



# Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

Nº13, 2016



## **UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**Reitora:** Roselane Neckel

**Vice-Reitora:** Lúcia Helena Pacheco

## **PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO - PROEX**

**Pró-Reitor:** Edison da Rosa

**Pró-Reitora Adjunta:** Maristela Helena Zimmer Bortolini

## **PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD**

**Pró-Reitor:** Julian Borba

**Pró-Reitor Adjunto:** Rogério Luiz de Souza

## **CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM**

**Diretor:** Valdir Rosa Correia

**Vice-Diretor:** Lício Hernanes Bezerra

## **DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**Chefe:** Aldrovando Luís Azeredo Araújo

**Sub-Chefe:** Matheus Cheque Bortolan

**Apoio:**

**CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico**

**SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM**

## **CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina/  
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências  
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],  
2004 -

v.: 12 (2015) 23 cm

Anual  
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas,  
Exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de  
Ciências Físicas e Matemáticas.

## **Comissão da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:**

**Coordenador da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:** Alda Dayana Mattos Mortari.

**Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:** José Luiz Rosas Pinho.

**Professores:** Alda Dayana Mattos Mortari, Carmem Suzane Comitre Gimenez, Danilo Royer, Eliezer Batista, Giuliano Boava, José Luiz Rosas Pinho, Leonardo Koller Sacht, Lício Hernanes Bezerra e Nereu Estanislau Burin.

**Bolsistas da Olimpíada:** Crislaine Botelho Costa.

**Bolsistas do PET Matemática:** André Borges Carlos, Ben-Hur Eidt, Bruna da Silva Donadel, Carlos Eduardo Caldeira, Gabriel Simon Schafaschek, Gabriela Jacoby Rodrigues, Helena Carolina Rengel Koch, Isabele Sartor, Jean Carlo Gengnagel, Luis Eduardo Fritsch, Mateus Souza Oliveira, Miguel Bauschat, Priscilla Sayuri Saito de Oliveira, Sabrina de Moraes Vigano e Sidinei Lindomar da Rocha Júnior.

**Alunos colaboradores:** Daniella Losso da Costa, Douglas Manoel Guimarães, Leandro Corrêa e Paulo Victor Palla Ferrato.

## **Comitê Editorial da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:**

Alda Dayana Mattos Mortari

André Borges Carlos

Carmem Suzane Comitre Gimenez

Danilo Royer

Eliezer Batista

Giuliano Boava

Helena Carolina Rengel Koch

José Luiz Rosas Pinho

Leonardo Koller Sacht

Lício Hernanes Bezerra

Mateus Souza Oliveira

Nereu Estanislau Burin

Priscilla Sayuri Saito de Oliveira

Sidinei Lindomar da Rocha Júnior

## **Editoração Eletrônica:**

Alda Dayana Mattos

Mateus Souza Oliveira

Rodrigo Maciel Rosa

Sidinei Lindomar da Rocha Junior

## **Tiragem:**

1500 exemplares

## **Arte da Capa:**

Rafaela Goulart de Andrade

Renata Leandro Becker

## **Postagem:**

Segundo semestre de 2015.

**Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina Nº 13, 2016**

**ISSN 1679-7612**



# Sumário

<b>Apresentação</b>	<b>9</b>
---------------------	----------

<b>XVII ORM (2014)</b>	<b>11</b>
------------------------	-----------

XVII ORM em Números . . . . .	13
Premiados . . . . .	15
Nível 1 . . . . .	15
Nível 2 . . . . .	16
Nível 3 . . . . .	17
Escolas Participantes . . . . .	18
Provas e Gabaritos . . . . .	21
Prova Nível 1 . . . . .	21
Prova Nível 2 . . . . .	23
Prova Nível 3 . . . . .	26
Gabarito Nível 1 . . . . .	27
Gabarito Nível 2 . . . . .	32
Gabarito Nível 3 . . . . .	38

<b>IV ORMM (2014)</b>	<b>45</b>
-----------------------	-----------

IV ORMM em Números . . . . .	47
Prova . . . . .	49
Gabarito . . . . .	51

<b>Artigos</b>	<b>53</b>
----------------	-----------

<b>Perguntas sobre o número zero</b>	
Júlio César dos Reis	55

<b>Pitágoras ao quadrado</b>	
Eduardo Sabel e Leonardo de Liz Brockveld	62

<b>O problema dos pontos e o início da Teoria da Probabilidade</b>	
Aishameriane Venes Schmidt e Gilles Gonçalves de Castro	81

<b>Curiosidades</b>	<b>89</b>
<b>Soluções dos Problemas Propostos</b>	<b>93</b>
<b>Problemas Propostos</b>	<b>97</b>
<b>Premiados da ORM em Olimpíadas de Matemática</b>	<b>103</b>
<b>Informações Gerais</b>	<b>131</b>
Envio de Problemas e Soluções . . . . .	133
Envio de Artigos . . . . .	133
Cadastramento . . . . .	133
Como adquirir a revista . . . . .	134
Erramos . . . . .	134
Fale Conosco . . . . .	135





---

## Apresentação

A *Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina* é o resultado de um projeto de extensão da UFSC e uma atividade de extensão do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática (SESu/MEC) da UFSC. Participam ainda do projeto nove professores do Departamento de Matemática da UFSC. O 13º número da Revista foi financiado com recursos da Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada- IMPA, na forma de um auxílio financeiro para um evento da *Olimpíada Brasileira de Matemática*. A Revista é um projeto independente de outro projeto de extensão da UFSC, a *Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM)*, que contou com a participação de uma bolsista de extensão do programa PROBOL-SAS, da Pró-Reitoria de Extensão (PROEX) e de alunos voluntários. A ORM faz parte do projeto *Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática / Olimpíada Brasileira de Matemática (MCTI/CNPq/MEC/CAPES/FNDE)*.

O principal objetivo da Revista é divulgar a ORM em todo o estado de Santa Catarina através de sua distribuição gratuita a cerca de 1000 escolas públicas e particulares, às Secretarias de Educação de todos os municípios do estado e a todas as Gerências de Educação do estado. Além disso, a Revista é enviada a cerca de 60 IES públicas através do programa de divulgação da Biblioteca Universitária da UFSC. A Revista divulga ainda a *Olimpíada Regional Mirim de Matemática (ORMM)*, outro projeto de extensão da UFSC e também uma atividade de extensão do PET Matemática, que está direcionada para os alunos do 5º ano do ensino fundamental de algumas escolas de Santa Catarina.

Como sempre, encorajamos todos os leitores a enviar problemas para a seção “Problemas propostos” e soluções dos problemas daquela seção propostos em números anteriores. Artigos serão bem recebidos e publicados desde que sejam aprovados pelo Comitê Editorial da Revista.

Florianópolis, 28 de novembro de 2015.

Alda Dayana Mattos Mortari

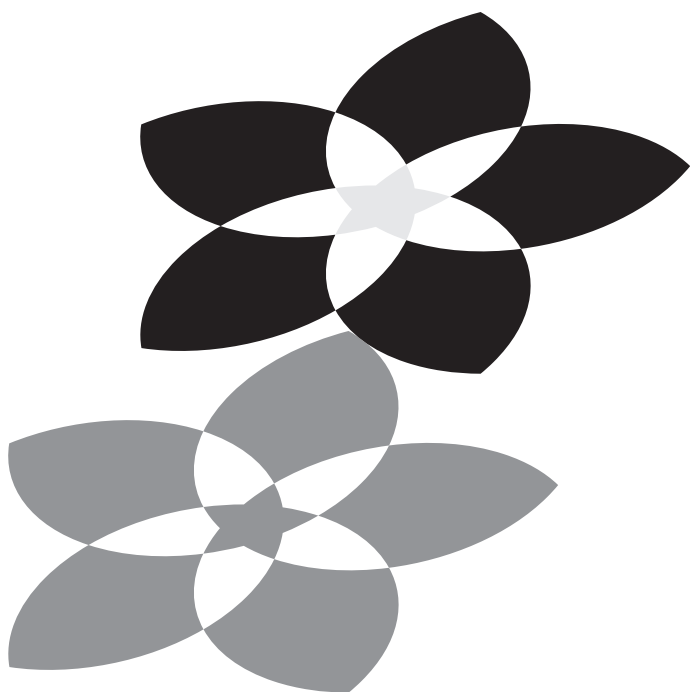
Coordenadora da Revista da ORM/SC

José Luiz Rosas Pinho

Tutor do PET Matemática da UFSC

Coordenador da ORM/SC





**XVII ORM (2014)**

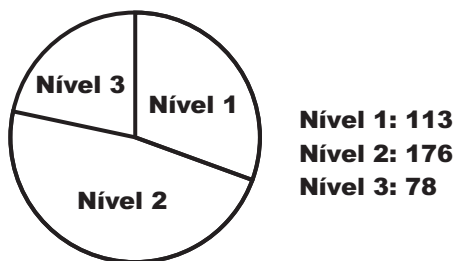
---



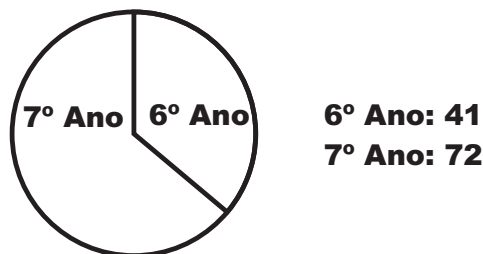
## XVII ORM em Números

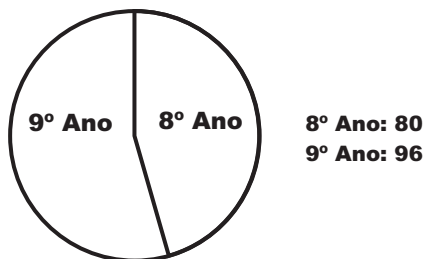
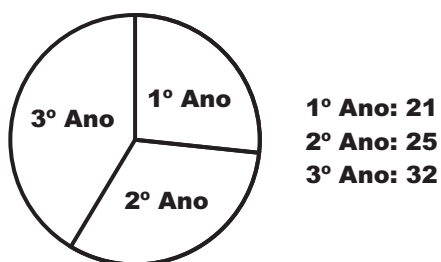
Na primeira fase da XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina participaram 9672 alunos de ensino fundamental e médio, oriundos de 102 escolas públicas e particulares de 43 municípios do estado. Deste total, foram classificados 696 alunos para a segunda fase, dos quais 367 compareceram para realizar a prova, cujas distribuições por níveis e anos são mostradas abaixo.

### Total de alunos participantes da segunda fase, separados por níveis



### Nível 1



**Nível 2****Nível 3**

## Premiados

A cerimônia de Premiação da XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina ocorreu no dia 29 de novembro de 2014, no Centro de Cultura e Eventos da Universidade Federal de Santa Catarina e contou com a presença das seguintes autoridades: Tereza Cristina Rozone de Souza, diretora do Departamento de Ensino, Licio Hernanes Bezerra, Diretor em exercício do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Maristela Helena Zimmer Bortolini, Pró-Reitora Adjunta de Extensão, Aldrovando Luis Azeredo Araujo, Subchefe do Departamento de Matemática, Silvia Martini de Holanda Janesch, Coordenadora do Curso de Matemática, Crislaine Botelho Costa, bolsista de extensão da ORM, Daniella Losso da Costa, bolsista de extensão do PET Matemática, Carmem Suzane Comitre Gimenez e José Luiz Rosas Pinho, professores do Departamento de Matemática responsáveis pela olimpíada.

Na cerimônia, foram premiados 34 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 7% dos alunos que participaram da segunda fase): 3 com medalhas de ouro, 5 com medalhas de prata, 11 com medalhas de bronze e 15 com menções honrosas.

### Prêmio William Glenn Whitley<sup>1</sup>

- Ana Luiza Coelho Demétrio (Florianópolis)

### Nível 1

#### Ouro

- Ana Luiza Coelho Demétrio (Florianópolis)

#### Prata

- Ana Cláudia Zezulka (Florianópolis)
- Enzo Jardim Vendramin (Florianópolis)
- Murilo Schoffen Prado (Florianópolis)

---

<sup>1</sup>O prêmio é destinado ao aluno com a maior pontuação na Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina. Esta é uma homenagem ao professor William Glenn Whitley (ver revista da ORM nº 4) e começou a ser entregue no ano de 2006.

**Bronze**

- Alexandra Luiza Sartorreto Matte (Florianópolis)
- Artur Lúcio Dos Santos (Joinville)
- Eduardo Masselli (Florianópolis)
- Enthony Antunes Negrello (Joinville)
- Felipe Jeremias Durão (Florianópolis)
- Martin Baraldi Lobe (Blumenau)

**Menção Honrosa**

- Ana Paula Nunes Pires Lopes (Florianópolis)
- Bruno Joukoski (Florianópolis)
- Camila Canary de Felipe (São José)
- Francisco Bustos Ortigara (Florianópolis)
- Kevin Luis Stein (Joinville)
- Pietro Francisco Testoni (São José)
- Tales André Rovaris Machado (Florianópolis)

**Nível 2****Ouro**

- Lorenzo Andreus (Blumenau)

**Prata**

- Rafael Della Giustina Basilone Leite (Florianópolis)

**Bronze**

- Eduardo Gomes Bonilha Gonçalves (Florianópolis)
- Rina Chen Carvalho (Florianópolis)



**Menção Honrosa**

- Ana Carla Costa Da Silva (Itajaí)
- Katarine Emanuela Klitzke (Timbó)
- Mateus Israel Silva (Florianópolis)
- Victor Mosimann Duarte (Florianópolis)

**Nível 3****Ouro**

- Thiago Da Silva Pinto (São José)

**Prata**

- Mateus Spezia (Itajaí)

**Bronze**

- Airton José Schmitt Junior (Florianópolis)
- Antônio Jeronimo Botelho (Tubarão)
- Davi Gustavo Lisboa Girardi (Florianópolis)

**Menção Honrosa**

- Fernando Luiz Alves Lapa (Joinville)
- Guilherme Maziero Volpato (Florianópolis)
- Homero César De Campos (Balneário Camboriú)
- Vitor Probst Curtarelli (Timbó)

## Escolas Participantes

Centro de Educação de Jovens e Adultos Vereadora Rita Quadros (São João do Sul); Centro de Educação Nossa Senhora da Conceição (Florianópolis); Centro de Educação Oficina dos Sonhos (Joinville); Centro Educacional Céu Azul (Porto União); Centro Educacional Cruz e Souza (Florianópolis); Centro Educacional Cruz e Souza (Lages); Centro Educacional Estimoarte (Florianópolis); Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis); Centro Educacional Nossa Senhora de Fátima (Pomerode); Centro Educacional Paulo Neves Freire (São José); Centro Educacional Pedro dos Santos (Rio do Sul); Centro Educacional Roberto Machado (Rio do Sul); Colégio Agrícola de Camboriú (Camboriú); Colégio Alto Vale (Rio do Sul); Colégio Antônio Peixoto (Florianópolis); Colégio Bom Jesus Coração de Jesus (Florianópolis); Colégio Bom Jesus Diocesano (Lages); Colégio Bom Jesus Divina Providência (Jaraguá do sul); Colégio Bom Jesus Santo Antônio (Blumenau); Colégio Catariense (Florianópolis); Colégio CEB (São José); Colégio Cenecista José Elias Moreira (Joinville); Colégio Cenecista Marcos Olsen (Caçador); Colégio Cenecista São José (Rio Negrinho); Colégio da Lagoa (Florianópolis); Colégio da Univille (Joinville); Colégio de Aplicação da UFSC (Florianópolis); Colégio de Aplicação da UNESC (Criciúma); Colégio de Aplicação da Univali (Balneário Camboriú); Colégio Dehon (Tubarão); Colégio Dom Bosco (Rio do Sul); Colégio Dom Jaime Câmara (São José); Colégio dos Santos Anjos (Joinville); Colégio Elisa Andreoli (São José); Colégio Espaço (Braço do Norte); Colégio Evangélico Jaraguá (Jaraguá do Sul); Colégio Geração (Florianópolis); Colégio Harmonia (Ibirama); Colégio Incentivo (Biguaçu); Colégio Jardim Anchieta (Florianópolis); Colégio Luterano Santíssima Trindade (Catanduvas); Colégio Marista (Criciúma); Colégio Maximiliano Gaidzinski (Cocal do Sul); Colégio Sagrada Família (Blumenau); Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí); Colégio Santa Catarina (Florianópolis); Colégio Santa Rosa de Lima (Lages); Colégio Santíssima Trindade (Joaçaba); Colégio São Bento (Criciúma); Colégio São José (Porto União); Colégio São José (Tubarão); Colégio São Luiz (Brusque); Colégio Servos de

Maria (Turvo); Colégio Sinergia (Navegantes); Colégio Sinodal Doutor Blumenau (Pomerode); Cooperativa Educacional de Imbituba (Imbituba); Escola Autonomia (Florianópolis); Escola Básica Municipal Dona Dilma Mafra (Bombinhas); Escola Básica Municipal Estação Luzerna (Herval D'Oeste); Escola Básica Municipal Manoel José da Silva (Bombinhas); Escola Básica Municipal Professor Roldão das Neves (Biguaçu); Escola Básica Ministro Pedro Aleixo (Massaranduba); Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis); Escola Educacional Técnica Satc (Criciúma); Escola Agrotécnica Federal de Sombrio (Santa Rosa do Sul); Escola Barão do Rio Branco (Blumenau); Escola de Educação Básica Adélia Cabral Varejão (Laguna); Escola de Educação Básica Altamiro Guimarães (Antônio Carlos); Escola de Educação Básica da Unidavi (Rio do Sul); Escola de Educação Básica Erwin Radtke (Blumenau); Escola de Educação Básica Padre Izidoro Benjamim Moro (Lindóia do Sul); Escola de Educação Básica Professora Maria da Glória Silva (Içara); Escola de Educação Básica Rubens de Arruda Ramos (Criciúma); Escola de Educação Básica Santa Teresinha (Curitibanos); Escola de Educação Básica Willy Hering (Rio do Sul); Escola de Ensino Fundamental Cristo Rei (Cocal do Sul); Escola de Ensino Fundamental Demétrio Bettiol (Cocal do Sul); Escola de Ensino Fundamental Padre Reinaldo Stein (Anchieta); Escola de Ensino Fundamental Professor Tercílio Bastos (Major Gercino); Escola de Primeiro Grau Padre Celestin Freinet (Blumenau); Escola Dinâmica (Florianópolis); Escola Internacional de Florianópolis (Florianópolis); Escola Internacional Sociedade Educacional de Santa Catarina (Florianópolis); Escola Internacional Tupy (Joinville); Escola Municipal Bairro Antena (Caxambu do Sul); Escola Municipal de Educação Infantil e Ensino Fundamental Ludovico Coccolo (Criciúma); Escola Municipal de Ensino Fundamental Anna Towe Nagel (Jaraguá do Sul); Escola Municipal de Ensino Fundamental Padre Mathias Maria Stein (Guaramirim); Escola Municipal Erwin Prade (Timbó); Escola Municipal Governador Pedro Ivo Campos (Joinville); Escola Municipal Padre Martinho Stein (Timbó); Escola Municipal Professora Elsir Bernadete Gaya Muller (Navegantes); Escola Municipal Pro-

fessora Maria Hostim da Costa (Navegantes); **E**scola Municipal Tancredo de Almeida Neves (Praia Grande); **E**scola Municipal Tomaz Francisco Garcia (Balneário Camboriú); **E**scola Técnica de Comércio de Tubarão (Tubarão); **E**scola Técnica do Vale do Itajaí (Blumenau); **I**nstituto Federal de Educação de Santa Catarina (Florianópolis); **I**nstituto Federal de Santa Catarina - Campus Gaspar (Gaspar); **K**umon - Joaçaba (Joaçaba); **S**enai São José (São José); **S**ociedade Educacional Posiville (Joinville).

## Provas e Gabaritos

### Prova Nível 1

1. Em 2014, a fábrica de chocolates Chocomática produziu 24570 ovos de Páscoa. Sabe-se que:
  - (a) A Chocomática iniciou sua produção no dia primeiro de janeiro de 2014 (em uma quarta-feira) e encerrou no dia 19 de abril de 2014 (em um sábado, um dia antes da Páscoa);
  - (b) A Chocomática ficou fechada no mês de fevereiro e não funcionou aos domingos. Em cada um dos outros dias (incluindo feriados), a Chocomática produziu o mesmo número de ovos.

Quantos ovos a Chocomática produziu em um dia de funcionamento?

2. Em um reino distante, o rei KAN decidiu atribuir um código a cada funcionário do reino. A construção dos códigos obedece as seguintes regras:
  - (a) Os códigos são formados pelos símbolos K, A, N, 2 e 3 e cada código pode ter de um a seis símbolos;
  - (b) Em um código, podem existir números repetidos, mas não podem existir letras repetidas;
  - (c) Em um código, o primeiro símbolo deve ser uma letra e as letras que figuram no código devem seguir a ordem do nome do rei: K, A e N;
  - (d) Em um código, dois números não podem aparecer lado a lado.

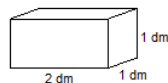
Por exemplo, K2N2 é um código permitido, mas N3A não é permitido. Ao distribuir os códigos, o rei percebeu que três funcionários ficaram sem código. Qual é o número de funcionários do reino?

3. Um número natural  $n$  é *quase primo* se existem números primos  $p$  e  $q$  de modo que  $n = p \cdot q$ , isto é,  $n$  é o produto de dois números primos. Quantos são os números quase primos de 1 a 50?
4. Pedro, João e André possuem, cada um, uma certa quantidade de balas. André diz: “Se eu der  $\frac{1}{3}$  das minhas balas para Pedro, todos nós ficamos com a mesma quantidade de balas.”

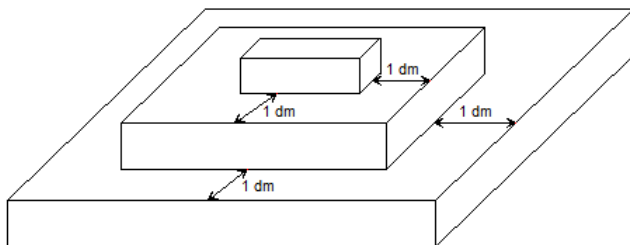
João diz: “Já eu, se der  $\frac{1}{3}$  das minhas balas para Pedro, ele ficará com 2 balas a mais do que eu.”

Quantas balas possui cada um?

5. O arquiteto asteca Toatl constrói pirâmides com tijolos. Cada tijolo tem dimensões  $2\text{ dm}$ ,  $1\text{ dm}$  e  $1\text{ dm}$ , como mostra a figura ao lado.



Em uma pirâmide, cada andar tem base quadrada e  $1\text{ dm}$  de altura. Além disso, a distância entre as bordas de dois andares consecutivos é de  $1\text{ dm}$ , como mostra a figura abaixo.

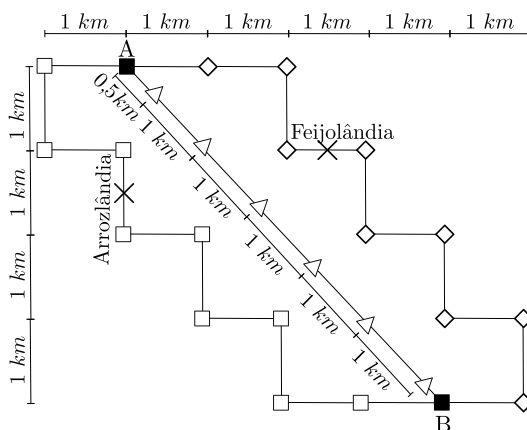


Responda as perguntas abaixo.

- (a) Quantos tijolos possui a pirâmide de 3 andares construída por Toatl, sabendo que o andar superior possui o menor número possível de tijolos?
- (b) Se Toatl tem 125 tijolos e constrói a mais alta pirâmide com o mesmo formato, quantos tijolos sobram?

**Prova Nível 2**

- Encontre todos os conjuntos  $A$  que satisfazem, simultaneamente, as condições abaixo:
  - $A$  é um subconjunto dos números naturais;
  - $A$  possui cinco elementos;
  - Para quaisquer  $m, n \in A$ , não necessariamente distintos,  $m - n \in A$  ou  $n - m \in A$ .
- Mostre que 2014 não pode ser escrito como a diferença de dois quadrados de números naturais.
- Um caminhão deve partir da cidade  $A$  para transportar um carregamento de arroz e feijão para a cidade  $B$ . Partindo vazio de  $A$ , ele deve passar pela cidade de Arrozlândia para ser carregado de arroz e pela cidade de Feijolândia para ser carregado de feijão. As cidades  $A$  e  $B$  são ligadas por duas estradas com trechos horizontais e verticais e por uma estrada diagonal, conforme mapa abaixo. As estradas têm mão dupla (isto é, os veículos trafegam nos dois sentidos) e possuem pedágios onde o caminhoneiro deve pagar uma quantia em dinheiro para prosseguir. Os pedágios são indicados por  $\square$ ,  $\diamond$  e  $\triangle$  e o preço para passar nos pontos  $\square$  é de R\$ 8,00, nos pontos  $\diamond$  é de R\$ 9,00 e nos pontos  $\triangle$  é de R\$ 10,00.



- (a) Determine a rota na figura acima para que o caminhoneiro pague o menor valor possível de pedágios.
- (b) Imagine um outro mapa em que as cidades  $A$ , Arrozlândia e Feijolândia continuam nas mesmas posições do mapa acima, mas a altura do novo mapa é  $100\text{ km}$  em vez de  $4\text{ km}$ . Neste novo mapa, os padrões das estradas e dos pedágios se mantêm, ou seja, há duas estradas com trechos verticais e horizontais a cada  $1\text{ km}$  e uma estrada diagonal, todas as estradas com pedágios a cada  $1\text{ km}$  a partir de  $A$ . Neste novo mapa, qual rota deve ser tomada para se pagar o mínimo valor de pedágios?
- (c) A partir de qual valor de altura no mapa acima, a rota que você determinou em (b) é mais barata que a rota em (a)?
4. A reflexão da luz possui a propriedade de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido, conforme a figura 1. Dois espelhos formam entre si um ângulo  $\alpha$  e um raio de luz paralelo a um dos espelhos é refletido nos pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $N$  e  $A$ , conforme a figura 2. Calcule o ângulo  $\alpha$ .



Figura 1

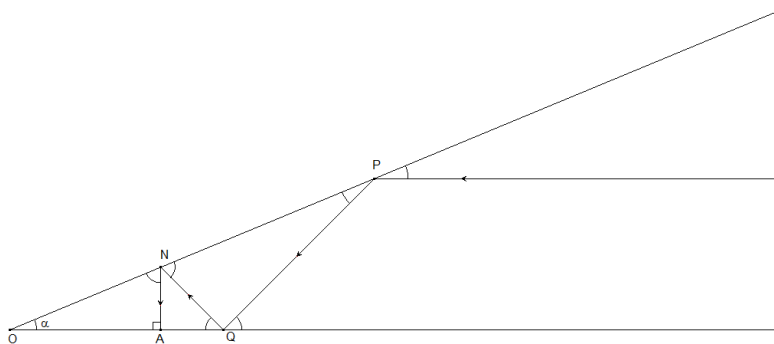


Figura 2



- 
5. (a) Encontre todos os números reais que podem ser escritos na forma  $\frac{x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$ , para algum número real  $x$ .
- (b) Encontre o maior valor inteiro da expressão do item (a).

**Prova Nível 3**

1. Para um dado inteiro positivo  $k$ , encontre todos os conjuntos  $A$  que satisfazem, simultaneamente, as condições abaixo:

- (i)  $A \subset \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $A$  possui  $k$  elementos;
- (iii) Para quaisquer  $m, n \in A$ , não necessariamente distintos,  $|m - n| \in A$ .

2. Calcule o valor mínimo da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 5.$$

3. Seja  $ABC$  um triângulo equilátero de lado 1. Divida o segmento  $AB$  em  $n$  partes iguais, nomeando os pontos da divisão de  $P_0 = A, P_1, \dots, P_n = B$ . Calcule o seno do ângulo  $\widehat{ACP_1}$ .
4. Mostre que 2014 não pode ser escrito como a diferença de dois cubos de números naturais.
5. Sejam  $ABC$  um triângulo e  $V$  um ponto qualquer sobre o lado  $AC$ . Sejam  $M_1, M_2, N_1, N_2, D_1$  e  $D_2$  os pontos médios dos segmentos  $AB, BC, AV, VC, BV$  e  $AC$ , respectivamente. Seja  $O$  o ponto de intersecção entre os segmentos  $M_1N_2$  e  $M_2N_1$ .
- (a) Mostre que  $D_1, O$  e  $D_2$  são colineares.
  - (b) Mostre que  $D_1O$  e  $OD_2$  possuem o mesmo comprimento.

**Gabarito Nível 1**

1. O número total de dias dos meses de Janeiro, Março e mais os 19 dias de Abril é igual a:

$$31 + 31 + 19 = 81.$$

Vamos contar os domingos de Janeiro, Março e Abril até o dia 19 (sábado):

Janeiro: dia 1 é uma quarta e dia 31 é uma sexta, então temos 4 domingos;

Fevereiro: não precisamos contar os domingos;

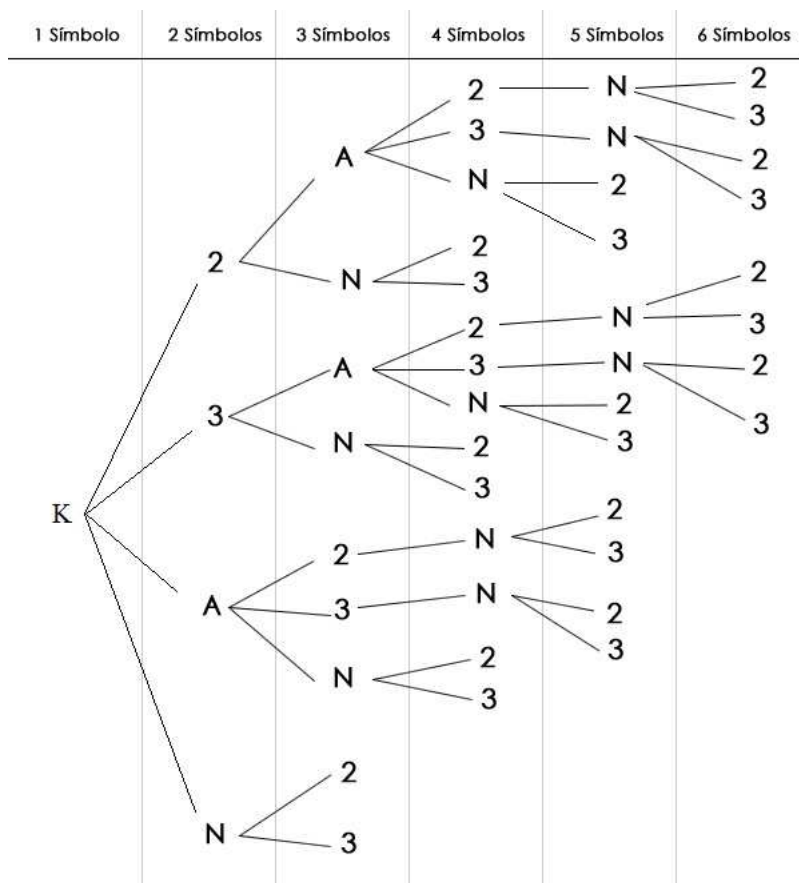
Março: dia 1 é uma sábado e dia 31 é uma segunda, então temos 5 domingos;

Abril: dia 1 é uma terça e dia 19 é um sábado, então temos 2 domingos.

No total são  $4 + 5 + 2 = 11$  Domingos naquele período.

Portanto, a Chocomática trabalhou  $81 - 11 = 70$  dias desde o dia 1 de Janeiro até 19 de Abril, e o número de ovos produzidos por dia foi  $\frac{24570}{70} = 351$ .

2. Vamos armar uma árvore com todos os possíveis códigos começando com a letra  $K$ :



Lembramos que um código pode ter de um a seis símbolos, então  $K$  é um código,  $K2$ ,  $K3$ ,  $KA$ ,  $KN$ ,  $K2A$ , etc, são códigos.

Portanto, temos  $1 + 4 + 9 + 14 + 12 + 8 = 48$  códigos começando com  $K$ .

Começando com  $A$  há 12 possíveis códigos.

Começando com  $N$  há 3 possíveis códigos.

Portanto, no total, há  $48 + 12 + 3 = 63$  códigos possíveis.

Como 3 funcionários ficaram sem códigos, então há  $63 + 3 = 66$  funcionários no reino.

3. Vamos examinar quais os fatores primos que podem aparecer em um número quase primo de 1 a 50: começando com 2 (o menor), podemos ir até 23 (o maior), pois  $2 \times 23 = 46 < 50$  e  $2 \times 29 = 58 > 50$ . Então os fatores são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 23.

Quase primos com o fator 2:  $2 \times 2$ ,  $2 \times 3$ ,  $2 \times 5$ ,  $2 \times 7$ ,  $2 \times 11$ ,  $2 \times 13$ ,  $2 \times 17$ ,  $2 \times 19$ , e  $2 \times 23$  (9 possibilidades).

Quase primos com o fator 3 (como menor):  $3 \times 3$ ,  $3 \times 5$ ,  $3 \times 7$ ,  $3 \times 11$ , e  $3 \times 13$  (5 possibilidades).

Quase primos com o fator 5 (como menor):  $5 \times 5$ ,  $5 \times 7$  (2 possibilidades).

Quase primos com o fator 7 (como o menor):  $7 \times 7$  (1 possibilidade).

E não há mais, pois  $11 \times 13 = 143 > 50$ .

Portanto, são  $9 + 5 + 2 + 1 = 17$  números quase primos de 1 a 50.

4. Se André desse  $\frac{1}{3}$  de suas balas para Pedro então ele, Pedro e João ficariam com a mesma quantidade de balas.

Isso significa que André ficaria com  $\frac{2}{3}$  de suas balas, e essa quantidade é a mesma com que Pedro ficaria, ou seja, a quantidade que ele tinha mais  $\frac{1}{3}$  da quantidade de balas que André tinha. Mas isso significa que a quantidade de balas que Pedro tinha originalmente é igual a  $\frac{1}{3}$  da quantidade de balas que André possuía originalmente. Isso também significa que a quantidade de balas que

João possuía é igual a  $\frac{2}{3}$  da quantidade de balas que André tinha originalmente.

Se João desse  $\frac{1}{3}$  de suas balas para Pedro, então Pedro ficaria com 2 balas a mais do que João.

Isso significa que João ficaria com  $\frac{2}{3}$  da quantidade original de balas que ele ti-

nha, ou seja,  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$  da quantidade de balas que André possuía originalmente,

e que Pedro ficaria com a sua quantidade original de balas mais  $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$  da

quantidade de balas que André tinha originalmente. Ou seja, Pedro ficaria com

$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$  da quantidade de balas que André tinha originalmente. A diferença

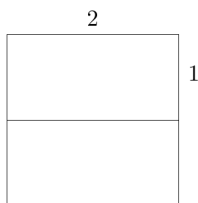
entre a quantidade de balas com que Pedro e João ficariam seria igual a 2, ou

seja,  $\frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$  da quantidade de balas que André tinha originalmente.

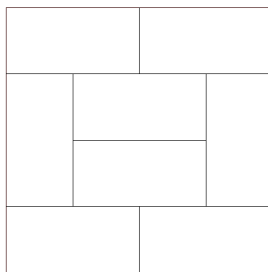
Logo, André tem  $2 \cdot 9 = 18$  balas, Pedro tem  $\frac{1}{3} \cdot 18 = 6$  balas e João tem

$\frac{2}{3} \cdot 18 = 12$  balas.

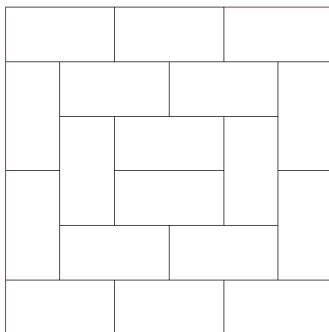
5. a) O andar de cima é quadrado com o menor número possível de tijolos. Portanto, ele é formado por dois tijolos (quadrado 2x2):



O andar abaixo desse, sendo quadrado e obedecendo a “margem” de 1 *dm*, só pode ser formado por 8 tijolos (Quadrado 4x4):



O andar abaixo desse deverá ter 18 tijolos (Quadrado 6x6).



Portanto, a pirâmide de 3 andares é formada por  $2 + 8 + 18 = 28$  tijolos.

b) Repare que o próximo andar abaixo seria um quadrado  $8 \times 8 = 64$ , ou seja, teria  $\frac{64}{2} = 32$  tijolos. Assim, com 4 andares, seriam necessários  $28 + 32 = 60$  tijolos. Um quinto andar abaixo exigiria  $\frac{10 \times 10}{2} = 50$  tijolos, e no total seriam  $10 + 50 = 110$  tijolos. Como o total tem 125 tijolos, ele construirá uma pirâmide de 5 andares, e sobrarão  $125 - 110 = 15$  tijolos.

## Gabarito Nível 2

1. Inicialmente, vemos que  $0 \in A$  pois, para todo  $n \in A$ ,  $0 = n - n \in A$ .

Seja  $A = \{0, m, n, p, q\}$  com  $0 < m < n < p < q$ . Então:

- (a) De  $n < p < q$ , temos  $n - m < p < q$ . Logo,  $n - m = 0$  ou  $n - m = m$ .  
 $n - m = 0$  implica em  $n = m$ , impossível.  $n - m = m$  nos dá **n=2m**  
 (note que  $n - m = n$  é impossível).
- (b) De  $p < q$ , temos  $p - m < p < q$ . Então:
  - ou  $p - m = 0$ , o que nos dá  $p = m$  (impossível);
  - ou  $p - m = m$ , o que nos dá  $p = 2m = n$  (impossível);
  - ou  $p - m = n = 2m$ , o que nos dá **p=3m**.
- (c) Temos  $q - m < q$ . Então:
  - ou  $q - m = 0$ , o que nos dá  $q = m$  (impossível);
  - ou  $q - m = m$ , o que nos dá  $q = 2m = n$  (impossível);
  - ou  $q - m = p = 3m$ , o que nos dá **q=4m**.

Portanto,  $A$  é um conjunto da forma

$$A = \{0, m, 2m, 3m, 4m\}.$$

2. Note que 2014 é igual a  $2 \cdot 19 \cdot 53$ . (Como  $2014 = 2 \cdot 1007$ , devemos analisar todos os fatores primos até  $32 < \sqrt{1007} < 34$ . Encontramos 19 como fator primo.)

Então, se  $a^2 - b^2 = 2014$ , teremos:

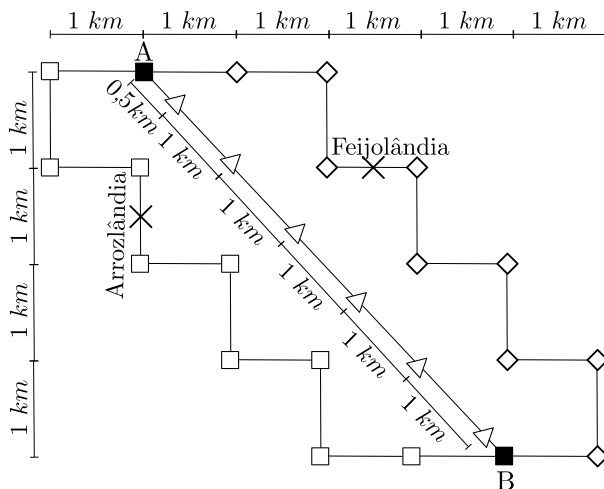
$$(a - b) \cdot (a + b) = 2 \cdot 19 \cdot 53$$

e, portanto,  $(a - b)$  e  $(a + b)$  são divisores de 2014.

Qualquer que seja a possibilidade para  $(a - b)$  e  $(a + b)$ , o fator 2 estará em um deles. Portanto ou  $(a - b)$  será par e  $(a + b)$  será ímpar, ou  $(a - b)$  será ímpar e  $(a + b)$  será par. Mas então  $(a - b) + (a + b) = 2a$  será ímpar, o que é impossível.



3. Considere o mapa:



Há três possíveis rotas “razoáveis”:

**Rota 1-** O caminhão sai de A, vai a *Feijolândia*, vai para *Arrozlândia* passando por A, e segue direto para B:

$$A \rightarrow \text{Feij.} \xrightarrow{(A)} \text{Arroz.} \rightarrow B.$$

**Rota 2-** O caminhão sai de A, vai a *Arrozlândia*, vai para *Feijolândia* passando por A, e segue direto para B:

$$A \rightarrow \text{Arroz.} \xrightarrow{(A)} \text{Feij.} \rightarrow B.$$

**Rota 3-** O caminhão sai de A, vai a *Feijolândia* (ou a *Arrozlândia* - tanto faz), vai a *Arrozlândia* (ou a *Feijolândia*), volta para A e vai direto para B.

a) Os custos em cada rota são:

**Rota 1:**  $[(3 \times 9) + (3 \times 9)] + (3 \times 8) + (6 \times 8) = 54 + 24 + 48 = 126$ ;

**Rota 2:**  $[(3 \times 8) + (3 \times 8)] + (3 \times 9) + (6 \times 9) = 48 + 27 + 54 = 129$ ;

**Rota 3:**  $(6 \times 9) + (6 \times 8) + (5 \times 10) = 54 + 48 + 50 = 152$ .

Portanto, a **Rota 1** é a mais barata.

**b)** O que muda neste caso, em relação ao caso (a), é que de *Arrozlândia* até *B* haverá  $(99 \times 2)$  pedágios, e o mesmo ocorrerá de *Feijolândia* direto até *B*. Por outro lado, de *A* direto até *B*, a diagonal medirá  $100\sqrt{2}km$ , e como

$$141 < 100\sqrt{2} < 142,$$

haverá 141 pedágios nesse trecho diagonal.

Então os custos serão:

**Rota 1:**  $[(3 \times 9) + (3 \times 9)] + (3 \times 8) + (99 \times 2) \times 8 = 54 + 24 + 1584 = 1662$ ;

**Rota 2:**  $[(3 \times 8) + (3 \times 8)] + (3 \times 9) + (99 \times 2) \times 9 = 48 + 27 + 1782 = 1857$ ;

**Rota 3:**  $(6 \times 9) + (6 \times 8) + (141 \times 10) = 54 + 48 + 1410 = 1512$ .

Portanto, a **Rota 3** é mais barata agora.

**c)** Seja  $k$  a altura do mapa, então:

**Rota 1:**  $[(3 \times 9) + (3 \times 9)] + (3 \times 8) + 2(k-1) \times 8 = 54 + 24 + 16k - 16 = 16k + 62$ ;

**Rota 2:**  $[(3 \times 8) + (3 \times 8)] + (3 \times 9) + 2(k-1) \times 9 = 48 + 27 + 18k - 18 = 18k + 57$ ;

Obviamente os custos da Rota 2 são sempre maiores do que da Rota 1 se  $k > 2$ .

**Rota 3:**  $(6 \times 9) + (6 \times 8) + \lfloor k\sqrt{2} \rfloor \times 10 = 102 + 10\lfloor k\sqrt{2} \rfloor$ , em que  $\lfloor k\sqrt{2} \rfloor$  é o maior inteiro menor do que  $k\sqrt{2}$  (também chamado de *piso* de  $k\sqrt{2}$ ).

Sejam  $C_1(k) = 16k + 62$  e  $C_3(k) = 102 + 10\lfloor k\sqrt{2} \rfloor$ . Note que

$$C_3(k) = 102 + 10\lfloor k\sqrt{2} \rfloor < 102 + 10\sqrt{2}k = f(k).$$

Então, se  $f(k) < C_1(k)$ , temos  $C_3(k) < C_1(k)$ . Mas,

$$f(k) < C_1(k) \Leftrightarrow (16 - 10\sqrt{2})k > 40.$$

Agora, de  $1, 41 < \sqrt{2} < 1, 42$  temos

$$14, 1 < 10\sqrt{2} < 14, 2; -14, 1 > -10\sqrt{2} > -14, 2$$

e

$$16 - 14,1 > 16 - 10\sqrt{2} > 16 - 14,2 > 0.$$

Assim,

$$(16 - 14,2)k > 40 \Rightarrow (16 - 10\sqrt{2})k > 40.$$

Portanto,  $1,8k > 40$ , ou

$$k > \frac{40}{1,8} \sim 22,2 \Rightarrow (16 - 10\sqrt{2})k > 40.$$

Logo, se  $k \geq 23$ , teremos  $C_3(k) < C_1(k)$ .

Vejamos o que ocorre se  $k = 22$  :

$$C_1(22) = 16 \cdot 22 + 62 = 414$$

e

$$C_3(22) = 102 + 10[22\sqrt{2}] = 102 + 310 = 412.$$

Portanto,  $C_3(22) < C_1(22)$ .

Vejamos o que ocorrer se  $k = 21$  :

$$C_1(21) = 16 \cdot 21 + 62 = 398$$

e

$$C_3(21) = 102 + 10[21\sqrt{2}] = 102 + 290 = 392,$$

e ainda  $C_3(21) < C_1(21)$ .

Vejamos o que ocorre se  $k = 20$  :

$$C_1(20) = 16 \cdot 20 + 62 = 382$$

e

$$C_3(20) = 102 + 10[20\sqrt{2}] = 382,$$

portanto  $C_3(20) = C_1(20)$ .

Assim, a partir da altura  $21km$  a Rota 3 é sempre mais barata do que a Rota 1.



(b) Note que  $2 < \sqrt{5} < 4$ . Então  $1 < \frac{\sqrt{5}}{2} < 2$  e, portanto,  $3 < 2 + \frac{\sqrt{5}}{2} < 4$ . Logo, o maior valor inteiro de  $k$  é 3.

### Gabarito Nível 3

1. Em primeiro lugar, encontraremos alguns conjuntos que satisfazem o enunciado. Por exemplo, claramente  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  satisfaz os itens (i), (ii) e (iii). Mais geralmente, para qualquer número inteiro positivo  $a$ , é fácil ver que o conjunto  $A = \{0, a, 2a, \dots, (k-1)a\}$  satisfaz as condições desejadas. Agora, mostraremos que os conjuntos da forma  $A = \{0, a, 2a, \dots, (k-1)a\}$ , em que  $a$  é um inteiro positivo, são os únicos conjuntos que satisfazem o enunciado. Para isso, seja  $A$  um conjunto qualquer que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii). Utilizaremos indução sobre  $k$  para mostrar que existe um número inteiro positivo  $a$  tal que  $A = \{0, a, 2a, \dots, (k-1)a\}$ . Como  $k$  é um inteiro positivo, segue do item (ii) que  $A$  é um conjunto não vazio. Assim, escolhendo  $m$  e  $n$  como um mesmo elemento de  $A$  no item (iii), concluímos que  $0 \in A$ . Logo, se  $k = 1$ , o problema está resolvido. Fixe  $k > 1$  e suponha, por hipótese de indução, que para todo conjunto  $A$  com  $k-1$  elementos satisfazendo (i), (ii) e (iii), exista um número inteiro positivo  $a$  tal que  $A = \{0, a, 2a, \dots, (k-2)a\}$ . Seja  $A$  um conjunto com  $k$  elementos satisfazendo (i), (ii) e (iii). Escreva  $A = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ , com  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1}$ . Observe que o conjunto  $A' = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}\}$  satisfaz os itens (i), (ii) e (iii) do enunciado, pois para quaisquer  $0 \leq i < j \leq k-2$ , tem-se  $x_j - x_i \in A$  e, como  $x_j - x_i < x_{k-1}$ , então  $x_j - x_i \in A'$ . Por hipótese de indução, existe um inteiro positivo  $a$  tal que  $A' = \{0, a, 2a, \dots, (k-2)a\}$ . Assim,  $A = \{0, a, 2a, \dots, (k-2)a, x_{k-1}\}$ . Por fim, aplicando o item (iii) repetidas vezes com  $m = x_{k-1}$  e  $n = 0, a, 2a, \dots, (k-2)a$ , obtemos que os  $k$  elementos  $0 < x_{k-1} - (k-2)a < x_{k-1} - (k-3)a < \dots < x_{k-1} - a < x_{k-1}$  são exatamente os  $k$  elementos de  $A$ . Como o menor elemento positivo de  $A$  é  $a$ , então  $x_{k-1} - (k-2)a = a$ , ou seja,  $x_{k-1} = (k-1)a$ . Isso mostra que  $A = \{0, a, 2a, \dots, (k-1)a\}$ , completando o processo de indução. Segue que os únicos conjuntos que satisfazem o enunciado são os conjuntos da forma  $A = \{0, a, 2a, \dots, (k-1)a\}$ , em que  $a$  é um inteiro positivo qualquer.

2. Observemos que  $x^4 - 4x^3$  são os dois primeiros termos do desenvolvimento do binomial  $(x - 1)^4$ . Dessa forma,

$$x^4 - 4x^3 = (x - 1)^4 - (6x^2 - 4x + 1)$$

e, portanto,

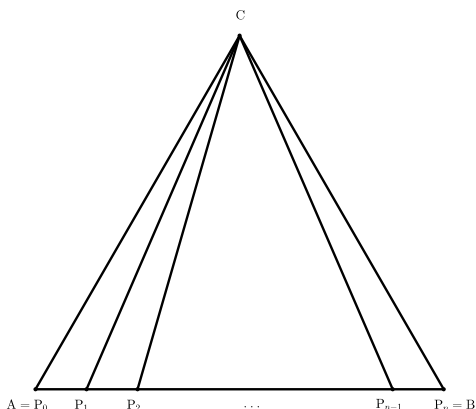
$$f(x) = (x - 1)^4 - (6x^2 - 4x + 1) + 7x^2 - 6x + 5 = (x - 1)^4 + x^2 - 2x + 4.$$

Observando, novamente, que  $x^2 - 2x$  são os dois primeiros termos do desenvolvimento do binomial  $(x - 1)^2$ , concluímos que

$$f(x) = (x - 1)^4 + (x - 1)^2 + 3.$$

Como  $(x - 1)^4 \geq 0$  e  $(x - 1)^2 \geq 0$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , então  $f(x) \geq 3$ . Por fim, observando que  $f(1) = 3$ , obtemos que o valor mínimo de  $f$  é 3 e é atingido em  $x = 1$ .

3. A situação do enunciado é representada pela figura abaixo.



Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo  $\triangle ACP_1$ , obtemos

$$(P_1C)^2 = (AC)^2 + (AP_1)^2 - 2(AC)(AP_1) \cos \hat{C}AP_1.$$

Substituindo os valores  $AC = 1$ ,  $AP_1 = \frac{1}{n}$  e  $\hat{CAP}_1 = 60^\circ$ , concluímos que

$$P_1C = \frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{n}.$$

A partir daqui, podemos proceder de duas maneiras.

### Solução 1:

Aplicando a lei dos senos ao triângulo  $\triangle ACP_1$ , obtemos

$$\frac{\sin \hat{CAP}_1}{P_1C} = \frac{\sin \hat{ACP}_1}{AP_1}.$$

Substituindo os valores  $\hat{CAP}_1 = 60^\circ$ ,  $AP_1 = \frac{1}{n}$  e o valor de  $P_1C$  calculado acima, concluímos que

$$\sin \hat{ACP}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{n^2 - n + 1}}.$$

### Solução 2:

Ao considerarmos  $AP_1$  e  $AB$  como as bases para os triângulos  $\triangle ACP_1$  e  $\triangle ABC$ , respectivamente, observamos que ambos possuem a mesma altura. Assim,

$$\text{área}(\triangle ACP_1) = \frac{1}{n} \cdot \text{área}(\triangle ABC).$$

Como

$$\text{área}(\triangle ACP_1) = \frac{(P_1C)(AC) \sin \hat{ACP}_1}{2} \quad \text{e} \quad \text{área}(\triangle ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

então

$$\sin \hat{ACP}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{n^2 - n + 1}}.$$



4. Suponha, por contradição, que existam dois números naturais  $a$  e  $b$  tais que  $2014 = a^3 - b^3$ . Como a fatoração prima de 2014 é  $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ , então não podemos ter  $b = 0$ , pois 2014 não é um cubo perfeito. Visto que  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , então  $2014 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ . Observe que  $a - b$  e  $a^2 + ab + b^2$  possuem paridades diferentes, pois 2014 é múltiplo de 2 mas não é múltiplo de 4. Notemos que, se  $a - b$  é ímpar, então  $a$  e  $b$  possuem paridades diferentes e, com isso,  $a^2 + ab + b^2$  é ímpar (pois  $ab$  é par e  $a^2 + b^2$  é ímpar). Logo, não podemos ter  $a - b$  ímpar, pois  $a - b$  e  $a^2 + ab + b^2$  possuem paridades diferentes. Além disso,  $a - b < a^2 + ab + b^2$ , pois

$$a - b < a + b < a^2 + b^2 < a^2 + ab + b^2.$$

Resumindo:

$$\begin{cases} (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 2 \cdot 19 \cdot 53; \\ a - b \text{ é par}; \\ a - b < a^2 + ab + b^2. \end{cases}$$

Nessas condições, há apenas duas possibilidades para  $a - b$ :  $a - b = 2$  ou  $a - b = 2 \cdot 19 = 38$ . Se  $a - b = 2$ , então  $a^2 + ab + b^2 = 19 \cdot 53 = 1007$  e, usando que  $a = b + 2$ , obtemos

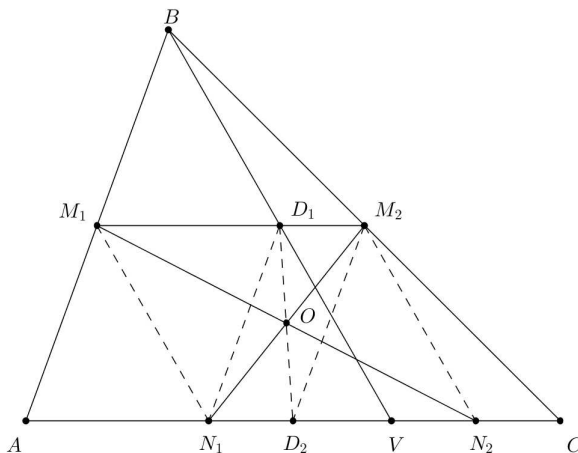
$$1007 = a^2 + ab + b^2 = (b + 2)^2 + (b + 2)b + b^2 = 3b^2 + 6b + 4.$$

Assim,  $3(b^2 + 2b) = 1003$ , o que é impossível, pois 1003 não é múltiplo de 3. Resta apenas a possibilidade  $a - b = 38$ . Neste caso,

$$53 = a^2 + ab + b^2 = (b + 38)^2 + (b + 38)b + b^2 = 3b^2 + 114b + 1444.$$

Isso diz que  $3b^2 + 114b = -1391$ , o que é impossível, pois  $b$  é positivo. Com isso, concluímos que não existem dois números naturais  $a$  e  $b$  tais que  $2014 = a^3 - b^3$ .

5. A figura abaixo representa a situação do enunciado.



A demonstração consiste em aplicar repetidas vezes o Teorema da Base Média de um Triângulo. Em cada um dos itens abaixo, a conclusão segue deste teorema.

- (i) Como  $M_1$  é o ponto médio de  $AB$  e  $M_2$  é o ponto médio de  $BC$ , então  $M_1M_2$  é paralelo a  $AC$  (teorema aplicado ao triângulo  $\triangle ABC$ ).
- (ii) Como  $M_1$  é o ponto médio de  $AB$  e  $N_1$  é o ponto médio de  $AV$ , então  $M_1N_1$  é paralelo a  $BV$  (teorema aplicado ao triângulo  $\triangle ABV$ ).
- (iii) Como  $M_2$  é o ponto médio de  $BC$  e  $N_2$  é o ponto médio de  $VC$ , então  $M_2N_2$  é paralelo a  $BV$  (teorema aplicado ao triângulo  $\triangle VBC$ ).
- (iv) Como  $M_1$  é o ponto médio de  $AB$  e  $D_1$  é o ponto médio de  $BV$ , então  $M_1D_1$  é paralelo a  $AV$  (teorema aplicado ao triângulo  $\triangle ABV$ ).
- (v) Como  $N_1$  é o ponto médio de  $AV$  e  $D_1$  é o ponto médio de  $BV$ , então  $N_1D_1$  é paralelo a  $AB$  (teorema aplicado ao triângulo  $\triangle ABV$ ).
- (vi) Como  $M_2$  é o ponto médio de  $BC$  e  $D_2$  é o ponto médio de  $AC$ , então  $M_2D_2$  é paralelo a  $AB$  (teorema aplicado ao triângulo  $\triangle ABC$ ).

Por (i), (ii) e (iii),  $M_1M_2N_2N_1$  é um paralelogramo. Por (i) e (iv),  $M_1$ ,  $D_1$  e  $M_2$  são colineares e, com (v) e (vi), concluímos que  $N_1D_1M_2D_2$  também

é um paralelogramo. Como  $M_1M_2N_2N_1$  é um paralelogramo, então  $O$  é o ponto médio de  $N_1M_2$ . Agora, usando que  $N_1D_1M_2D_2$  é um paralelogramo, obtemos que  $N_1M_2$  e  $D_1D_2$  se intersectam em seus pontos médios, o qual é o próprio  $O$ . Isso mostra que  $D_1$ ,  $O$  e  $D_2$  são colineares, e que  $D_1O$  e  $OD_2$  possuem o mesmo comprimento.





# **IV ORMM (2014)**

---



## IV ORMM em Números

Na IV Olimpíada Regional Mirim de Matemática participaram 347 alunos do quinto ano do ensino fundamental, oriundos de três escolas particulares (Educandário Imaculada Conceição, Escola Dinâmica e Colégio Catarinense) e uma escola pública (Colégio de Aplicação UFSC) de Florianópolis.

Na cerimônia, foram premiados 32 estudantes: 1 medalha de ouro, 4 com medalhas de prata, 9 com medalhas de bronze e 18 com menções honrosas.

### Ouro

- Camila Hasckel Loch (Colégio de Aplicação)

### Prata

- Akira Hisayasu Suzuki (Escola Dinâmica)
- Marcelo Evangelista Vieira Flores Pedrozo (Colégio Catarinense)
- Mateus Barcelos Faita (Colégio Catarinense)
- Vitor Ricardo Thais Malvezzi (Colégio Catarinense)

### Bronze

- Beatrice Bianchini Migliardi (Colégio Catarinense)
- Carolina Ventura Hawerth (Colégio Catarinense)
- Cauã Vicente Bitencourt (Educandário Imaculada Conceição)
- Cristiano Gio Ortiz Junior (Colégio Catarinense)
- Gabriel Antônio Viviani Muschitz (Colégio Catarinense)
- João Pedro Gomes Acosta (Educandário Imaculada Conceição)
- Leonardo De Bem Rizzieri (Colégio de Aplicação)
- Vitor Costa Farias (Colégio Catarinense)
- Vitor Jorge Meyer (Colégio Catarinense)

**Menção Honrosa**

- Ana Paula Kalfelz Fleck (Escola Dinâmica)
- André Indicatti Dalpiaz (Colégio Catarinense)
- Anna Carolina Montana Silveira (Colégio de Aplicação)
- Arthur Bastos Neves (Colégio Catarinense)
- Carlos Eduardo Fleischmann Alves Zambon (Colégio Catarinense)
- Daniel Kim Homrich (Colégio Catarinense)
- Guilherme Borges Quadros (Educandário Imaculada Conceição)
- Guilherme Medeiros Velho (Colégio de Aplicação)
- Henrique Martignago Cassol (Colégio Catarinense)
- Isabela Lourenço Da Silva (Colégio de Aplicação)
- Manuella Naschenweng Damian (Colégio Catarinense)
- Marco Antônio De Oliveira Batista (Colégio Catarinense)
- Nathan Costa Marcondes (Colégio Catarinense)
- Paula De Abreu Warken (Colégio Catarinense)
- Paulo Arthur Flor Fernandes (Colégio de Aplicação)
- Rafael Nápoli De Amorim (Colégio Catarinense)
- Samara Ali Najmeddine (Educandário Imaculada Conceição)
- Sophia Antônio Marques (Colégio Catarinense)



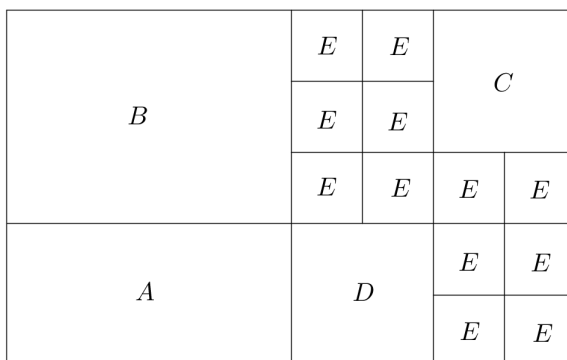
**Prova****Questão 01**

Escrever todos os números de três algarismos diferentes seguindo as instruções:

- a) Todos os números são múltiplos de 5.
- b) Em cada número, o algarismo da centena é igual à soma dos algarismos da dezena e da unidade.

**Questão 02**

Um jardim retangular foi dividido como na figura a seguir.



Sabemos que:

- (i) Os canteiros C, D e E são quadrados.
- (ii) A e B são canteiros retangulares.
- (iii) Cada canteiro E tem 1 metro quadrado de área.
- (iv) O canteiro A tem área de 8 metros quadrados.

Pergunta-se:

- a) Qual é a área do canteiro B?
- b) Qual é a área total do jardim?

### Questão 03

Os alunos do quinto ano da escola Sabetudo queriam fazer uma festa junina. Para dançar a quadrilha, foram feitos 32 pares de alunos (uma menina e um menino), mas um quinto dos meninos ficou sem par. Quantos alunos do quinto ano há na escola Sabetudo? Quantos meninos? Quantas meninas?

### Questão 04

Na festa de Joãozinho há 19 mesas retangulares para seis pessoas: duas pessoas sentam-se em cada lado da mesa e uma pessoa senta-se em cada ponta. O pai de Joãozinho resolveu juntar todas as mesas pelo menor lado, e fazer uma única mesa comprida, conforme a figura. Todas as crianças se sentaram e sobraram três lugares. Quantas crianças havia na festa?



**Gabarito****Questão 1**

Pela instrução (a), os números devem terminar em 0 ou 5, ou seja, as possibilidades para o algarismo das unidades é 0 ou 5. Quando o algarismo das unidades é zero, os algarismos das dezenas e das centenas serão iguais, pois somar zero (unidade) não vai alterar o algarismo da dezena. Resta então apenas o 5 como algarismo das unidades. Fazendo a lista para todos os possíveis algarismos das dezenas cuja soma com o algarismo das unidades (5) ainda é um algarismo, obtemos:

$centena(c)$ $(c) = (d) + (u)$	$dezena(d)$	$unidade(u)$
6	1	5
7	2	5
8	3	5
9	4	5

**Resposta:** Os números são 615, 725, 835 e 945.

**Questão 2**

- a) Cada canteiro E tem uma unidade de área. Assim, o lado menor do canteiro A mede 2m. Como sua área é  $8m^2$ , seu lado maior mede o número que multiplicado por 2 resulta 8, ou seja, mede 4 m. O maior lado do canteiro A é também o maior lado do canteiro B, isto é, mede 4 m. O menor lado do canteiro B corresponde a três lados do canteiro E, ou seja, mede  $3 \times 1 = 3m$ . A área do canteiro B é o produto das medidas de seus lados:  $4 \times 3 = 12m^2$ .

**Resposta:** A área do canteiro A é  $12m^2$ .

- b) O lado maior de todo o jardim mede quatro lados do canteiro E mais o lado maior do canteiro A:  $4 + 4 = 8m$ . O lado menor do jardim corresponde a cinco lados do canteiro E:  $5 \times 1 = 5m$ . A área de todo jardim é  $8 \times 5 = 40m^2$ .

**Resposta:** A área de todo o jardim é  $40m^2$ .

**Questão 3**

São 32 pares menino-menina: isso significa que são 32 meninas e 32 meninos, mais os meninos que ficaram sem par. Como um quinto dos meninos ficou sem par, conclui-se que quatro quintos dos meninos corresponde a 32 meninos. Então um quinto dos meninos corresponde a  $32 \div 4 = 8$  e o total de meninos é 40. O total de alunos é  $40 + 32 = 72$ .

**Resposta:** Há 72 alunos na escola Sabetudo: 40 meninos e 32 meninas.

**Questão 4**

Como as mesas foram unidas pelo mesmo lado, as mesas das pontas acomodam 5 pessoas e as mesas do meio acomodam 4 pessoas. São 2 mesas nas extremidades e  $19 - 2 = 17$  mesas no meio: o número total de lugares é  $(2 \times 5) + (17 \times 4) = 10 + 68 = 78$ . Como sobraram 3 lugares temos  $78 - 3 = 75$  lugares ocupados.

**Resposta:** Havia 75 crianças na festa.



# Artigos

---



## Perguntas sobre o número zero

Júlio César dos Reis<sup>1</sup>

julio@uesb.edu.br

**Reumo:** Neste artigo respondemos algumas perguntas sobre o número zero, mais especificamente sobre paridade, existência em algarismos romanos e pertinência aos números naturais. Estas perguntas nos remetem para assuntos mais gerais. Quando falamos que um número é par ou ímpar, estamos falando sobre o que acontece quando dividimos o número por 2. É natural estender a pergunta para o que ocorre quando a divisão é feita por outros números e então estamos falando de divisibilidade. A pergunta sobre a existência do zero em algarismos romanos está associada à sistemas de numeração. A discussão se o zero é ou não um número natural pode nos levar a falar de elemento neutro de operações e do infinito. Assim, o zero vira a ponta de um novelo do qual é possível desenrolar vários assuntos.

### Introdução

Em uma tarde de segunda-feira, a universidade<sup>2</sup> receberia um grupo de alunos do ensino médio. Era uma daquelas visitas com o objetivo de conhecer as instalações universitárias e de tirar dúvidas sobre os cursos. Acho muito legal a interação com as escolas afinal de contas, trata-se de uma instituição pública aberta à população que, em geral, não sabe disso. Por exemplo, os alunos do ensino médio sempre se espantam quando descobrem que eles podem frequentar a biblioteca da universidade.

Assim que eu soube da visita, me ofereci para dar uma palestra sobre matemática. Na verdade, queria fazer um bate-papo informal e alguém tem que começar a conversa, direcionar o assunto. Os alunos chegaram, foram recebidos por uma professora, encaminhados para um auditório e a conversa começou. O início a gente

---

<sup>1</sup>Professor do DCET - Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da UESB - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

<sup>2</sup>Estamos falando da UESB - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, uma instituição com *campi* nas cidades de Vitória da Conquista, Itapetinga e Jequié.

sabe como é: todo mundo tímido, mas aos poucos o assunto vai fluindo e o pessoal fica mais à vontade para fazer perguntas. E apareceram perguntas bem legais: sobre geometria, sobre funções, sobre teoria dos números, dentre outros assuntos.

Neste artigo escolhemos algumas das perguntas que apareceram neste bate-papo. A escolha de quais perguntas mostrar aqui foi feita usando dois critérios (não muito rigorosos): i) os assuntos deveriam ter alguma ligação entre si; ii) os assuntos deveriam ser a “ponta do iceberg” de ideias mais gerais. No fim das contas, temos algumas perguntas sobre o zero, que nos levaram a falar de divisibilidade, de sistemas de numeração e de elemento neutro, num verdadeiro novelo do qual ainda era possível desenrolar mais e mais assuntos.

## O zero é par?

Uma das primeiras perguntas feitas foi sobre a paridade do zero. “O zero é par? Por quê?”

Vamos relembrar rapidamente o que significa quando dizemos que um número inteiro  $n$  é par. Pegamos o número inteiro  $n$  e dividimos por 2. Temos um quociente e um resto que pode ser zero ou um. Se o resto for zero, dizemos que  $n$  é um número par; se o resto for um, dizemos que  $n$  é ímpar. Nós nem olhamos para o quociente da divisão, vamos direto para o resto e conseguimos responder se um número é par ou ímpar.

Vamos aplicar esse teste para o zero. Pegamos o zero, dividimos por 2 e o resto é zero: então zero é par. Podemos até perceber que o quociente também é zero mas para responder se um número é par ou ímpar nem olhamos para o quociente.

Existem ideias importantes escondidas aqui. Estamos fazendo duas afirmações: i) que é sempre possível dividir um número  $n$  por 2, ou seja, dado um número  $n$  e o número 2 existem  $q$  (quociente) e  $r$  (resto) tais que  $n = q \times 2 + r$  e ii) que os restos possíveis são zero e um. Por exemplo, se  $n = 7$ , sabemos que  $7 = 1 \times 2 + 5$  (nesse caso  $q = 1$  e  $r = 5$ ). Mas esta não é a divisão que estamos acostumados pois o resto está “grande demais”. O mesmo vale para  $7 = 2 \times 2 + 3$  (com  $q = 2$  e  $r = 3$ ). Mas em qualquer uma das igualdades anteriores vale a afirmação i), isto é, encontramos  $q$  e  $r$ . A divisão que aprendemos na escola é  $7 = 3 \times 2 + 1$  (temos  $q = 3$  e  $r = 1$ ) na qual valem i), pois encontramos  $q$  e  $r$  e ii), pois  $r = 1$ .

Nesse caso, dizemos que 7 é ímpar pois o resto de 7 na divisão por 2 é 1. No caso do zero, temos  $0 = 0 \times 2 + 0$  (no qual  $q = 0$  e  $r = 0$ ) e dizemos, sem problemas, que zero é par.



Essas afirmações i) e ii) são casos particulares de um teorema mais geral conhecido como Algoritmo da Divisão de Euclides.

**Teorema 1** *Dados dois números inteiros  $n$  e  $m$ , com  $m > 0$ , existe um único par de inteiros  $q$  e  $r$  tais que  $n = q \times m + r$  e  $0 \leq r < m$ .*

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em qualquer livro sobre teoria dos números, como o “Introdução à teoria dos números” [4] de José Plínio Santos, por exemplo.

Nas duas afirmações i) e ii) que fizemos aplicamos esse teorema para  $m = 2$ . Mas o resultado é mais geral:  $m$  não precisa ser apenas 2, pode ser qualquer outro número inteiro positivo.

Outra ideia importante que aparece no teorema anterior é a limitação do resto. Quando dividimos um número inteiro por 2 só temos dois restos possíveis: 0 e 1 (no teorema isso está escrito assim  $0 \leq r < m$ , com  $m = 2$ ). O que acontece com o resto quando dividimos um número inteiro  $n$  por 3? Bom, os restos possíveis são apenas três: o 0, o 1 e o 2. E se dividirmos  $n$  por 4? Os restos possíveis são 0, 1, 2 e 3 (temos quatro restos possíveis). De modo geral, se dividirmos  $n$  por  $m$  temos apenas  $m$  restos possíveis: 0, 1, 2, ...,  $m - 2$ ,  $m - 1$  (são os números  $r$  com  $0 \leq r < m$ ).

Existem nomes para quando a divisão de um número inteiro  $n$  por um número inteiro positivo  $m$  deixa resto zero: dizemos que  $n$  é divisível por  $m$  ou que  $m$  divide  $n$ . Por exemplo,  $6 = 3 \times 2$  (observemos que o resto é 0) e dizemos então que 6 é divisível por 2 ou que 2 divide 6. Outro exemplo,  $0 = 0 \times 2$  (0 é divisível por 2 ou 2 divide 0).

Vejamos que dizer que um número inteiro  $n$  é par ou dizer que  $n$  é divisível por 2 é exatamente a mesma coisa.

Até agora, para saber se um número inteiro  $n$  é par (ou divisível por 2) estamos pegando  $n$  e efetuando a divisão. Existe um outro jeito de saber se um número é par, sem necessariamente dividir? Sim, existe. Chamamos isso de critério de divisibilidade: teste que nos permitem dizer se um número é divisível por outro sem a necessidade de efetuar a divisão.

O critério de divisibilidade por 2 é bem simples: um número inteiro  $n$  é divisível por 2 se, e somente se, o algarismo da unidade for igual a 0, 2, 4, 6 ou 8.

E a divisão por 3 também tem um critério de divisibilidade? Sim. E por 4? Também. Para ver os critérios de divisibilidade por 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sugerimos a leitura do artigo “Critérios de divisibilidade” [5] de autoria de Edson Luiz Valmorbida e Fernando Correia publicado na edição de número 8 da Revista da ORM/SC, no qual aparecem as demonstrações desses critérios.

## Como se escreve zero em algarismos romanos?

Outra pergunta que apareceu na nossa conversa foi: “Como se escreve zero em algarismo romano?” A resposta é bem simples: não existe zero em algarismo romano justamente porque ele não é necessário.

No nosso sistema de numeração o zero serve para marcar uma posição vazia. Por exemplo, para o número 108, o zero indica que a casa das dezenas está vazia: só temos uma centena e oito unidades. Se olharmos para o número 801 veremos que, em termos de símbolos (algarismos), este número não tem diferença de 108: usamos três símbolos 0, 1 e 8, a única diferença entre eles está na posição dos símbolos e devido a essa mudança de posição os números representados são diferentes. Por causa disso dizemos que nossa notação é posicional, isto é, o valor do símbolo depende da posição que ele está. Em 108, o 8 vale 8 unidades e em 801 o mesmo 8 vale 800 (ou 8 centenas).

Já em algarismo romano, a notação não é completamente posicional. Por exemplo, 108 em algarismos romanos fica assim CVIII, na qual o C representa 100, o V vale 5 e cada I representa 1, como temos 3, então III vale 3. Dissemos não completamente posicional pois em algumas situações a posição faz uma pequena diferença: por exemplo, 109 em algarismos romanos fica CIX (o IX representa 9, pois o I antes do X significa 10 – 1). O mesmo vale para outros valores, como 40 (XL ou 50 – 10) ou 90 (XC). Essa maneira de escrever, chamada de princípio subtrativo, é uma forma de evitar repetir um mesmo símbolo 4 vezes; sem ele, o 9 ficaria VIIII, 40 seria XXXX e 90 teria a forma LXXXX.

Mas a notação que se tornou mais comum e chegou até nós foi a notação posicional e ela tem as suas vantagens. Quais são as vantagens da notação posicional?

Uma delas é que fica bem mais fácil fazer multiplicações. Tente multiplicar dois números em algarismo romano, por exemplo, XVIII multiplicado por XIV, para ver como é trabalhoso.

Outra vantagem é que os números ficam bem mais curtos, ou seja, temos uma economia de símbolos necessários para escrever um número. Vejamos, por exemplo, o número 888. Na notação que estamos acostumados gastamos apenas 3 símbolos. Em algarismos romanos, este mesmo número é escrito como *DCCCLXXXVIII* com 12 símbolos.

Na notação posicional é necessário um símbolo para marcar uma posição vazia e o zero faz esse papel. Como em algarismo romano a notação não é posicional, não existe a necessidade de marcar uma posição vazia e, portanto, o zero não é necessário.

Explorando um pouco mais nosso sistema de numeração vemos que ele é posicio-

nal (o valor do símbolo depende da posição que ele está) e decimal. Decimal significa que a base que usamos é 10. Precisamos de 10 unidades para formar uma dezena, de 10 dezenas para formar uma centena, e assim por diante.

Por exemplo, 567 significa  $5 \times 100 + 6 \times 10 + 7$ , ou  $5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0$ . A cada casa que se avança para a esquerda aumentamos uma potência de 10.

Existem outras bases que não seja a base 10? Existem. Qualquer outro número inteiro positivo  $b$  maior que 1 pode ser base.

Vejam um padrão: na base 10 temos 10 algarismos para representar um número. Por exemplo, na base 2 temos apenas 2 algarismos: 0 e 1. Na base 3, temos 3 algarismos que seriam 0, 1 e 2. Em geral, numa base  $b$  temos  $b$  algarismos: 0, 1, 2,  $\dots$ ,  $b - 2$ ,  $b - 1$ .

Observemos que os algarismos que aparecem numa base  $b$ , são exatamente os restos possíveis na divisão de um número por  $b$ . Isso é coincidência? Não. O processo de escrever um número em uma base diferente da base 10 está fortemente relacionado com a divisão por  $b$ . Um exemplo pode esclarecer: consideremos o número 19; sabemos que ele significa  $1 \times 10 + 9$ ; como podemos escrever 19 na base 3, por exemplo? Ficaria  $(201)_3$ , que significa  $2 \times 3^2 + 0 \times 3 + 1$ . Vamos usar a notação  $(a_n \cdots a_3 a_2 a_1 a_0)_b$  para dizer que o número  $a_n \cdots a_3 a_2 a_1 a_0$  está escrito na base  $b$ . Assim estamos dizendo que  $(19)_{10} = (201)_3$ .

De onde vem o  $(201)_3$ ? Da divisão sucessiva de 19 por 3. Vejam os:

$$19 = 6 \times 3 + 1 \quad (1)$$

$$6 = 2 \times 3 + 0. \quad (2)$$

Substituindo a igualdade (2) em (1), temos

$$19 = (2 \times 3 + 0) \times 3 + 1 = 2 \times 3^2 + 0 \times 3 + 1.$$

Com esse mesmo processo podemos transformar qualquer número escrito na base 10 em um número escrito em uma base  $b$  com  $b > 1$ .

Apenas como exemplo, a base 2 é chamada de base binária, os algarismos são 0 e 1 e em computação usa-se essa base, pois 0 representa ausência de sinal e 1 representa presença de sinal e, no fundo, é apenas isso que um computador entende.

Para ver uma demonstração desse processo de conversão de uma base para outra, sugerimos a leitura do livro “Fundamentos de álgebra” [1], escrito por um grupo de professores da UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais.

## O zero é um número natural?

Outra pergunta levantada no nosso bate-papo foi: “Afinal de contas, o zero é ou não é um número natural?”

A própria maneira como a pergunta foi feita já revela uma polêmica ou, no mínimo, uma calorosa discussão prévia sobre esse tema. E não é para menos: mesmo entre os matemáticos não existe um consenso sobre a inclusão ou não do zero como elemento do conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$ .

A maioria dos livros didáticos apresenta o zero como elemento de  $\mathbb{N}$  e isso tem uma vantagem meramente didática: a apresentação do elemento neutro da adição em  $\mathbb{N}$ . O zero é elemento neutro da operação de adição, isto é,  $n + 0 = n$  qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ , em outras palavras, efetuar a adição com o zero não altera nada.

Várias outras operações têm o seu elemento neutro: a multiplicação tem como elemento neutro o 1, pois  $n \times 1 = n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ; operação de união de conjuntos tem como elemento neutro o conjunto vazio, já que  $A \cup \emptyset = A$  qualquer que seja o conjunto  $A$ .

E por falar em conjunto vazio, imaginemos que vamos contar o número de elementos que pertencem a um dado conjunto e associar a cada conjunto esse número. A qual número devemos associar o conjunto vazio? Ao zero. E se não for possível associar um número a um dado conjunto, pois o conjunto tem “muitos” elementos? Então o conjunto é infinito.

Voltando a questão se o zero é ou não é um número natural, a resposta é: depende. Se for conveniente, podemos incluir o zero no conjunto dos números naturais; se não for, podemos excluí-lo. É uma questão pessoal. Como existem opções, cada um fica com a sua. Eu não considero o zero como número natural. Eu acho que os números naturais são usados para a contagem e não é comum iniciar uma contagem com o zero. Além disso, o fato do número zero causar tanta polêmica também faz com que, na minha opinião, ele perca a chance de pertencer ao conjunto dos números naturais. Essa minha opinião é contrária, por exemplo, à opinião da professora Alda (que faz parte do comitê editorial da Revista ORM/SC) autora do artigo “Quem é maior,  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^*$ ? [3], publicado na edição de número 11 da Revista da ORM/SC, no qual ela se declara “do time que considera o zero um número natural”. O artigo da Alda responde à questão se o conjunto dos números naturais com o zero tem mais elementos do que o conjunto dos números naturais sem o zero. A resposta, surpreendentemente, é que eles possuem a mesma quantidade de elementos (por serem infinitos).

Uma sugestão de leitura sobre a polêmica do zero como número natural é a Revista do Professor da Matemática RPM de número 76 que traz um artigo chamado

“Conceitos e controvérsias” [2] de autoria de Elon Lages Lima que trata dessa e de outras polêmicas matemáticas (nas quais, com certeza, o zero está envolvido).

## Considerações finais

O bate-papo com os alunos do ensino médio que estavam visitando a universidade estava bom, mas eles ainda tinham que visitar alguns laboratórios e conhecer as outras instalações da instituição, além de tirar dúvidas sobre os cursos e tivemos que encerrar a conversa.

Foi uma tarde agradável, na qual conversamos sobre matemática e, se tivéssemos mais tempo, apareceriam mais assuntos. Por exemplo, ficamos morrendo de vontade de falar do infinito e então o título desse artigo seria “Do zero ao infinito”.

## Referências

- [1] FERNANDES, A. V. et al, *Fundamentos de Álgebra*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005. 199 p.
- [2] LIMA, E. L. Conceitos e controvérsias. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n.76, p. 8-11, 2011.
- [3] MORTARI, A.D.M. Quem é maior,  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^*$ ? *Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina*, Florianópolis, n.11, p. 41-47, 2014.
- [4] SANTOS, J. P. O. *Introdução à teoria dos números*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. 198 p.
- [5] VALMORBIDA, E. L.; CORREIA, F. Critérios de divisibilidade. *Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina*, Florianópolis, n.8, p.57-64, 2011.

## Pitágoras ao quadrado

Eduardo Sabel<sup>1</sup> Leonardo de Liz Brockveld<sup>2</sup>

eduardo.sabel@grad.ufsc.br  
leonardo.brockveld@grad.ufsc.br

**Resumo:** Este artigo tem o objetivo de demonstrar por diferentes caminhos o famoso teorema de Pitágoras, desenvolvido pelo célebre matemático da antiguidade Pitágoras de Samos. Comentaremos um pouco sobre a vida deste matemático, e em sequência iremos expor algumas formas de provar este teorema, utilizando métodos algébricos e geométricos. Por fim, abordaremos neste artigo algumas das diversas aplicações do teorema, assim como outras relações em triângulos em geral.

### Introdução

A vida de Pitágoras é pouco conhecida, exceto, é claro, pela sua relevância na matemática e filosofia. Aos 18 anos de idade ele já havia estudado e dominado diversos conhecimentos de matemática e, ao fazer algumas viagens ao Egito para estudar as pirâmides, ele descreveu o teorema de Pitágoras, que se tornaria a mais importante fórmula da trigonometria num triângulo retângulo, e que sustentou tantas outras relações na geometria: dado um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Durante seu ápice, fundou a Escola de Pitágoras - uma instituição de ensino mística e filosófica, em Crotona, uma colônia grega na península itálica. Seus princípios possibilitaram a evolução dos conceitos matemáticos e da filosofia ocidental.

Os pitagóricos tinham uma visão de que o universo era conduzido pela matemática e com isso basearam seus estudos astronômicos nas estações do ano, no movimento estelar e da lua. Eles são reconhecidos no estudo da matemática na música e nas artes plásticas, foram ainda aritméticos ao estudar números figurados e os números perfeitos.

---

<sup>1</sup> Graduando do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC - Campus Blumenau.

<sup>2</sup> Graduando do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC - Campus Blumenau.

Pitágoras foi expulso de Crotona e passou a morar em Metaponto, onde faleceu, provavelmente em 496 a.C ou 497 a.C.

## Demonstrações do teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é um dos mais brilhantes teoremas da matemática. Ele diz que:

**Teorema de Pitágoras:** Dado um triângulo retângulo de catetos medindo  $a$  e  $b$ , e hipotenusa medindo  $c$ , então

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

No decorrer dos séculos, muitos matemáticos estudaram e desenvolveram várias formas para constatar sua validade. O livro *The Pythagorean Proposition* [4], por exemplo, contém 370 demonstrações diferentes. Este artigo irá expôr algumas dessas demonstrações famosas e curiosas.

### Quadrado chinês

O quadrado chinês já existia antes mesmo de Pitágoras e é construído da seguinte forma: tome quatro triângulos retângulos congruentes com catetos medindo  $a$  e  $b$ , e hipotenusa medindo  $c$ . Conecte-os obtendo a figura 1.

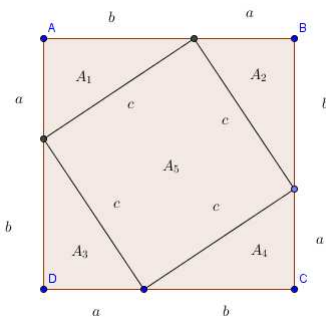


Figura 1: Quadrado chinês.

Note que o quadrilátero  $ABCD$  possui todos lados medindo  $a + b$  e ângulos internos medindo  $90^\circ$  e portanto é um quadrado. O quadrilátero interno também é um quadrado pois o ângulo formado por dois lados consecutivos é o suplemento da soma dos dois ângulos não retos do triângulo inicial e todos seus lados medem  $c$ .

Para realizar a demonstração do teorema de Pitágoras neste caso, considere duas formas de calcular a área total  $A$  da figura. A primeira utilizando o lado do quadrado maior que é  $a + b$  e o fato da área do quadrado ser calculada através do quadrado do valor do lado. Assim

$$A = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Para a segunda lembre que a área de um triângulo é calculada através do produto das medidas de sua base e da altura, dividido por 2. Assim somando a área dos 4 triângulos de base  $a$  e altura  $b$  com a área do quadrado de lado  $c$ :

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \\ &= \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + c^2 \\ &= \frac{4ab}{2} + c^2 \\ &= 2ab + c^2. \end{aligned}$$

Igualando os valores obtidos para a área  $A$  obtém-se

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

e subtraindo  $2ab$  dos dois lados da igualdade resulta

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

## Construção de Euclides

Euclides é conhecido como o pai da geometria e no seu livro “Os Elementos” [2] há uma demonstração interessante (Proposição  $I - 47$ ), sendo este um dos primeiros registros do teorema de Pitágoras.

Considere o  $\triangle ABC$  retângulo em  $B$  e, a partir de cada um de seus lados, construa um quadrado conforme a figura 2.



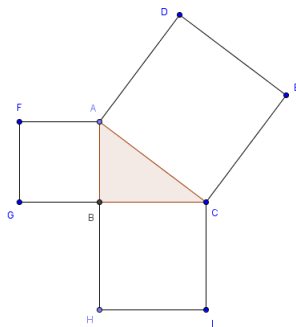


Figura 2: Triângulo retângulo com os quadrados adjacentes.

Trace os segmentos de reta  $\overline{FC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{AI}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{BJ}$  em que este último é perpendicular ao lado  $\overline{ED}$ . Assim obtêm-se que os triângulos  $\triangle FAC$  e  $\triangle BAD$  são congruentes a partir do caso  $LAL$  de congruência. Analogamente pelo caso  $LAL$  tem-se  $\triangle AIC \cong \triangle BEC$ .

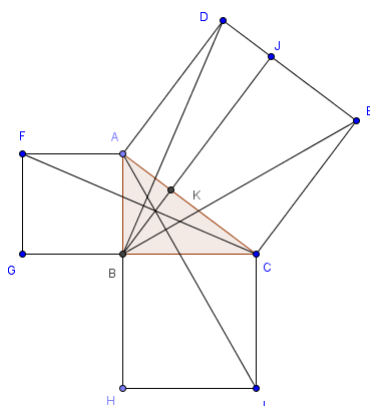


Figura 3: Alguns segmentos de reta auxiliares.

Note que a área do quadrado  $ABGF$  é

$$(\overline{AB})^2$$

e a área de  $\triangle FAC$  é

$$\frac{\overline{FA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{(\overline{AB})^2}{2}.$$

Ou seja, a área do quadrado  $ABGF$  é o dobro da área de  $\triangle FAC$ . De forma análoga conclui-se que a área do retângulo  $AKJD$  é o dobro da área de  $\triangle DAB$ , que é

$$\frac{\overline{DA} \cdot \overline{AK}}{2} = \frac{(\overline{AB})^2}{2}.$$

Já que ambos os triângulos acima possuem mesma área, pois são congruentes, conclui-se que o quadrado  $ABGF$  e o retângulo  $AKJD$  possuem também mesma área.

Fazendo a mesma análise com os dois triângulos congruentes  $\triangle AIC$  e  $\triangle BEC$ , conclui-se que o quadrado  $BCIH$  e o retângulo  $JCEK$  possuem mesma área.

Já que a área do quadrado  $ACED$  é a soma das áreas dos retângulos acima citados, segue que

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{CB})^2 = (\overline{AC})^2$$

ou seja, a tese do teorema de Pitágoras.

## Demonstração de Bhaskara

O matemático hindu Bhaskara Akaria, conhecido no Brasil pela “Fórmula de Bhaskara”<sup>3</sup> que resolve qualquer equação do segundo grau, viveu entre os anos de 1114-1185 e também estudou triângulos retângulos.

Sua demonstração tem alguma semelhança com a demonstração anterior. Tome 4 triângulos retângulos congruentes, porém rotacionados conforme a figura 4, e denote por  $a$  e  $b$  as medidas de seus catetos e por  $c$ , a medida da hipotenusa.

---

<sup>3</sup>Não há registros de que foi Bhaskara quem desenvolveu essa fórmula. Em vários países se usa o método de completar quadrados para se achar as raízes de uma equação desse tipo.

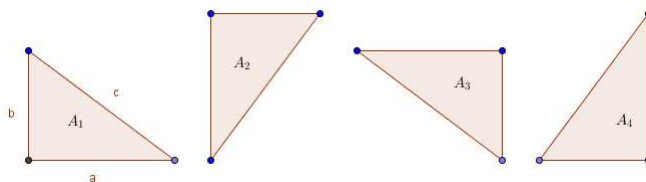


Figura 4: Triângulos retângulos rotacionados.

Há três possibilidades para  $a$  e  $b$ :  $a < b$ ,  $b < a$  e  $a = b$ . A demonstração do caso em que  $a < b$  é análoga ao caso  $a > b$ , logo sem perda de generalidade comecemos com esse.

Caso 1:  $a > b$ .

A partir dos triângulos da figura 4, crie um quadrado de lado igual a hipotenusa de cada triângulo e note que, no centro da figura, restará um quadrado conforme a figura 5, pois todos seus lados medem  $a - b$  (medida do cateto maior menos a medida do cateto menor) e seus ângulos internos medem todos  $90^\circ$ .

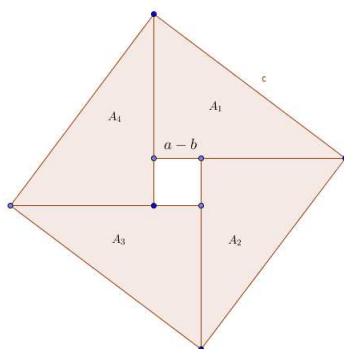


Figura 5: Quadrado construído a partir dos triângulos retângulos acima, caso  $a > b$ .

Há duas maneiras de calcular a área dessa figura: a primeira calculando a área

total menos a área do quadrado interno:

$$c^2 - (a - b)^2 = c^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = c^2 - a^2 + 2ab - b^2.$$

E a segunda somando-se a área dos 4 triângulos de base  $a$  e altura  $b$ :

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{ba}{2} + \frac{ba}{2} + \frac{ba}{2} + \frac{ba}{2} = \frac{4ba}{2} = 2ba.$$

Como as duas equações representam a mesma área, iguale-as:

$$c^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 2ba.$$

Somando  $(-2ba) + a^2 + b^2$  dos dois lados da igualdade tem-se o teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Caso 2:  $a = b$ .

No caso em que  $a = b$  a situação fica ainda mais simples, pois não restará quadrado interno, conforme podemos observar na figura 6.

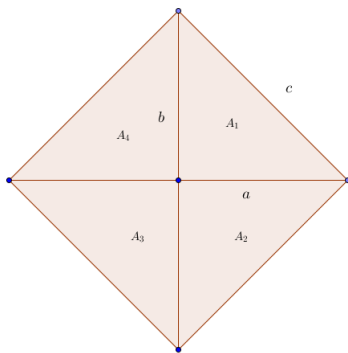


Figura 6: Quadrado construído para o caso  $a = b$ .

Novamente podemos calcular a área da figura de duas formas distintas: a primeira como a área  $A$  total do quadrado de lado  $c$ :

$$A = c^2.$$

A segunda como 4 vezes a área do triângulo com base medindo  $a$  e altura medindo  $b$ :

$$A = 4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab = 2a^2 = a^2 + a^2 = a^2 + b^2.$$

Igualando as duas formas de calcular a mesma área, obtemos a tese do teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

A curiosidade é que Bhaskara não demonstrou o teorema, apenas mostrou a imagem do quadrado e concluiu o resultado.

## Demonstração de Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci é conhecido por suas diversas descobertas e pinturas. Ele foi considerado um gênio pois dedicou-se a várias áreas diferentes, como anatomia, engenharia, matemática, música, arquitetura, e ainda foi um grande inventor. Ele também realizou uma demonstração do teorema de Pitágoras. Considere a figura 7 construída através dos triângulos congruentes e retângulos  $ABC$ ,  $AEF$  e  $JIH$ .

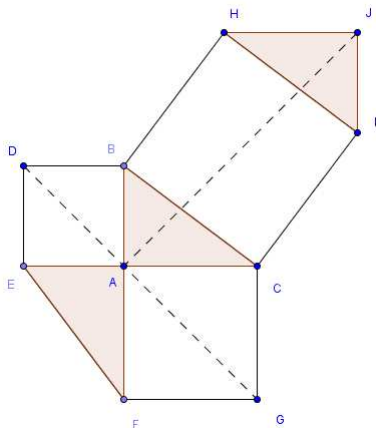


Figura 7: Demonstração de Leonardo da Vinci.

Note que o quadrilátero  $DGCB$  é congruente ao  $DGFE$ . De fato, por construção, são congruentes os lados  $GC$  e  $GF$ , os lados  $CB$  e  $FE$  e os lados  $BD$  e  $ED$ . Uma vez

que  $DG$  é formado pelas diagonais dos quadrados  $ABDE$  e  $AFGC$ , são congruentes os ângulos  $DGC$  e  $DGF$ , e os ângulos  $GDB$  e  $GDE$ . Por fim a congruência dos triângulos  $ABC$  e  $AEF$  garante a congruência dos ângulos  $GCB$  e  $DEF$ , e dos ângulos  $CBD$  e  $EFG$ . Concluímos assim que  $DGCB$  é congruente ao  $DGFE$ .

De forma similar temos que  $JABH$  é congruente a  $AJIC$ , pois são congruentes os triângulos  $ABC$  e  $JIH$ .

Ainda temos que o quadrilátero  $JABH$  é congruente ao quadrilátero  $GDBC$  pois o segmento  $AB$  é congruente ao  $BD$ ,  $BH$  é congruente a  $BC$  e  $HJ$  é congruente a  $GC$  e, além disso, os ângulos  $ABH$  e  $BHJ$  são congruentes, respectivamente, aos ângulos  $DBC$  e  $BCG$ . Então a área do hexágono  $DBC GFE$ , que pode ser obtido pela soma das áreas das três figuras que o compõem, é:

$$(\overline{AB})^2 + 2 \cdot \left( \frac{\overline{BA} \cdot \overline{AC}}{2} \right) + (\overline{AC})^2$$

que é igual a área do hexágono  $ACIJHB$

$$(\overline{BC})^2 + 2 \cdot \left( \frac{\overline{BA} \cdot \overline{AC}}{2} \right).$$

Como as duas representam a mesma área, igualando as duas equações resta o teorema de Pitágoras:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2.$$

## Demonstração do presidente

James Abram Garfield foi presidente dos Estados Unidos com o segundo mandato mais curto da história americana e realizou uma demonstração do teorema de Pitágoras 4 meses após o começo do seu mandato, em 1881, a partir da imagem a seguir. Para esta demonstração, lembre que a área de um trapézio pode ser calculada através do produto da soma da medida de suas bases com a medida da altura, dividido por 2.

Ele construiu um trapézio a partir de dois triângulos congruentes com área  $A_1$  e  $A_2$ , em que os lados com medida  $a$  e  $a_1$  são correspondentes, assim como os lados com medida  $b$  e  $b_1$ , e também os lados com medida  $c$  e  $c_1$ .

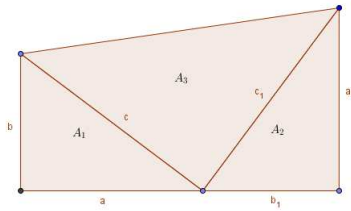


Figura 8: Trapézio utilizado por James A. Garfield em sua demonstração.

Pela congruência dos triângulos acima, a soma das medidas dos ângulos formados pelos segmentos de reta com medidas  $b_1$  e  $c_1$ , e pelos segmentos de reta com medidas  $a$  e  $c$  é  $90^\circ$ . Consequentemente o triângulo com área  $A_3$  é retângulo e isósceles pois  $c = c_1$ .

Observe as duas maneiras de calcular a área total dessa figura: a primeira através de um trapézio de base menor  $b$  e base maior  $a_1$  com altura  $a + b_1$ :

$$\frac{(b + a_1)(a + b_1)}{2} = \frac{(b + a)^2}{2} = \frac{b^2 + 2ba + a^2}{2}.$$

A segunda, somando-se as áreas  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  dos três triângulos da figura:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \frac{ba}{2} + \frac{b_1a_1}{2} + \frac{cc_1}{2} \\ &= \frac{ba}{2} + \frac{ba}{2} + \frac{cc}{2} \\ &= \frac{2ba}{2} + \frac{c^2}{2}. \end{aligned}$$

Igualando-as:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + 2ba + a^2}{2} &= \frac{2ba}{2} + \frac{c^2}{2} \\ \Rightarrow b^2 + 2ba + a^2 &= 2ba + c^2 \\ \Rightarrow b^2 + a^2 &= c^2 \end{aligned}$$

chegamos a  $b^2 + a^2 = c^2$ , a tese do teorema de Pitágoras.

## Recíproca do teorema de Pitágoras

A recíproca do teorema de pitágoras diz que se temos três números positivos  $a, b, c$  que satisfazem

$$a^2 = b^2 + c^2$$

podemos construir um triângulo retângulo com essas medidas. Vamos demonstrar essa recíproca.

Consideramos dois casos com um triângulo  $ABC$  de lados com medidas  $a, b, c$ , tal que  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{BC} = a$  e  $\overline{CA} = b$ . Note que a hipótese implica que  $a > b$  e  $a > c$ , e que  $a < b + c$ .

Caso 1: O ângulo  $A$  é menor do que 90 graus (e portanto todos os ângulos são menores do que 90 graus).

Neste caso a altura relativa ao vértice  $C$  intercepta  $AB$  perpendicularmente num ponto  $D$  conforme figura abaixo.

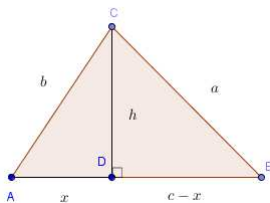


Figura 9: Caso em que todos ângulos são menores que  $90^\circ$ .

No triângulo  $ADC$ , retângulo em  $D$ , tem-se:

$$b^2 = h^2 + x^2$$

que equivale a

$$h^2 = b^2 - x^2.$$



No triângulo  $BDC$ , retângulo em  $D$ , tem-se (substituindo da equação acima):

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - x)^2 + h^2 \\ \Rightarrow a^2 &= c^2 - 2cx + x^2 + b^2 - x^2 \\ \Rightarrow a^2 &= c^2 + b^2 - 2cx. \end{aligned}$$

Resultando em  $a^2 < b^2 + c^2$ .

Caso 2: O ângulo relativo ao vértice  $A$  é maior que 90 graus.

Seja  $D$  o ponto sobre a reta  $AB$  que representa a intersecção dessa reta com a altura relativa ao vértice  $C$  conforme a figura 10.

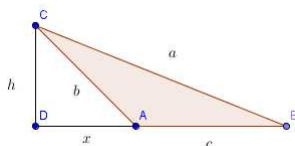


Figura 10: Caso em que um ângulo é maior que  $90^\circ$ .

No triângulo  $ADC$ , retângulo em  $D$ , obtemos:

$$b^2 = h^2 + x^2$$

que equivale a

$$h^2 = b^2 - x^2.$$

No triângulo  $BDC$ , retângulo em  $D$ , tem-se (substituindo da equação acima):

$$\begin{aligned} a^2 &= (c + x)^2 + h^2 \\ \Rightarrow a^2 &= c^2 + 2cx + x^2 + b^2 - x^2 \\ \Rightarrow a^2 &= c^2 + b^2 + 2cx. \end{aligned}$$

Resultando em  $a^2 > b^2 + c^2$ .

Por conseguinte, para um triângulo  $ABC$  construído como acima, com lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$  onde  $a^2 = b^2 + c^2$ , só resta a opção do ângulo em  $A$  medir 90 graus. Assim temos um triângulo retângulo.

## Aplicações

### Distância ao horizonte

Ao estarmos em uma praia e olharmos o horizonte, podemos nos perguntar a que distância esse se encontra. Pode-se utilizar o teorema de Pitágoras para resolver essa questão. Analise a figura 11.

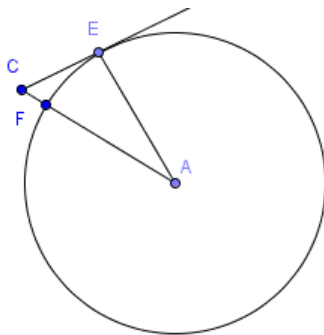


Figura 11: Imagem representativa do planeta Terra.

Considere a circunferência acima como sendo a terra e, portanto, com raio  $\overline{AE}$  medindo aproximadamente  $6371km$ , ou  $6371000m$ . O segmento  $\overline{CF}$  representa a altura de uma pessoa, neste caso  $1,80m$ . Como a direção de nossa visão é uma reta tangente à terra, ela forma um ângulo reto com o raio. Assim o teorema de Pitágoras neste triângulo retângulo nos leva a:

$$\begin{aligned}(\overline{CF} + \overline{FA})^2 &= \overline{CE}^2 + \overline{AE}^2 \\ \Rightarrow (1,80 + 6371000)^2 &= \overline{CE}^2 + 6371000^2 \\ \Rightarrow \overline{CE}^2 &= (6371001,80)^2 - 6371000^2 \\ \Rightarrow \overline{CE}^2 &= 22935603,24 \\ \Rightarrow \overline{CE} &\cong 4789,11.\end{aligned}$$

Assim, uma pessoa de  $1,80m$  de altura vê o horizonte a uma distância de aproximadamente  $4789,11m$ , quase 5 quilômetros.

## Polegadas de uma televisão

As polegadas de uma televisão ou monitor representam o comprimento da diagonal de sua tela, ou seja, a distância do canto superior direito até o canto inferior esquerdo. Com o teorema de Pitágoras, pode-se calcular qual a largura e a altura de uma televisão, bastando saber apenas quantas polegadas a mesma tem.

Para isso deve-se saber o que significa o termo “proporção de tela”: é a relação matemática entre as duas dimensões planas da tela de uma tv: largura e altura. Atualmente o mais comum é a proporção dos televisores de alta definição, 16 : 9. Isso significa que a divisão entre as medidas da largura e da altura da tela desses aparelhos resultam em  $\frac{16}{9}$ .

Vamos então calcular a largura e a altura da tela de uma televisão de 40 polegadas na proporção acima descrita. Denote  $a$  sua altura e  $l$  sua largura e note então que todas medidas estão sendo consideradas na unidade polegada. Assim sabemos que

$$\frac{l}{a} = \frac{16}{9}$$

e multiplicando ambos os lados da equação por  $a$  resulta

$$l = \frac{16a}{9}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras em dois lados consecutivos da tela juntamente com a diagonal segue

$$l^2 + a^2 = 40^2.$$

Substituindo o  $l$  da segunda igualdade pela expressão  $\frac{16a}{9}$  obtida na primeira:

$$\begin{aligned} \left(\frac{16a}{9}\right)^2 + a^2 &= 40^2 \Rightarrow \frac{256a^2}{81} + a^2 = 1600 \Rightarrow \frac{256a^2 + 81a^2}{81} = 1600 \\ &\Rightarrow \frac{337a^2}{81} = 1600 \Rightarrow a^2 = \frac{81 \cdot 1600}{337} \\ &\Rightarrow a = \sqrt{\frac{129600}{337}} \Rightarrow a \cong 19,61. \end{aligned}$$

Assim a tela possui altura medindo aproximadamente 19,61 polegadas. E a largura

$$l = \frac{16a}{9} \cong \frac{16 \cdot 19,61}{9} = \frac{313,76}{9} \cong 34,86.$$

Lembrando que 1 polegada mede 2,54 centímetros, uma televisão de 40 polegadas possui tela medindo aproximadamente

$$19,61 \cdot 2,54 = 49,81 \text{ centímetros de altura}$$

e

$$34,86 \cdot 2,54 = 88,54 \text{ centímetros de largura.}$$

## Cálculo da densidade de metais em um arranjo cristalino

A figura 12 nos mostra como podemos fazer este cálculo utilizando o raio atômico e alguns conceitos de geometria. A imagem mostrada representa a cela unitária de um cristal de prata (Ag) em um sistema de empacotamento cúbico de face centrada, que é uma célula molecular em forma de cubo. Sabendo-se que o raio atômico de um átomo de prata é igual a  $1,44\text{pm}$  (1 picômetro equivale a  $10^{-12}$  metros) podemos calcular a densidade do metal.

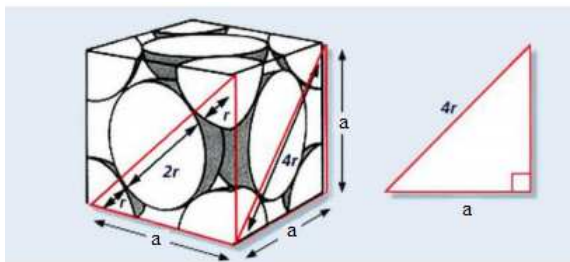


Figura 12: Retirado e adaptado de [6].

Devemos lembrar que densidade é obtida pela divisão massa pelo volume. Para encontramos o volume de um cubo, devemos descobrir a medida de sua aresta e, para isso, utilizaremos o teorema de Pitágoras. Podemos ver que a diagonal deste cubo tem medida  $r + 2r + r = 4r$ . Assim temos:

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 &= (4r)^2 \Rightarrow 2a^2 = 16r^2 \Rightarrow a^2 = 8r^2 \\ &\Rightarrow a = r \cdot \sqrt{8}. \end{aligned}$$

Considerando que o raio do (Ag) é  $1,44\text{pm}$  e tomando uma aproximação para  $\sqrt{8}$  obtemos  $a \cong 4,07\text{pm}$ . E seu volume portanto será:

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \cong (4,07)^3 = 67,4\text{pm}^3 = 6,74 \cdot 10^{-23}\text{cm}^3.$$

Agora que temos o volume, precisamos da massa. Um mol de átomos de prata (Ag) pesa  $107,9$  gramas. No nosso caso temos 4 átomos no cubo (6 metades e 8 oitavos). Multiplicaremos esta massa por 4, e como a massa é calculada para um mol, precisamos multiplicar o volume por  $6,022 \cdot 10^{23}$  átomos (para chegarmos a um mol). Portanto

$$D = \frac{\text{massa molar}}{\text{volume molar}} = \frac{4 \cdot 107,9}{(6,74 \cdot 10^{-23})(6,022 \cdot 10^{23})} = 10,6\text{g/cm}^3.$$

Assim o cálculo da densidade só foi possível graças à utilização do teorema de Pitágoras.

## Relações trigonométricas em outros triângulos

O teorema de Pitágoras implica a validade de muitas outras relações trigonométricas, inclusive em triângulos que não necessariamente são retângulos. Vamos ver como obter algumas delas.

### Altura de um triângulo equilátero

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  vértices de um triângulo equilátero com lado  $l$  e o segmento  $AH$  sua altura relativa ao lado  $BC$  com medida  $h$  conforme a figura 13.

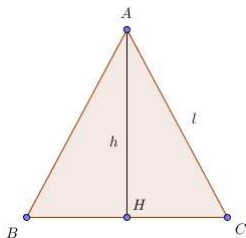


Figura 13: Triângulo equilátero.

Desta forma temos dois triângulos retângulos  $ACH$  e  $ABH$ . Aplicando o teorema de Pitágoras no primeiro, que possui catetos medindo  $h$  e  $\frac{l}{2}$  e hipotenusa medindo  $l$ , obtemos a fórmula generalizada da altura de qualquer triângulo equilátero:

$$\begin{aligned} l^2 &= h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 - \frac{l^2}{4} = h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4} \\ &\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

### Cálculo do seno, cosseno e tangente de $45^\circ$

Considere um quadrado de lado  $l$  conforme a figura 14.

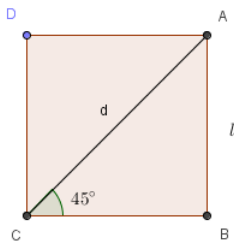


Figura 14: Quadrado com lado medindo  $l$ .

Observando o triângulo equilátero  $ACB$  concluímos que o ângulo  $ACB$  mede  $45^\circ$ . Vamos calcular a medida da hipotenusa  $d$  em função de  $l$  daquele triângulo. Pelo teorema de Pitágoras:

$$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{sen}(45^\circ) &= \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \text{cos}(45^\circ) &= \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \text{tg}(45^\circ) &= \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{l\sqrt{2}}{l\sqrt{2}} = 1. \end{aligned}$$

## Relação Fundamental da Trigonometria

Considere o ângulo  $x$  no triângulo  $ABC$  da figura 15.

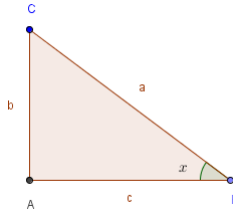


Figura 15: Triângulo  $ABC$  retângulo em  $A$ .

Pela definição de seno e cosseno obtemos:

$$\text{sen}(x) = \frac{b}{a}$$

e

$$\cos(x) = \frac{c}{a}.$$

Desta forma segue que

$$(\text{sen}(x))^2 + (\cos(x))^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Já que o teorema de Pitágoras diz que  $b^2 + c^2 = a^2$  temos

$$(\text{sen}(x))^2 + (\cos(x))^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Esta relação é muito importante na trigonometria e abriu portas para muitos estudos aprofundados nesta área.

## Considerações finais

A ideia do trabalho surgiu em função da participação na XXX Feira Regional de Matemática, em Pomerode - SC, no ano de 2014, sob a orientação do Prof. Dr.

Felipe Vieira. Para melhor visualização deste teorema, foi construído um material para comprovar a validade do teorema de Pitágoras de uma maneira extremamente visual.

Tomando um triângulo retângulo de lados  $30\text{cm}$ ,  $40\text{cm}$  e  $50\text{cm}$ , construímos 3 blocos de vidro quadrados cujos lados são exatamente os catetos e a hipotenusa do triângulo inicial. Então fazemos todas as figuras com uma altura igual a  $5\text{cm}$  e, portanto, elas se tornam prismas.

Enchendo de água o prisma cúbico maior (correspondente à hipotenusa do triângulo) vê-se que esse volume líquido é a quantidade exata para preencher os outros dois prismas vazios, correspondentes aos catetos. Assim vemos que o teorema é válido em uma maneira totalmente prática (note que a altura igual em todos os prismas não influencia no cálculo do volume dos prismas). A máquina em funcionamento pode ser vista em [5].

Para finalizar, agradecemos ao Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva pelas preciosas dicas de demonstrações do teorema, à Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Gestine Cássia Trindade pelo auxílio e correções na parte histórica e ao Prof. Dr. Julio Cesar Araujo da Silva pela aplicação à química.

## Referências

- [1] DUTRA, Katia - *A falsa fórmula de Bhaskara*. Disponível em <http://pnld.moderna.com.br/2012/03/28/a-falsa-formula-de-bhaskara/>. Acesso em: 05 julho 2015.
- [2] EUCLIDES - *Os elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- [3] LIMA, Elon - *Meu Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [4] LOOMIS, Elisha S. - *The Pythagorean proposition*. Washington, D.C.: Ann Arbor, Mich., Edwards Brothers, inc., lithoprinters, 1940.
- [5] YouTube. (2015, Julho 12). “Demonstração” do teorema de Pitágoras - Com Vidros [Arquivo de vídeo]. Encontrado em <https://www.youtube.com/watch?v=poq2iKYsNa8>.
- [6] Facultad de Química y el Departamento de Desarrollo Académico de SECICO. Disponível em: [http://www7.uc.cl/sw\\_educ/qda1106/CAP3/3A/3A2/](http://www7.uc.cl/sw_educ/qda1106/CAP3/3A/3A2/) Acesso em 17 de agosto de 2015.



# O problema dos pontos e o início da Teoria da Probabilidade

Aishameriane Venes Schmidt<sup>1</sup> Gilles Gonçalves de Castro<sup>2</sup>

gilles.castro@ufsc.br

**Resumo:** Mostramos como um problema aparentemente simples, que ficou conhecido como o problema dos pontos, motivou o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade. Também apresentamos soluções desenvolvidas por Fermat e Pascal, que foram as primeiras pessoas a resolverem de forma correta o problema dos pontos.

## Introdução

Maria e Pedro apostam um total de 10 reais numa sequência de jogos de cara ou coroa. Se caírem dez caras primeiro, Pedro leva os 10 reais para casa e se saírem dez coroas primeiro, Maria fica com os 10 reais.

Após 9 rodadas, caíram 6 caras e 3 coroas. Nesse momento, a mãe de Pedro o chama para jantar. Como ele estava ganhando a aposta, pegou o dinheiro e ia para casa quando Maria disse: “*Espera, Pedro! Se a gente continuasse jogando eu tenho certeza que eu iria ganhar!*”. Será que existe alguma forma para Pedro e Maria dividirem os 10 reais sem que precisem jogar até o final?

Neste artigo iremos abordar esse problema, que ficou conhecido por *problema dos pontos*. Mostraremos sua história e relacionaremos a resolução com o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade. Ao final, utilizaremos uma das possíveis soluções do problema para resolver a aposta de Maria e Pedro.

---

<sup>1</sup> Graduanda do curso de Ciências Econômicas da UDESC - Universidade do Estado de Santa Catarina.

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Matemática da UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina.

## Jogos, azar e risco: da sorte ao desenvolvimento da probabilidade

Os jogos de azar<sup>3</sup> existem desde os tempos mais primitivos e fizeram parte de diversas culturas: evidências arqueológicas indicam que na época dos egípcios já havia jogos de apostas. Um dos mais antigos que se tem conhecimento é o *astragalus*, uma espécie de jogo de dados, em que um osso com forma quadrada retirado do calcanhar de uma ovelha ou cervo era jogado. Mas qual a relação de um jogo de azar com probabilidades?

Ao contrário de jogos que dependem unicamente das habilidades de seus jogadores, os resultados dos jogos de azar envolvem fatores que não podem ser controlados. Por exemplo, em um jogo de cara ou coroa, sabemos que o resultado pode ser tanto cara como coroa (em uma moeda honesta essas duas ocorrências têm a mesma “chance” de acontecer) e isso não depende da qualidade do arremesso ou da experiência das pessoas envolvidas. Sendo assim, por muito tempo os resultados de jogos não eram tidos como mensuráveis, mas sim como obras do acaso que poderiam até ser influenciados por deuses. Por séculos, enquanto a matemática e algumas outras áreas se desenvolveram como fruto dos filósofos e pensadores de suas épocas, os assuntos relacionados à probabilidade eram tratados nos oráculos, com previsões feitas por videntes.

Uma das possíveis explicações para a demora no desenvolvimento da probabilidade (muito embora o conceito de probabilidade exista desde a época de Sócrates) é a de que somente no Renascimento, com o advento da indústria e do cálculo infinitesimal, e a mudança de uma visão teocentrista para heliocentrista, os homens passaram a se enxergar como seres dotados de livre arbítrio sendo responsáveis por suas próprias escolhas. Isso pode ser observado nas artes, nas grandes navegações e nas ciências, resultando, por exemplo, em descobertas astronômicas e no desenvolvimento da medicina.

No ano de 1494, o monge franciscano Luca Paccioli publicou seu livro “Summa de arithmetica, geometria et proportionalità”, que além de conter princípios básicos de álgebra, introduziu o sistema de partidas dobradas, até hoje utilizado em contabilidade<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>Em inglês, estes jogos são chamados de *hazard games*, sendo que a palavra *hazard* vem do árabe *al zahr*, que significa dado. A palavra em português azar tem a mesma etimologia, porém foi atribuída uma conotação mais negativa, ao passo que seus correspondentes em espanhol (azar) e francês (hasard) tem um significado de “acaso, chance”.

<sup>4</sup>Diversas técnicas matemáticas foram desenvolvidas para a resolução de problemas práticos, muitas vezes envolvendo contagem de bens ou registro de estoques. Naquela época não havia uma distinção exata

Ao longo da sua obra, Paccioli propôs o seguinte problema: “Dois jogadores,  $A$  e  $B$ , estavam jogando uma partida honesta de *balla*<sup>5</sup>. Eles combinaram de jogar até que um deles ganhasse seis rodadas, porém eles tiveram que encerrar o jogo quando  $A$  estava ganhando por cinco a três de  $B$ . Como o dinheiro da aposta deve ser dividido?”<sup>6</sup>.

Este problema ficou conhecido como *problema dos pontos* e ele (ou suas variações) voltou a aparecer ao longo dos séculos XVI e XVII em diversos manuscritos da matemática. Embora simples, o problema envolve quantificar um evento que não ocorreu e fazer uma divisão que contemple as chances que, cada jogador teria, de ganhar o jogo no momento que a partida é interrompida.

Um dos elementos chaves de resolver o problema é entender o que seria uma divisão justa. A solução original de Paccioli era dividir proporcionalmente ao número de rodadas ganhas. O matemático italiano Niccolò Tartaglia, alguns anos mais tarde, mostrou que essa solução apresentava falhas. Por exemplo, num jogo que é interrompido na primeira rodada, o jogador que a venceu fica com toda a aposta, independente do número de vitórias necessárias. Tartaglia, por sua vez, propôs que a divisão da aposta dependesse apenas da razão entre a diferença do número de vitórias de cada jogador e o número total de partidas. O próprio Tartaglia percebeu que sua solução também apresentava uma falha; num jogo que terminasse quando alguém conseguisse 100 vitórias, se o jogo fosse interrompido em 53-43 (ou seja, o primeiro jogador ganhou 53 rodadas enquanto o segundo ganhou 43) ou em 98-88, a divisão seria a mesma. Porém, no segundo caso, o primeiro jogador está mais perto da vitória. Além de Paccioli e Tartaglia, outras pessoas tentaram resolver, sem sucesso, o problema, e somente em 1654 a solução definitiva para o problema dos pontos seria apresentada.

Blaise Pascal, um francês nascido em 1623, foi um dos responsáveis pela solução do problema dos pontos, embora esse seja apenas um de seus grandes feitos. Quando criança, ele deduziu sozinho uma boa parte da geometria euclidiana, tendo desenhado nas paredes do seu quarto as suas descobertas. Na adolescência, ele desenvolveu e patenteou uma máquina de calcular, que mais tarde daria origem à calculadora que conhecemos nos dias atuais. Após a morte de seu pai, quando já tinha por volta de 30 anos, Pascal conheceu o cavaleiro de Meré, conhecido por suas habilidades matemáticas e seu gosto por jogos. Embora Pascal diminuísse o cavaleiro por sua inabilidade com geometria, reconhecia em seu companheiro uma capacidade grande

---

da economia, contabilidade e matemática como temos nos dias de hoje e por isso as publicações na época de Paccioli hoje seriam vistas como multidisciplinares.

<sup>5</sup>Jogo de azar da época.

<sup>6</sup>Tradução livre de [1], página 43.

de lidar com probabilidades<sup>7</sup>. Na época em que se conheceram, o cavaleiro de Meré estava intrigado com o problema dos pontos proposto mais de um século antes por Paccioli e buscava matemáticos que pudessem ser capazes de apresentar uma solução ao enigma.

Pascal, apesar de suas habilidades matemáticas, não se sentiu confiante para abordar o problema dos pontos sozinho e por isso procurou seus conhecidos de um grupo de matemáticos para ter indicações de alguém que pudesse ter interesse em colaborar no problema. Na época, a forma tradicional de colaboração entre cientistas ou matemáticos era trocar cartas. Através de um conhecido em comum, Pascal chegou ao nome de Pierre de Fermat, um advogado francês que residia na cidade de Toulouse, na França. Fermat foi uma pessoa de notável conhecimento: além de falar os principais idiomas europeus da época (a ponto de escrever poesias em outras línguas), ele tinha conhecimentos profundos em matemática. Foi um pesquisador independente da área de geometria analítica, deu contribuições para o início do desenvolvimento do cálculo, pesquisou sobre como mensurar o peso da Terra e trabalhava na área de refração de luz e ótica. Uma de suas maiores contribuições (ou pelo menos a mais conhecida) é chamada de “último teorema de Fermat”, que intrigou matemáticos do mundo inteiro até sua demonstração no ano de 1994<sup>8</sup> (aproximadamente 300 anos depois de Fermat ter escrito seu enunciado).

A solução do problema dos pontos proposta por Fermat e Pascal se inicia determinando qual dos dois jogadores tem mais pontos (ou partidas ganhas) no momento que o jogo é interrompido. A troca de correspondências entre os dois, feita em 1654, foi um marco no desenvolvimento da probabilidade e, consequentemente, da estatística. Enquanto Fermat utilizou ferramentas de álgebra pura, Pascal buscou uma solução mais inovadora, que apesar de não ser de sua autoria, mais tarde ficou conhecido como triângulo de Pascal.

## Solução do problema dos pontos

Nesta seção, apresentaremos algumas das soluções mais básicas do problema dos pontos apresentadas em [3]. Primeiro vamos reformular o problema de uma maneira mais abstrata e mudando ligeiramente o enunciado apresentado na introdução.

Pascal e Fermat concluíram que a maneira de dividir o dinheiro depende apenas de

---

<sup>7</sup>Apesar de não ter um conhecimento formal, de Meré tinha noções intuitivas muito boas a respeito de probabilidade que ele utilizava em jogos de cartas e dados.

<sup>8</sup>Ver [5] para uma história a respeito do último teorema de Fermat até sua demonstração.

quantas rodadas faltam para cada jogador ganhar. No problema inicial, das 10 vitórias necessárias para ganhar o jogo, Pedro estava com 6 e Maria com 3, ou seja, faltavam 4 vitórias para Pedro e 7 para Maria. Suponha agora, que ao invés de 10 vitórias, eles estivessem apostando em 20 vitórias e Pedro estivesse com 16 e Maria com 13. Note que, no segundo caso, o número de jogos que cada um precisa ganhar é o mesmo que no primeiro. Na solução de Pascal e Fermat, a divisão da aposta será a mesma em ambos os casos.

Assim, podemos enunciar o problema da seguinte forma:

Dois jogadores apostam uma certa quantia em várias rodadas de um jogo justo (isto é, ambos têm a mesma chance de ganhar) até que um deles atinja um certo número de vitórias. Depois de algumas rodadas, faltam  $r_1$  rodadas para o primeiro jogador ganhar e  $r_2$  para o segundo, quando o jogo é interrompido. Qual a maneira mais justa de dividir o dinheiro?

## Método da enumeração

Em uma carta enviada para Pascal, Fermat propõe uma solução para o problema quando o número de rodadas restantes é pequeno. Para exemplificar o método da enumeração, vamos supor  $r_1 = 2$  e  $r_2 = 3$ . Fermat observou que, em no máximo quatro rodadas, o jogo está decidido. Note que o maior número de rodadas acontece quando ambos o jogadores ficam a uma rodada da vitória. No exemplo que estamos tratando, isso ocorre se o primeiro jogador ganha mais uma rodada e o segundo ganha mais duas, totalizando três. Na rodada seguinte, um dos jogadores é necessariamente o vencedor.

Passamos à descrição de todas as possibilidades de quatro rodadas de jogo. Vamos denotar por 1 se o primeiro jogador ganhou a rodada e por 2 se foi o segundo. Por exemplo, 1211 significa que o primeiro jogador ganhou uma, em seguida, o segundo ganhou uma e finalmente, o primeiro ganhou as últimas duas. Temos ao todo 16 casos que são os seguintes:

$$\{1111, 1112, 1121, 1122, 1211, 1212, 1221, 1222, \\ 2111, 2112, 2121, 2122, 2211, 2212, 2221, 2222\}.$$

Agora, listamos em quais possibilidades cada um dos jogadores ganha. Para o primeiro jogador temos

$$\{1111, 1112, 1121, 1122, 1211, 1212, 1221, 2111, 2112, 2121, 2211\},$$

que são todas as ocorrências em que aparecem pelo menos dois 1's (11 casos dos 16 totais); e para o segundo

$$\{1222, 2122, 2212, 2221, 2222\},$$

que são os resultados em que aparecem pelo menos três 2's (5 casos dos 16 totais).

Com isso, Fermat concluiu que o primeiro jogador deve levar 11/16 da quantia total apostada, enquanto o segundo jogador deve levar 5/16 do total.

Alguém poderia desconfiar deste método já que, por exemplo, a sequência de rodadas 1111 não pode ocorrer, pois após os dois primeiros 1's, o vencedor já está determinado. Usando a linguagem atual de probabilidade, vemos que isso não é um problema. A probabilidade de ocorrer a sequência de dois 1's é de  $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ , que é exatamente a razão do número de sequências que começam por 11 (1111, 1112, 1121 e 1122) pelo número total de sequências de quatro rodadas, que é 4/16. Em todas as outras sequências em que um dos jogadores ganha antes das quatro rodadas, temos um raciocínio análogo.

O método da enumeração não é muito prático quando o número de rodadas máximas restantes, digamos  $n$ , é muito grande pois precisamos analisar  $2^n$  possibilidades. Por exemplo, para o problema da introdução teríamos que analisar 1024 casos!

## Aritmética do triângulo

Pascal, depois de receber a carta de Fermat, começou a desenvolver novos métodos para simplificar a solução proposta por Fermat. Primeiro, Pascal desenvolveu o método da recursão (ver [3] para o funcionamento do método) para depois simplificar ainda mais usando o que é hoje em dia conhecido como triângulo de Pascal.<sup>9</sup>

O triângulo é construído usando os coeficientes binomiais  $\binom{n}{k}$ , também denotado por  $C_n^k$ , que representa o número de combinações de  $n$  elementos de  $k$  em  $k$ . Eles são calculados da seguinte forma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

Em cada linha colocamos todos os coeficientes binomiais para um determinado  $n$  fazendo  $k$  crescer de 0 a  $n$ . Por exemplo as cinco primeiras linhas do triângulo são:

---

<sup>9</sup>O triângulo de Pascal já havia sido utilizado séculos antes de Pascal. Ver as referências em [1] e [3].

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & \binom{0}{0} \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & ,
 \end{array}$$

que quando calculadas ficam

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & .
 \end{array}$$

O triângulo de Pascal tem diversas propriedades interessantes e recomendamos ao leitor procurar mais a respeito dele. Veja, por exemplo, [2] e [4].

Vamos analisar como usar o triângulo de Pascal para resolver o problema dos pontos. Voltando para o método da enumeração da subseção anterior no caso em que  $r_1 = 2$  e  $r_2 = 3$ , observe que o primeiro jogador ganha em todas as sequências que têm dois, três ou quatro 1's e perde nas demais. O número de sequências de quatro termos que têm exatamente dois 1's (1122, 1212, 1221, 2112, 2121 e 2211) é o mesmo que o número de combinações de quatro elementos tomados dois a dois. Temos igualdades análogas para os demais casos. Entre as dezesseis sequências, o número de casos favoráveis para o primeiro jogador é então:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11,$$

que é igual à soma dos últimos três números da quinta linha do triângulo.

Vamos expandir as ideias acima para o caso geral. Note que no método de enumeração, o número máximo de rodadas restantes é  $r_1 + r_2 - 1$ . Os coeficientes binomiais que tem  $n = r_1 + r_2 - 1$  na igualdade da equação (2) aparecem na linha  $r_1 + r_2$  do triângulo de Pascal. Argumentando como no parágrafo anterior, concluímos que o número de casos favoráveis ao primeiro jogador é portanto

$$\binom{r_1 + r_2 - 1}{r_1} + \binom{r_1 + r_2 - 1}{r_1 + 1} + \dots + \binom{r_1 + r_2 - 1}{r_1 + r_2 - 1},$$

que é a soma dos últimos  $r_2$  termos da linha  $r_1 + r_2$  do triângulo.

Agora temos condições de resolver a aposta de Maria e Pedro de uma forma mais eficiente. Vamos substituir  $r_1 = 4$  e  $r_2 = 7$  no caso geral. Precisamos olhar para a décima primeira linha do triângulo de Pascal, que é

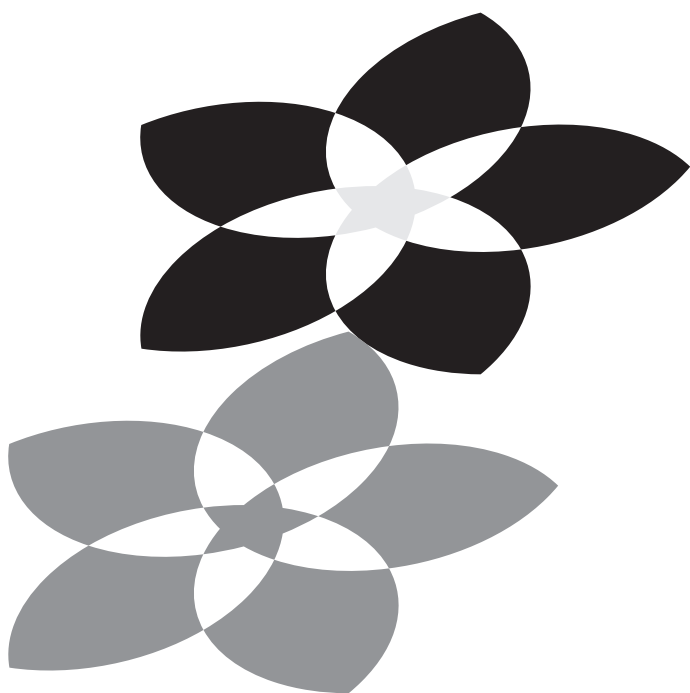
$$1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1$$

Somando os últimos sete termos, obtemos 848. Concluímos que a razão entre o número de vitórias de Pedro com o número total de partidas será de  $848/1024$ . Multiplicando esse valor pelos 10 reais que é o total apostado, obtemos o valor arredondado de 8,28 reais, que é o quanto Pedro deveria receber numa divisão justa. Maria ficaria com o restante, que é 1,72 reais.

## Referências

- [1] P. Bernstein, *Against the Gods - The remarkable history of risk*, John Wiley and Sons Inc., 1998.
- [2] P. Carvalho, J. de Carvalho, P. Fernandez, A. Morgado, *Análise Combinatória e Probabilidade*, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- [3] P. Gorroochurn, *Thirteen Correct Solutions to the "Problem of Points" and Their Histories*, The Mathematical Intelligencer, **8** (2014), 57-64.
- [4] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Matemática Concreta - Fundamentos para a ciência da computação*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1995.
- [5] S. Singh, *O último teorema de Fermat*, Editora Record, 2000.





# Curiosidades

---



---

## Medalha Fields

A medalha Fields, popularmente conhecida como “Prêmio Nobel de Matemática”, foi proposta pelo matemático canadense John Charles Fields no final dos anos 1920 e concedida pela primeira vez em 1936. A cada quatro anos é realizado o Congresso Internacional de Matemáticos (ICM) onde um comitê julga quais trabalhos foram fundamentais para o avanço da matemática e atribui a medalha para duas a quatro pessoas com no máximo 40 anos de idade, os quais recebem 15 mil dólares canadenses cada. Além de ter um brasileiro premiado na última edição do prêmio, em 2018 o evento será realizado em nosso país, na cidade do Rio de Janeiro. Para maiores informações acesse:

<http://www.mathunion.org/general/prizes/fields/details/>.

## Artur Ávila

Artur Ávila Cordeiro de Melo, primeiro brasileiro premiado com a medalha Fields, nasceu em 29 de junho de 1979, no Rio de Janeiro. Ele possui graduação em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), mestrado e doutorado em Matemática pela Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), desde 2001.

Atualmente é pesquisador extraordinário no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e pesquisador no Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), na França.

O pesquisador já foi participante de olimpíadas de matemática, recebendo inclusive medalha de ouro na Olimpíada Internacional de Matemática de 1995, no Canadá.

Para mais informações, acesse a página do pesquisador Artur Ávila:

<http://w3.impa.br/avila/>.

## Panorama atual da matemática (em nível superior e pesquisa em matemática) no Brasil

A qualidade do nosso ensino superior de matemática é considerada muito boa. Por exemplo, a Universidade de São Paulo (USP) e a Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) estão entre as 200 melhores universidades para se estudar matemática no mundo, segundo a ARWU (Academic Ranking of World Universities).

Com relação à pesquisa matemática, uma boa referência para compararmos a nossa

qualidade com a de países de referência é a classificação da IMU (International Mathematical Union), uma organização científica que promove a cooperação entre os países membros na área da matemática. A IMU classifica os países em cinco grupos conforme o seu nível de desempenho em pesquisa matemática: o grupo de elite é o grupo V, o grupo IV é dos segundos melhores colocados, e assim por diante. O Brasil é membro do do grupo IV da IMU, assim como Austrália, Índia, Holanda, Espanha, Suécia e Suíça, entre outros. Alguns membros do grupo V são: Alemanha, Canadá, França, Japão, Rússia e Estados Unidos.

No site do professor e pesquisador Marcelo Viana (<http://w3.impa.br/~viana/>) é possível acessar o arquivo de uma palestra que ele ministrou abordando este tema, que indicamos ao leitor para obter mais informações. Além disso, deixamos também como referência o site da IMU (<http://www.mathunion.org/>).

### Conjectura de Goldbach

Christian Goldbach foi um matemático prussiano-russo nascido em Königsberg, Prússia, hoje Kaliningrado, Rússia. Especialista em teoria dos números, formulou a conhecida conjectura (uma afirmação que ainda não se sabe se é verdadeira ou falsa) sobre números primos em 1742:

**Conjectura de Goldbach:** Qualquer número par maior ou igual a 4 pode ser decomposto como a soma de dois números primos.

Vejamos algum exemplos:

$$4 = 2 + 2,$$

$$10 = 3 + 7,$$

$$30 = 19 + 11 \text{ e}$$

$$120 = 113 + 7.$$

No ano de 1900 o matemático alemão David Hilbert ministrou uma palestra histórica no Congresso Internacional de Matemática em Paris. Nesta palestra Hilbert apresentou uma lista de 23 problemas abertos que nortearam de uma certa forma o desenvolvimento da matemática no século XX. Dentre estes problemas está a Hipótese de Riemann (8º problema) que desafia os matemáticos até hoje. Segundo Hilbert, a Hipótese de Riemann está associada a conjectura de Goldbach. Para maiores informações sobre esta palestra veja, por exemplo, <http://www.clarku.edu/~djoyce/hilbert/>.



# **Soluções dos Problemas Propostos**

---



1. (Proposto na Revista da ORM, número 12) Prove que:

$$S = \frac{1}{66}(100)(101)(201)(10099)(3 \cdot 10^{12} + 9 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^8 - 11 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 995),$$

é inteiro.

**SOLUÇÃO** (apresentada por Gabriel Simon Schafaschek, Luis Eduardo Fritsch e Mateus Souza Oliveira, alunos de graduação do curso de Matemática - Licenciatura da UFSC)

Sejam  $x = (3 \cdot 10^{12} + 9 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^4 + 995)$  e  $y = 11 \cdot 10^6$ .

Para provar que  $S$  é inteiro, basta que  $66|(100)(101)(201)(10099)(x - y)$ .

Note que  $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ , então:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 11}(100)(101)(201)(10099)(x - y) \\ &= \frac{1}{11}(50)(101)(67)(10099)(x - y). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que  $11|(x - y)$ . Para isto, vamos mostrar que  $11|x$  e  $11|y$ .

De fato, como  $y = 11 \cdot 10^6$ , temos que  $11|y$ . Além disto, note que:

$$x = (3 \cdot 10^{12} + 9 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^4 + 995) = 3090200030995.$$

Lembre que o critério de divisibilidade por 11 diz o seguinte: para um número  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n$  ser múltiplo de 11, devemos ter que

$$11|(a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n).$$

Como

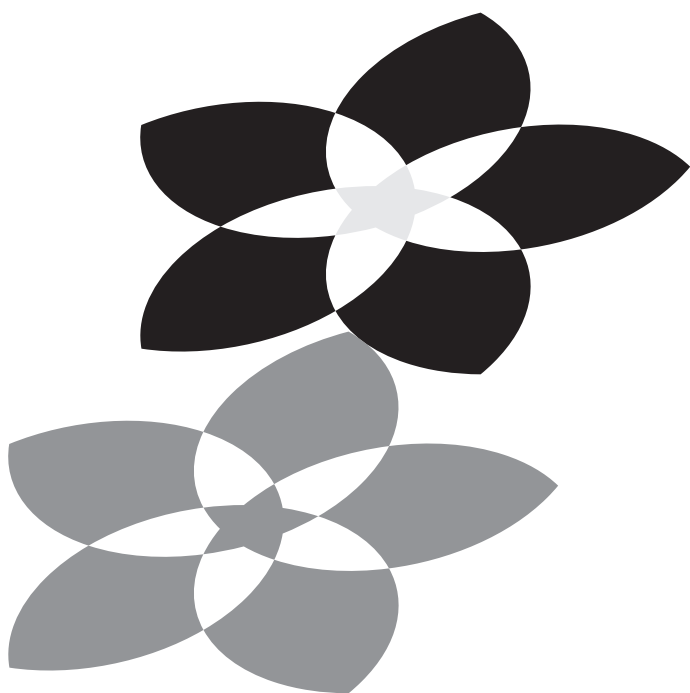
$$5 - 9 + 9 - 0 + 3 - 0 + 0 - 0 + 2 - 0 + 9 - 0 + 3 = 22 = 2 \cdot 11,$$

segue que  $11|x$ , e  $S$  é inteiro.

*Também enviou solução deste problema Lorenzo Andreus, aluno do ensino médio da Escola Técnica do Vale do Itajaí e medalhista de ouro na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (nível 2).*







# **Problemas Propostos**

---



---

*Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão um exemplar da mesma (Veja "Informações Gerais").*

1. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)*

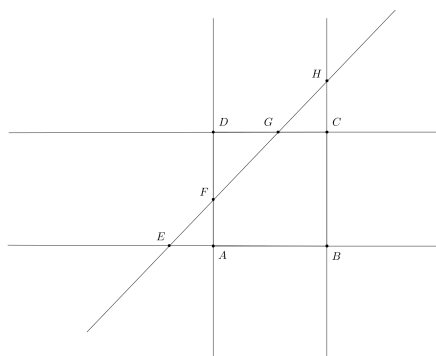
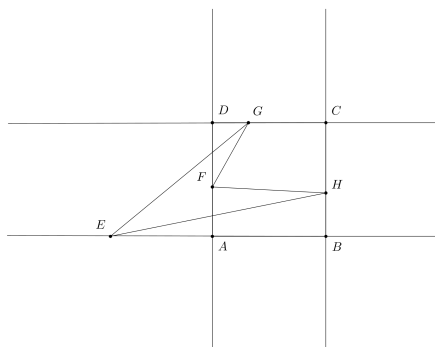
Sejam  $A = (abc)_{10}$ , em que  $((abc)_{10} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)$ , um número natural de 3 algarismos e  $T = (ab)_{10} - 2c$ , em que  $((ab)_{10} = a \cdot 10 + b)$ . Prove que  $10T$  é divisível por 7 se e somente se  $A$  é divisível por 7. Será possível substituir  $10T$  por  $T$ ?

2. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)*

Um terreno retangular de lados inteiros está completamente dividido em quadrados idênticos. Plantando uma muda (de árvore) em cada um dos vértices dos quadrados haverá 25 a mais do que plantando uma muda no centro de cada quadrado. Se a medida de um dos lados é múltiplo de 5, quantas são as possibilidades para as dimensões do terreno?

3. (Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)

Considere as figuras abaixo:



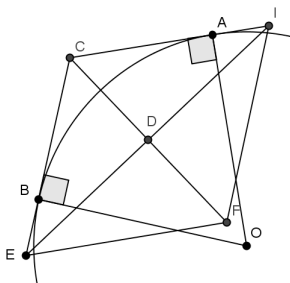
Em cada figura têm-se 4 pontos distintos e um quadrado, em que cada lado (ou seu prolongamento) possui um dos pontos.

Nas mesmas condições, obter o quadrado quando:

- Os 4 pontos são vértices de um paralelogramo.
- Os 4 pontos são vértices de um quadrilátero convexo arbitrário.

4. (Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)

Para se provar que a aceleração centrípeta, em uma trajetória de arco circular tangenciando um losango CEFI (figura abaixo), é dada por  $a_c = \frac{V^2}{R}$ , dois autores\* afirmam que na figura abaixo, a reta  $\overleftrightarrow{CF}$  passa pelo centro  $O$  da circunferência. Prove que  $C$ ,  $F$  e  $O$  são colineares.



\*The new graphical representation of centripetal acceleration, E. Krupa . W.T.Krupa, Phys. Educ Vol 32 nº5 09/97.

5. (Proposto pelo Professor José Luiz Rosas Pinho, tutor do PET Matemática)

- Prove que todo triângulo é o triângulo órtico de outro triângulo.
- Prove que, se o triângulo órtico de um triângulo acutângulo  $\triangle ABC$  for semelhante a ele, então o  $\triangle ABC$  é equilátero.
- Prove que se um triângulo tem ângulos de medidas:  $\alpha$ ,  $2\alpha$  e  $4\alpha$  (e portanto obtusângulo), então o seu triângulo órtico é semelhante a ele.

**Observação:** O triângulo órtico de um triângulo  $\triangle ABC$  é o triângulo cujos vértices são as projeções dos vértices do triângulo  $\triangle ABC$  sobre as retas que contêm os respectivos lados opostos (pés das alturas do triângulo  $\triangle ABC$ ).

6. (*Proposto por Lorenzo Andreaus, aluno do ensino médio da Escola Técnica do Vale do Itajaí e medalhista de ouro na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (nível 2)*)

- (a) Prove que se um número inteiro não é um quadrado perfeito, então a sua raiz quadrada é um número irracional.
- (b) Prove que se temos dois números inteiros que não são quadrados perfeitos, então a soma de suas raízes quadradas é um número irracional.



# **Premiados da ORM em Olimpíadas de Matemática**

---





## Premiados da ORM em Olimpíadas de Matemática

### **Airton José Schmitt Junior - Biguaçu**

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 3)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

### **Amadeo Zimmermann - São Pedro de Alcântara**

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Prata na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

### **Ana Carolina de Medeiros da Silva - Joinville**

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

### **Ana Cláudia Zezulka - Florianópolis**

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 1)

### **Anderson Negreli - São Bento do Sul**

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Prata na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

#### **André Victória Matias - Criciúma**

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

#### **Bruno da Silveira Dias - Florianópolis**

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

#### **Bruno Leonardo Schneider - São José**

Medalha de Bronze na I Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1998 (Nível 1)

Medalha de Prata na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)

Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Menção Honrosa na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Menção Honrosa na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)

Medalha de Prata na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

#### **Bruno Mota - Joinville**

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

### **Bruno Nunes - Joinville**

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

### **Carlos Bruno Medeiros da Costa Pereira Neto - Joinville**

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

**Caroline da Silveira - Joinville**

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

**Cristine Buettgen - Pomerode**

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

**Douglas Ohf - Joinville**

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

**Eduardo Adelano Agostini Pasold - Timbó**

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

**Eduardo José Mendes - Biguaçu**

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

**Eduardo Lennert Rammé - Joinville**

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2011 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

### **Elisangela Dornelles - Massaranduba**

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

### **Felipe Paupitz Schlichting - Florianópolis**

Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)

Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2001 (Nível 2)

Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

### **Fernanda Momm Antunes - Joinville**

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

### **Fernando Luiz Alves Lapa - Joinville**

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Prata na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Menção Honrosa na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

### **Gabriel Augusto Moreira - Joinville**

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas



em 2009 (Nível 2)

**Gabriel Machado - Massaranduba**

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 1)

**Gabriella Maria Radke Chaves - Joinville**

Medalha de Bronze na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

**Gislaine Hoffmann - Antônio Carlos**

Medalha de Prata na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Medalha de Prata na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

**Giuliano Boava - Criciúma**

Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 3)

Medalha de Prata na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 3)  
Menção Honrosa na III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2000  
Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2001  
Menção Honrosa na IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2001  
Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2002  
Menção Honrosa na V Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2002  
Medalha de Bronze na XXV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2003  
Medalha de Bronze (Third Prize) na X Internacional Mathematical Competition for University Students em 2003 - Cluj-Napoca, Romênia  
Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2004

### **Guilherme Rohden Echelmeier - Itajaí**

Medalha de Prata na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)  
Medalha de Ouro na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)  
Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)  
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)  
Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 2)  
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)  
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)  
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)

### **Guilherme Weber Menon - Joinville**

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)  
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

---

2011 (Nível 3)

**Gustavo Bernardo de Oliveira - Joinville**

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

**Gustavo Lisbôa Empinotti - Florianópolis**

Medalha de Prata na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)

Medalha de Ouro na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Medalha de Prata na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na 13ª Olimpíada de Maio em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XIX Olimpíada de Matemática do Cone Sul em 2008 - Temuco, Chile

Medalha de Prata na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na LI Olimpíada Internacional de Matemática em 2010 - Astana, Cazaquistão

Medalha de Bronze na III Romanian Master in Mathematics em 2010

Medalha de Bronze na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2010

Medalha de Prata na 25ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2010 - Assunção, Paraguai

Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na IV Romanian Master in Mathematics em 2011

Medalha de Prata na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2011

Medalha de Bronze na LII Olimpíada Internacional de Matemática em 2011 - Amsterdã, Holanda

**Hanna Kurihara e Silva - Florianópolis**

Medalha de Bronze na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

1999 (Nível 1)

Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)

Medalha de Bronze na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)

Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)

Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

### **Helena Carolina Rengel Koch - Jaraguá do Sul**

Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

### **Ivani Ivanova Ivanova - Blumenau**

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Prata na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

### **Janine Garcia - São Francisco do Sul**

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

### **João Marcos Carnieletto Nicolodi - Florianópolis**

Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 1)

Medalha de Ouro na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

### **Julia Almeida Oliveira - Joaçaba**

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

### **Júlia Bertelli - Joinville**

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 1)

Medalha de Prata na 17ª Olimpíada de Maio em 2011 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

### **Julia Heck Deters - Itapiranga**

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

### **Karina Livramento dos Santos - Navegantes**

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

**Katarine Emanuela Klitzke - Timbó**

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 1)

Menção Honrosa na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 2)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 2)

**Laiane Freitas Suzart - Joinville**

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

**Leandro Augusto Lichtenfelz - Blumenau**

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2008

Medalha de Prata (Second Prize) na XVI Internacional Mathematical Competition for University Students em 2009 - Budapeste, Hungria

**Leandro Jun Kimura - Joinville**

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em

2008 (Nível 1)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

### **Leandro Roza Livramento - Florianópolis**

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

### **Leonardo Gonçalves Fischer - Fraiburgo**

Medalha de Bronze na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)

Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)



Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

**Leonardo Lennert Rammé - Joinville**

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Prata na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

**Leonard Henrrik Wodtke - Joinville**

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

**Letícia Perini - Timbó**

Menção Honrosa na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

**Lorenzo Andreus - Blumenau**

Medalha de Ouro na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XXXVIª Olimpíada Brasileira de Matemática em 2014 (Nível 2)

**Lucas Bruno Barbosa Sandoval - Florianópolis**

Medalha de Ouro na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 2)

Medalha de Bronze na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 3)

**Lucas Gabriel Kruttsch - Massaranduba**

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Menção Honrosa na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 1)

**Lucas Lolli Savi - Florianópolis**

Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 2)

Medalha de Bronze na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)

**Luis Fernando Momm Antunes - Joinville**

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

**Luiz Fernando Bossa - Brusque**

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em

2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Menção Honrosa na XXXV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2013 (Nível Universitário)

### **Mateus Spezia - Blumenau**

Medalha de Prata na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 3)

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 3)

Medalha de Prata na 10ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2014 (Nível 3)

### **Mikhail Zimmer Heidrich - Lages**

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Menção Honrosa na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 3)

### **Murilo Schoffen Prado - Florianópolis**

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2014 (Nível 1)

### **Natália Deyse Koch - Chapecó**

Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 3)

### **Natan Cardozo Leal - São Bento do Sul**

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)

Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)

Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 3)

Medalha de Prata na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)

Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

### **Nicole Braga de Medeiros Nicolak - Joinville**

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

### **Rafael Della Giustina Basilone Leite - Florianópolis**

Medalha de Ouro na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2012 (Nível

1)

Medalha de Prata na XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2013 (Nível 2)

Medalha de Prata na XVII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2014 (Nível 2)

Menção Honrosa na XXXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2014 (Nível 2)

### **Renan Henrique Finder - Joinville**

Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)

Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Medalha de Prata na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)

Menção Honrosa na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 2)

Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 2)

Medalha de Prata na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XVIII Olimpíada de Matemática do Cone sul em 2007 - Uruguai

Medalha de Prata na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)

Medalha de Prata na 23ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2008 - Brasil

Medalha de Prata na 49ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2008 - Madri, Espanha

Medalha de Prata na 50ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2009 - Bremen, Alemanha

Medalha de Ouro na 24ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2009 - Santiago de Querétaro, México

Medalha de Ouro na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2010

Medalha de Ouro na XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2011

Medalha de Ouro (First Prize) na XVIII International Mathematics Competition for University Students em 2011

Medalha de Prata na III Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática em 2011 - Quito, Equador

Medalha de Ouro (First Prize) na XIX Internacional Mathematical Competition for University Students em 2012 - Blagoevgrad, Bulgária

Medalha de Ouro na IV Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática em 2012 - Guanajuato, México

### **Rodrigo Vicente Cercal - Joinville**

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

### **Rogério Hannemann Júnior - Joinville**

Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

### **Ruan Victor Soares da Silva - Joinville**

Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

**Shadi Bavar - Blumenau**

Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

**Sidnei Rodrigo Dos Santos - Jaraguá do Sul**

Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)

Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Medalha de Prata na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 3)

**Simon Joel Warkentin - Joinville**

Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Menção Honrosa na 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2013 (Nível 2)

**Thais Jandre - Pomerode**

Menção Honrosa na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (Nível 1)

Medalha de Bronze na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 1)



**Tiago Madeira - Itajaí**

Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 1)

Medalha de Bronze na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 2)

Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada de Maio em 2003 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 2)

Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada de Maio em 2005 (Nível 2)

Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)

Medalha de Prata na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)

**Vitor Costa Fabris - Criciúma**

Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)

Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)

Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

**Vitor Probst Curtarelli - Timbó**

Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)

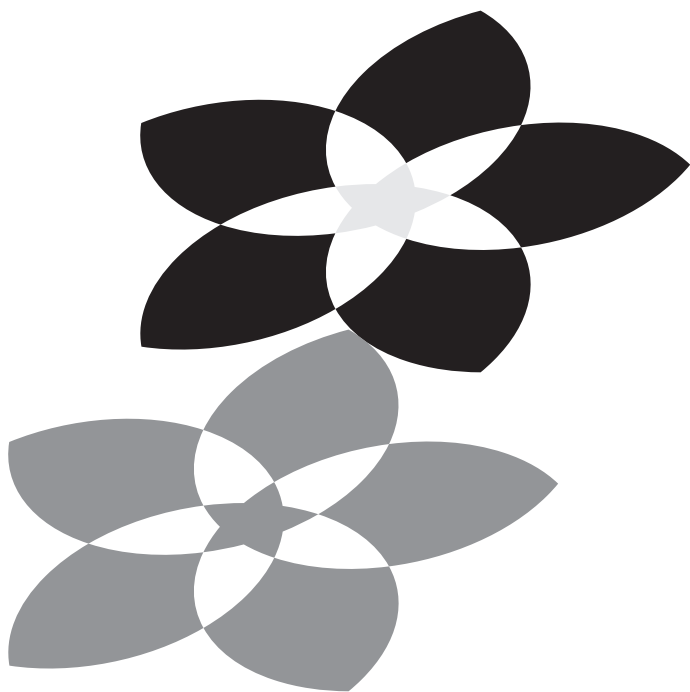
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Medalha de Prata na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Medalha de Bronze na XV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2012 (Nível 2)

Medalha de Ouro na 8ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2012 (Nível 2)



# **Informações Gerais**

---



## Envio de Problemas e Soluções

As seções de problemas propostos e soluções são seções dinâmicas. Contribua propondo problemas ou enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário. Porém, podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

## Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pelo comitê editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o  $\text{\LaTeX}$ , então o artigo deverá ser preferencialmente submetido neste formato.

## Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) devem cadastrar suas escolas. O cadastramento para a OBM e ORM é feito somente no site da OBM ([www.obm.org.br](http://www.obm.org.br)). Escolas já cadastradas em anos anteriores deverão confirmar a cada novo ano a sua inscrição. Para o cadastramento será necessário o código do Inep da escola. Existe um período para cadastramento ou confirmação. Consulte o site da OBM. No site não aparece a opção para cadastramento na ORM. As escolas cadastradas para a OBM estarão automaticamente cadastradas para a ORM. No cadastramento deve ser indicado o nome de apenas um dos seguintes coordenadores regionais: José Luiz Rosas Pinho ou Lício Hernanes Bezerra.

Alunos interessados em participar das olimpíadas devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

## Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberem a revista podem solicitar o envio da mesma.

Além disso, a revista é enviada às universidades federais brasileiras (um exemplar por IES), por intermédio da Biblioteca Universitária da UFSC.

## Erramos

Na Revista nº 12, deve ser observada a seguinte alteração:

- Questão 2: As paredes de uma galeria de arte formam um polígono simples de  $n$  lados (regular ou não, convexo ou não). Deseja-se obter o número mínimo de guardas para cuidar da galeria. Os guardas devem ser colocados em locais fixos e só podem mexer a cabeça para vigiar. Sabendo que a fórmula geral para o número mínimo de guardas necessários para vigiar galerias de  $n$  lados é  $g(n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ , que representa a maior parte inteira de  $\frac{n}{3}$ , dê um exemplo:

(a) de um hexágono tal que  $g(6) = \left\lceil \frac{6}{3} \right\rceil = 2$ ,

(b) de um undecágono tal que  $g(11) = \left\lceil \frac{11}{3} \right\rceil = 3$ .

- Questão 3: Uma das questões da 70ª Competição Matemática William Lowell Putman - EUA (o primeiro lugar recebe 25000 dólares) pede para mostrar que todo racional positivo pode ser escrito como um quociente de fatoriais de primos (não necessariamente distintos). Por exemplo:  $\frac{7}{18} = \frac{7!2!}{3!3!3!5!}$ .

(a) Escreva nessa forma os números 11 e  $\frac{17}{22}$ .

(b) Mostre que todo primo pode ser escrito desta forma.

**Sugestão:**  $p = \frac{p!}{(p-1)!}$ .

## Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

- nosso site: [www.orm.mtm.ufsc.br](http://www.orm.mtm.ufsc.br);
- telefone/Fax: (48) 37214595 (PET Matemática);
- e-mail: [orm@pet.mtm.ufsc.br](mailto:orm@pet.mtm.ufsc.br);
- endereço: PET Matemática

Departamento de Matemática - CFM  
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina  
Campus Universitário - Trindade  
88040-900 – Florianópolis/SC.