto, consulte uma das entrevistas que o pesquisador Marcelo Viana deu no link abaixo:

<http://brasileiros.com.br/2016/05/brasil-vence-o-maior-premio-cientifico-da-franca/>

Paul Erdős

Paul Erdős foi um matemático húngaro (Budapeste, 26 de março de 1913 – Varsóvia, 20 de setembro de 1996). Filho de professores de matemática, desde cedo ela já estava presente em sua vida. No decorrer da sua carreira, ele escreveu mais de 1500 artigos, em diversas áreas (como análise combinatória, teoria dos grafos, teoria dos números, entre outras), e teve ajuda de mais de 500 colaboradores. Seu número de publicações é comparado apenas ao do matemático Leonhard Euler.

Apesar de tantas publicações, a maioria delas não eram de novas teorias mas sim de resolução de problemas, que era o que ele gostava de fazer, especialmente em conjunto com outros matemáticos.

Para maiores informações sobre Erdős indicamos os seguintes links:

<http://www.ams.org/notices/199801/comm-erdos.pdf>

<http://www.ams.org/notices/199801/vertesi.pdf>

Número de Erdős

Criado por amigos de Erdős em sua honra, o número que leva seu nome se refere ao grau de separação entre um matemático e Erdős da seguinte forma: o número de Erdős do próprio Erdős é 0; já de quem publicou um artigo diretamente com ele é 1; e de quem publicou um artigo com quem publicou um artigo com o Erdős é 2; e assim sucessivamente. Hoje, aproximadamente, 200.000 matemáticos tem um número de Erdős atribuído a eles. Alguns matemáticos assumem que 90% dos matemáticos ativos no mundo possuem um número de Erdős menor que 8.

Indicamos o link a seguir onde o leitor poderá consultar o número de Erdős de um pesquisador:

<http://www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html>



Soluções dos Problemas Propostos

1. (Proposto na Revista da ORM/SC, número 13) Sejam $A = (abc)_{10}$, em que $((abc)_{10} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)$, um número natural de 3 algarismos e $T = (ab)_{10} - 2 \cdot c$, em que $((ab)_{10} = a \cdot 10 + b)$. Prove que $10T$ é divisível por 7 se, e somente se, A é divisível por 7. Será possível substituir $10T$ por T ?

SOLUÇÃO (apresentada por Gabriel Simon Schafascheck e Mateus Souza Oliveira, alunos de graduação do curso de Matemática - Licenciatura da UFSC)

Suponha que A é divisível por 7, isto é, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $A = 7q$. Note que $10T = 10(10a+b-2c) = 100a+10b-20c = (100a+10b+c)-21c = A-21c$. Segue que

$$10T = A - 21c = 7q + 7 \cdot (-3c) = 7(q - 3c).$$

Portanto $7 \mid 10T$ (lê-se: 7 divide $10T$).

Reciprocamente, suponhamos que $7 \mid 10T$, isto é, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $10T = 7j$. Como $10T = A - 21c$, obtemos que $A = 10T + 21c$, ou seja, $A = 7j + 7 \cdot (3c) = 7(j + 3c)$. Logo $7 \mid A$.

Portanto, $7 \mid 10T$ se, e somente se, $7 \mid A$, como queríamos demonstrar.

Para a segunda parte do exercício, precisamos mostrar que $7 \mid T$ se, e somente se, $7 \mid A$. Com efeito, temos $\text{mdc}(7, 10) = 1$. Isso nos garante que 7 divide $10T$ se, e somente se, 7 divide T (De fato, se um inteiro a divide um produto de inteiros $b \cdot c$ e $\text{mdc}(a, b)=1$, então a divide c). Daí, e do fato provado acima, segue o resultado.

Observamos que a segunda parte deste exercício é conhecido como *Critério de divisibilidade para o número 7*.

2. (Proposto na Revista da ORM/SC, número 13)

- (a) Prove que, se um número inteiro não é um quadrado perfeito, então a sua raiz quadrada é um número irracional.
- (b) Prove que, se temos dois números inteiros que não são quadrados perfeitos, então a soma de suas raízes quadradas é um número irracional.

SOLUÇÃO (apresentada por Gabriel Simon Schafascheck e Mateus Souza Oliveira, alunos de graduação do curso de Matemática - Licenciatura da UFSC)

- (a) Seja x um número inteiro maior que 1 (a explicação desta escolha está na observação feita ao final da resolução deste item), tal que não existe y inteiro tal que $y^2 = x$, ou seja, x não é um quadrado perfeito. Queremos mostrar que \sqrt{x} é irracional. Para tanto, usaremos a estratégia de suposição por absurdo que consiste em traçar nosso “caminho” a partir de uma falsa hipótese e chegar a uma contradição.

Suponhamos que \sqrt{x} seja racional. Ora, então existem $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$ tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$ (ou seja, a e b são relativamente primos), de forma que

$$\sqrt{x} = \frac{a}{b}. \quad (1)$$

Da equação (1), obtemos que

$$x = \frac{a^2}{b^2}. \quad (2)$$

E da equação (2) temos dois casos a considerar:

- caso 1: $b^2 = 1$, que nos leva a um absurdo, já que neste caso da equação (2) temos

$$x = a^2,$$

contrariando a hipótese de x não ser um quadrado perfeito;

- caso 2: $b^2 > 1$, outro absurdo, pois como x é inteiro, b^2 deve dividir a^2 , o que não ocorre, pois já que $\text{mdc}(a, b) = 1$ temos $\text{mdc}(a^2, b^2) = 1$.

Portanto, \sqrt{x} é irracional.

Observação: Tomamos x maior que 1 no começo de nossa argumentação pois

$$0^2 = 0 \qquad e \qquad 1^2 = 1,$$

ou seja, 1 e 0 são quadrados perfeitos. Em particular, eles são os únicos números reais tais que elevados a um natural n , não nulo, resultam neles mesmos. Esta característica é chamada *idempotência*. Assim, 0 e 1 são idempotentes.

- (b) Novamente vamos usar a estratégia de suposição por absurdo. Tome x e y inteiros maiores que 1 tais que x nem y são quadrados perfeitos. Suponha que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ seja racional. Então, usando o fato de a diferença de um racional e um irracional consistir em um número irracional, temos que

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \tag{3}$$

pertence ao conjunto dos números irracionais. Observe que usamos o item (a) e o fato de que o produto de um racional (não nulo) e um irracional ser um número irracional para obtermos que $2 \cdot \sqrt{y}$ é irracional.

Ora, novamente temos que dividir em dois casos:

- caso 1: $x = y$. Da equação (3) temos que

$$\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0,$$

o que é um absurdo, já que 0 é um número racional;

- caso 2: $x \neq y$. Multipliquemos a equação (3) pelo seu conjugado, obtendo assim

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y. \tag{4}$$

Note que o resultado da equação (4) é um número irracional, já que da equação (3) temos que $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ é irracional e $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ é racional, pela nossa hipótese de absurdo, o que gera uma contradição pois tanto x quanto y são inteiros então sua diferença também é um número inteiro.

Portanto, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ é irracional.

Observação: Note que a soma ou o produto de dois irracionais quaisquer não é sempre um número irracional. Por exemplo, se tomarmos x pertencente aos irracionais temos que $-x$ e $\frac{1}{x}$ também são, porém

$$x + (-x) = 0 \qquad e \qquad x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$



Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão um exemplar da mesma (Veja "Informações Gerais").

1. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)*

Considere uma sequência numérica $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, em que os seus primeiros termos são

$$-1, -4, -8, -13, -19, -26, \dots,$$

e sempre que tomarmos três termos consecutivos, digamos x_{n-1} , x_n e x_{n+1} , temos que a diferença entre x_n e x_{n+1} é uma unidade a mais que a diferença entre x_{n-1} e x_n .

Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos que:

(a) $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = -1$;

(b) $x_n = \frac{2 - 3n - n^2}{2}$.

2. *(Proposto pelo Professor José Luiz Rosas Pinho, tutor do PET Matemática)*

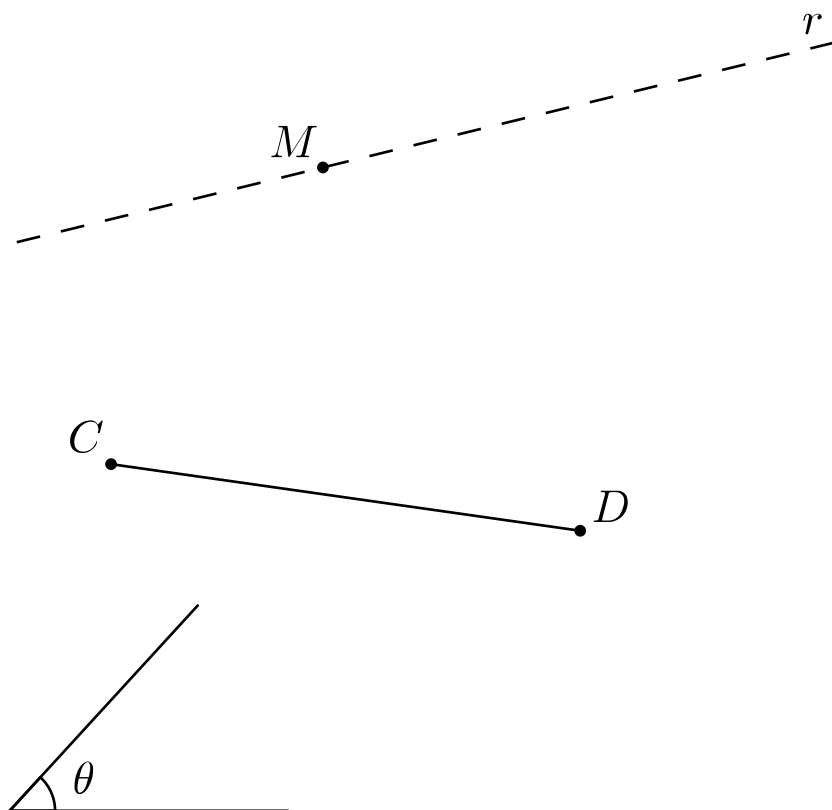
Seja ABC um triângulo inscrito em uma circunferência fixada. Fixando o lado BC do triângulo e variando o vértice A na circunferência, argumente quais as curvas (lugares geométricos) que os seguintes pontos descrevem:

- (i) Baricentro do triângulo;
- (ii) Incentro;
- (iii) Ortocentro;
- (iv) Centro da circunferência dos 9 pontos.

Observação: resolver o problema sem usar softwares de geometria dinâmica nem geometria analítica.

3. (Proposto pelo Professor José Luiz Rosas Pinho, tutor do PET Matemática)

Construir, com régua e compasso, um quadrilátero $CDEF$ sendo dados o lado CD , a reta suporte r do lado EF , o ponto médio M de EF e o ângulo θ entre os lados CF e DE , como na figura abaixo:





Premiados da ORM/SC em Outras Olimpíadas de Matemática

Premiados da ORM/SC em Outras Olimpíadas de Matemática

Airton José Schmitt Junior - Biguaçu

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 3)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 3)

Medalha de Prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Amadeo Zimmermann - São Pedro de Alcântara

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Prata na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Ana Carolina de Medeiros da Silva - Joinville

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Ana Cláudia Zezulka Machado - Florianópolis

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 1)

Medalha de Prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 1)

Anderson Negreli - São Bento do Sul

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Prata na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

André Victória Matias - Criciúma

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Bruno da Silveira Dias - Florianópolis

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Bruno Leonardo Schneider - São José

Medalha de Bronze na I Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1998 (Nível 1)

Medalha de Prata na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)

Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Menção Honrosa na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Menção Honrosa na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002

(Nível 3)

Medalha de Prata na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Bruno Mota - Joinville

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Bruno Nunes - Joinville

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Bruno Visnadi da Luz - Florianópolis

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Menção Honrosa na XXXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2015 (Nível 3)

Carlos Bruno Medeiros da Costa Pereira Neto - Joinville

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Carlos Eduardo dos Santos Feliciano - Cocal Do Sul

Menção Honrosa na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 1)

Caroline da Silveira - Joinville

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Cristine Buettgen - Pomerode

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Cristine Dominico - Antônio Carlos

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

Douglas Ohf - Joinville

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 3)

Menção Honrosa na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Eduardo Adelano Agostini Pasold - Timbó

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Eduardo José Mendes - Biguaçu

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Eduardo Lennert Rammé - Joinville

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2011 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

Elisangela Dornelles - Massaranduba

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

Enzo Jardim Vendramin - Florianópolis

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 1)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2015 (Nível 1)

Felipe Paupitz Schlichting - Florianópolis

Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)

Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Fernanda Momm Antunes - Joinville

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Fernando Luiz Alves Lapa - Joinville

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

Gabriel Augusto Moreira - Joinville

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Gabriel Machado - Massaranduba

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Gabriel Savi - Cocal Do Sul

Medalha de Ouro na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 1)

Gabriella Maria Radke Chaves - Joinville

Medalha de Bronze na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Gislaine Hoffmann - Antônio Carlos

Medalha de Prata na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2005 (Nível 1)

Medalha de Prata na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Giuliano Boava - Criciúma

Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 3)

Medalha de Prata na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 3)

Menção Honrosa na III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2000

Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2001

Menção Honrosa na IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2001

Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2002

Menção Honrosa na V Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2002

Medalha de Bronze na XXV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2003

Medalha de Bronze (Third Prize) na X Internacional Mathematical Competition for University Students em 2003 - Cluj-Napoca, Romênia

Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2004

Guilherme Rohden Echelmeier - Itajaí

Medalha de Prata na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)

Medalha de Ouro na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)

Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)

Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 2)

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)

Guilherme Weber Menon - Joinville

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Gustavo Bernardo de Oliveira - Joinville

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Gustavo Lisboa Empinotti - Florianópolis

Medalha de Prata na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)

Medalha de Ouro na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Medalha de Prata na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na 13ª Olimpíada de Maio em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XIX Olimpíada de Matemática do Cone Sul em 2008 - Temuco, Chile

Medalha de Prata na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na LI Olimpíada Internacional de Matemática em 2010 - Astana, Cazaquistão

Medalha de Bronze na III Romanian Master in Mathematics em 2010

Medalha de Bronze na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2010

Medalha de Prata na 25ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2010 - Assunção, Paraguai

Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na IV Romanian Master in Mathematics em 2011

Medalha de Prata na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2011

Medalha de Bronze na LII Olimpíada Internacional de Matemática em 2011 - Amsterdã, Holanda

Hanna Kurihara e Silva - Florianópolis

Medalha de Bronze na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)

Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)

Medalha de Bronze na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)

Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Helena Carolina Rengel Koch - Jaraguá do Sul

Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Heloisa Rosá Panini - Timbó

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

Ivani Ivanova Ivanova - Blumenau

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Prata na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Janine Garcia - São Francisco do Sul

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Jaqueline Wenk - Massaranduba

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

João Marcos Carnieletto Nicolodi - Florianópolis

Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 1)

Medalha de Ouro na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Julia Almeida Oliveira - Joaçaba

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Júlia Bertelli - Joinville

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 1)

Medalha de Prata na 17ª Olimpíada de Maio em 2011 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Julia Heck Deters - Itapiranga

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

Karina Livramento dos Santos - Navegantes

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Katarine Emanuela Klitzke - Timbó

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 2)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 2)

Medalha de Prata na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

Laiane Freitas Suzart - Joinville

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Leandro Augusto Lichtenfelz - Blumenau

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em

2008

Medalha de Prata (Second Prize) na XVI Internacional Mathematical Competition for University Students em 2009 - Budapeste, Hungria

Leandro Jun Kimura - Joinville

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Leandro Roza Livramento - Florianópolis

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Leonard Henrrik Wodtke - Joinville

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Leonardo Gonçalves Fischer - Fraiburgo

Medalha de Bronze na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)

Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Leonardo Lennert Rammé - Joinville

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Letícia Perini - Timbó

Menção Honrosa na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2006 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Lorenzo Andreus - Blumenau

Medalha de Ouro na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XXXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2014 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XXXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2015 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Lucas Bruno Barbosa Sandoval - Florianópolis

Medalha de Ouro na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 2)

Medalha de Bronze na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 3)

Lucas Gabriel Kruttsch - Massaranduba

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 1)

Lucas Lolli Savi - Florianópolis

Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 2)
Medalha de Bronze na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)

Lucas Westfal - Cocal Do Sul

Medalha de Bronze na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)
Menção Honrosa na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 1)
Medalha de Prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 1)

Luis Fernando Momm Antunes - Joinville

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Luiz Fernando Bossa - Brusque

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na XXXV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2013 (Nível Universitário)

Mateus Spezia - Blumenau

Medalha de Prata na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 3)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Mikhail Zimmer Heidrich - Lages

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Murilo Schoffen Prado - Florianópolis

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2014 (Nível 1)

Natália Deyse Koch - Chapecó

Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Natan Cardozo Leal - São Bento do Sul

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)

Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)

Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 3)

Medalha de Prata na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2008 (Nível 3)

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Nicole Braga de Medeiros Nicolak - Joinville

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Rafael Della Giustina Basilone Leite - Florianópolis

Medalha de Ouro na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2012 (Nível 1)

Medalha de Prata na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 2)

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 2)

Menção Honrosa na XXXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2014 (Nível 2)

Renan Henrique Finder - Joinville

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)

Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Medalha de Prata na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)

Menção Honrosa na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 2)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 2)

Medalha de Prata na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XVIII Olimpíada de Matemática do Cone sul em 2007 - Uruguai

Medalha de Prata na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)

Medalha de Prata na 23ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2008 - Brasil

Medalha de Prata na 49ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2008 - Madri, Espanha

Medalha de Prata na 50ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2009 - Bremen, Alemanha

Medalha de Ouro na 24ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2009 - Santiago de Querétaro, México

Medalha de Ouro na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2010

Medalha de Ouro na XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2011

Medalha de Ouro (First Prize) na XVIII International Mathematics Competition for University Students em 2011

Medalha de Prata na III Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática em 2011 - Quito, Equador

Medalha de Ouro (First Prize) na XIX Internacional Mathematical Competition for University Students em 2012 - Blagoevgrad, Bulgária

Medalha de Ouro na IV Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática em 2012 - Guanajuato, México

Ricardo Gonçalves Marques Junior - Joinville

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

em 2015 (Nível 3)

Medalha de Prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 3)

Rodrigo Vicente Cercal - Joinville

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

Rogério Hannemann Júnior - Joinville

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Ruan Victor Soares da Silva - Joinville

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Sandro Roberto Pauli Junior - Antônio Carlos

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 2)

Medalha de Prata na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Prata na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

Shadi Bavar - Blumenau

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Sidnei Rodrigo Dos Santos - Jaraguá do Sul

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Medalha de Prata na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 3)

Simon Joel Warkentin - Joinville

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

Thais Jandre - Pomerode

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 1)

Thiago Roberto Kuchenbecker Leu - Massaranduba

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2015 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2015 (Nível 2)

Tiago Madeira - Itajaí

Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 1)

Medalha de Bronze na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada de Maio em 2003 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 2)

Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada de Maio em 2005 (Nível 2)

Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)

Medalha de Prata na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)

Vitor Costa Fabris - Criciúma

Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)

Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)

Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Vitor Probst Curtarelli - Timbó

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Prata na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)



Informações Gerais

Envio de Problemas e Soluções

As seções de problemas propostos e soluções são seções dinâmicas. Contribua propondo problemas ou enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário. Porém, podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pelo comitê editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o \LaTeX , então o artigo deverá ser preferencialmente submetido neste formato.

Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas, tanto a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) quanto a ORM/SC, devem cadastrar suas escolas. O cadastramento para a OBM e ORM/SC é feito somente no site da OBM (www.obm.org.br). Escolas já cadastradas em anos anteriores deverão confirmar a cada novo ano a sua inscrição. Para o cadastramento será necessário o código do Inep da escola. Existe um período para cadastramento ou confirmação, consulte o site da OBM. No site não aparece a opção para cadastramento na ORM/SC. As escolas cadastradas para a OBM estarão automaticamente cadastradas para a ORM/SC. No cadastramento deve ser indicado o nome de apenas um dos seguintes coordenadores regionais: José Luiz Rosas Pinho ou Lício Hernanes Bezerra.

Alunos interessados em participar das olimpíadas devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

Como Adquirir a Revista

A partir deste ano, infelizmente, a revista não será mais enviada às escolas do estado de Santa Catarina, devido a cortes feitos no orçamento do projeto. No entanto, as escolas que desejarem um exemplar da revista podem solicitar o envio da mesma, desde que o custo do envio seja pago pelo solicitante.

No entanto, continuaremos a enviar um exemplar da revista às universidades federais brasileiras (um exemplar por IES), por intermédio da Biblioteca Universitária da UFSC.

Além disso, no site da ORM/SC (www.orm.mtm.ufsc.br), você pode visualizar cada um dos 14 exemplares da revista da ORM/SC. Caso tenha interesse em adquirir um de nossos exemplares, você pode fazer isto no PET Matemática da UFSC.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

- nosso site: www.orm.mtm.ufsc.br;
- telefone/Fax: (48) 37214595 (PET Matemática);
- e-mail: orm@pet.mtm.ufsc.br;
- endereço: PET Matemática

Departamento de Matemática - CFM
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Universitário - Trindade
88040-900 – Florianópolis/SC.