Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

Nº10, 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Reitora: Roselane Neckel
Vice-Reitora: Lúcia Helena Pacheco

PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO - PROEX

Pró-Reitor: Edison da Rosa

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD

Pró-Reitora: Roselane Fátima Campos

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM

Diretor: Valdir Rosa Correia
Vice-Diretor: Licio Hernanes Bezerra

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Chefe: Rosimary Pereira
Sub-Chefe: Oscar Ricardo Janesch

Apoio:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina/
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],
2004 -
v.: 10 (2013) 23 cm

Anual
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas,
Exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas.

Comissão da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:

Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina: José Luiz Rosas Pinho.

Coordenador da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina: Danilo Royer e José Luiz Rosas Pinho.

Professores: Carmem Suzane Comitre Gimenez, Danilo Royer, Eliezer Batista, Giuliano Boava, Licio Hernanes Bezerra e Nereu Estanislau Burin.

Bolsistas da Olimpíada: Adrian da Silva Solecki, Ana Carolina Cordeiro Silva, Ana Cristina Medaglia Dyonisio, Anieli Joana de Godoi, Cláudia Dal Pont Rocha, Gabriela Finn, Jaqueline Toniolo, Josiane Marina Hoffmann, Leonardo Yuzo Dal Cortivo e Mauricio Policarpo.

Bolsistas do PET Matemática: Ado Raimundo Dalla Costa, Aline Regina Becher, Carolina de Oliveira Carvalho, Daniella Losso da Costa, Douglas Manoel Guimarães, Eduardo Pandini Barros, Fernando Leandro, Jádina Amaro, Leonardo Businhani Biz, Maria Cláudia Schmitt Araujo, Mike Christian Nascimento de Lima, Mônica Kerscher e Natã Machado.

Comitê Editorial da Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:
Aline Regina Becher
Ana Cristina Medaglia Dyonisio
Carmem Suzane Comitre Gimenez
Danilo Royer
Eliezer Batista
Giuliano Boava
José Luiz Rosas Pinho
Josiane Marina Hoffmann
Leonardo Yuzo Dal Cortivo
Licio Hernanes Bezerra
Nereu Estanislau Burin

Editoração Eletrônica:
Ana Cristina Medaglia Dyonisio
Alda Dayana Mattos
Josiane Marina Hoffmann
Leonardo Yuzo Dal Cortivo
Rodrigo Maciel Rosa

Tiragem:
1500 exemplares

Arte da Capa:
Rafaela Goulart de Andrade
Renata Leandro Becker

Postagem:
Segundo semestre de 2012.

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina Nº10, 2013

ISSN 1679-7612

Sumário

Apresentação

Neste ano comemoramos 10 anos desta *Revista* e 15 anos da *Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM)*, ambas resultantes de projetos de extensão do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática (SESu/MEC) da UFSC e, do ponto de vista institucional, através de nossa coordenação e da participação de mais seis professores do Departamento de Matemática, projetos de extensão deste Departamento.

Os projetos têm sido nos últimos anos totalmente organizados e desenvolvidos por bolsistas de extensão, com bolsas do programa PROBOLSAS da Pró-Reitoria de Extensão (PROEX) da UFSC, por bolsistas de permanência da Pró-Reitoria de Assuntos Estudantis (PRAE), por eventuais bolsistas de estágio (PROGRAD) e por bolsistas do PET Matemática. Os professores têm importante participação proferindo palestras nos *Encontros dos Professores da ORM*, na elaboração das provas da segunda fase da ORM, na correção, conjunta com os bolsistas, dessas provas, no comitê editorial desta *Revista* e, eventualmente escrevendo artigos para a *Revista*.

Esta *Revista* vem sendo totalmente financiada nos últimos anos através do projeto *Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática / Olimpíada Brasileira de Matemática* (MCTI/CNPq/MEC/CAPES/FNDE).

Nesses 15 anos de ORM podemos dizer que conseguimos estabelecer uma cultura de Olimpíadas de Matemática nas escolas, com a participação ativa de muitos professores de matemática dessas escolas o que tornou, como consequência, os problemas--desafio uma prática mais comum nos currículos escolares do ensino básico. Além disso, a ORM vem descobrindo jovens talentos que se destacaram em todos esses anos, não somente na *Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)* (oito menções honrosas, nove medalhas de bronze, oito medalhas de prata e quatro medalhas de ouro), mas também em olimpíadas internacionais (veja a seção *Premiados da ORM em Olimpíadas de Matemática*), tais como a *International Mathematical Olympiad (IMO)* (duas medalhas de prata e duas medalhas de bronze), a *Olimpíada de Maio* (duas menções honrosas, três medalhas de bronze e uma medalha de prata), a *Olimpíada do Cone Sul* (uma medalha de bronze e uma medalha de ouro), a *Olimpíada Iberoamericana de Matemática* (duas medalhas de prata), a *Romanian Master in Mathematics* (uma menção honrosa e uma medalha de bronze), a *Asian Pacific Mathematics Olympiad* (uma medalha de bronze e uma medalha de prata). Além disso alguns alunos continuaram a se destacar nas olimpíadas universitárias: a *Olimpíada Brasileira de Matemática - nível universitário* (uma menção honrosa, duas medalhas de bronze, uma medalha de prata e duas medalhas de ouro), e as internacionais *Olimpíada Iberoame-*

ricana Universitária de Matemática (três menções honrosas e uma medalha de prata), e a *International Mathematics Competition for University Students* (uma medalha de bronze, uma medalha de prata e duas medalhas de ouro). No total são 19 prêmios em olimpíadas internacionais pré-universitárias e 15 prêmios em olimpíadas internacionais universitárias.

Este número da *Revista* é dedicado a todas aquelas pessoas que tornaram possível a realização desses dois projetos em Santa Catarina: estudantes do Curso de Matemática (bolsistas de extensão, permanência e PET) , professores do Departamento de Matemática da UFSC e pessoal de apoio (Pró-Reitorias e Imprensa Universitária).

A partir deste ano passamos a contar com a participação na coordenação desta *Revista* do professor Danilo Royer, do Departamento de Matemática da UFSC e membro da Comissão da ORM.

Florianópolis, 1 de dezembro de 2012.

José Luiz Rosas Pinho

Tutor do PET Matemática da UFSC

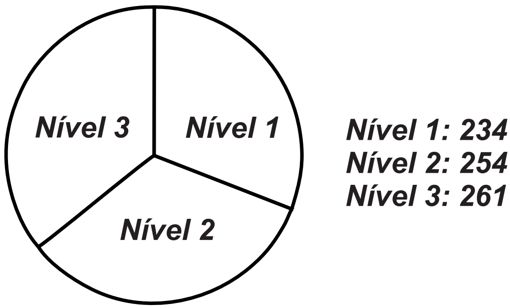
Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

XIV ORM (2011)

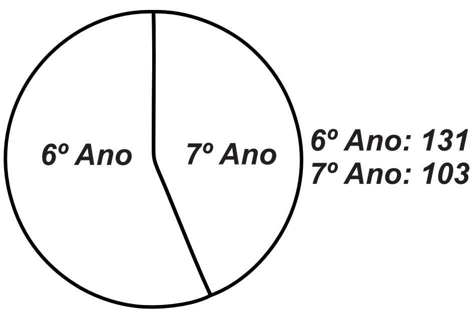
XIV ORM em Números

Na primeira fase da XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina participaram 5.867 alunos de ensino fundamental e médio, oriundos de 105 escolas públicas e particulares de 41 municípios do estado. Deste total, foram classificados 1.263 alunos para a segunda fase, dos quais 749 compareceram para realizar a prova, cujas distribuições por níveis e anos são mostradas abaixo.

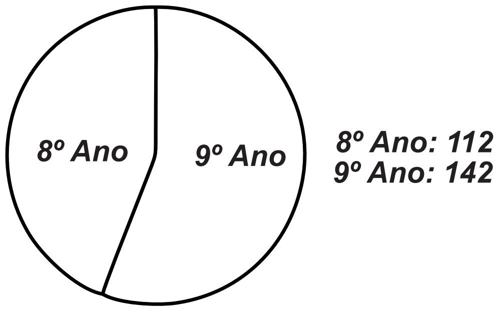
Total de alunos participantes da segunda fase, separados por níveis



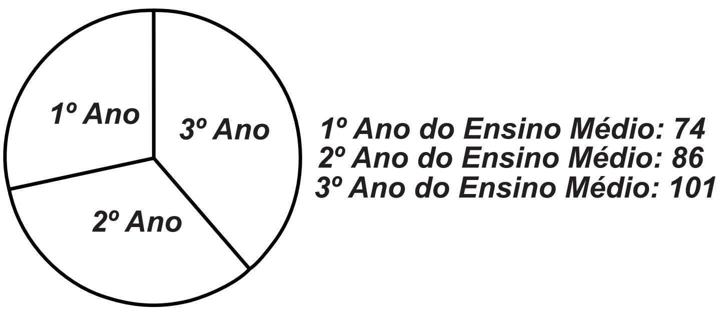
Nível 1



Nível 2



Nível 3



Premiados

A Cerimônia de Premiação da XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina ocorreu no dia 19 de novembro de 2011, no Centro de Cultura e Eventos da Universidade Federal de Santa Catarina e contou com a presença das seguintes autoridades: Débora Peres Menezes, Pró-Reitora de Pesquisa e Extensão (antiga PRPE) representando o Reitor Alvaro Toubes Prata, Nereu Estanislau Burin, Coordenador do Curso de Matemática, e Sandra Regina Salvador Ferreira, Diretora do Departamento de Integração Acadêmica e Profissional (DIP) representando a Pró-Reitora de Ensino e Graduação (antiga PREG) Yara Maria Rauh Müller; juntamente com professores do Departamento de Matemática, responsáveis pela olimpíada.

Na cerimônia, foram premiados 80 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 10,7% dos alunos que participaram da segunda fase): 5 com medalhas de ouro, 12 com medalhas de prata, 22 com medalhas de bronze e 41 com menções honrosas.

Prêmio William Glenn Whitley[1]

- Diego Wyzykowski (Joinville)

Nível 1

Ouro

- Eduardo Lennert Rammé (Joinville)
- Luccas Scaravelli (Florianópolis)
- Luiz Antônio de Aquino (Florianópolis)

Prata

- Gustavo Adriano (Joinville)
- Mateus Longen (Rio do Sul)
- Micaela Fernandez Leitão (Florianópolis)

[1] O prêmio é destinado ao aluno com a maior pontuação na Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina. Esta é uma homenagem ao professor William Glenn Whitley (ver revista da ORM nº 4) e começou a ser entregue no ano de 2006.

- Paulo Henrique Alves Kammradt (Joinville)
- Yago Chede Collaço (Criciúma)

Bronze

- Alessandra da Silva Dias Malizia (Itajaí)
- Gabriela Nunes Silva (Florianópolis)
- João Pedro Alves Scremin (Joinville)
- Julia Almeida Oliveira (Joaçaba)
- Laura Emerim Silva (Florianópolis)
- Lucas Alberto Tavares Gorges (Lages)
- Lucas Trindade Betega (São José)
- Vinicius Moser (Joinville)
- Vitor Malburg Kolb (Joinville)

Menção Honrosa

- Arthur Gustavo Lenzi (Joinville)
- Beatriz Zimmermann D'Avila (Rio do Sul)
- Danilo Gartner Aurich (Florianópolis)
- Elisangela Dornelles (Massaranduba)
- Felipe Eduardo Candinho (Blumenau)
- Gabriel Hartmann de Azeredo (Blumenau)
- Gabriel Thiem (Blumenau)
- Guilherme Souza Pereira (Florianópolis)
- Marcos Paulo Campos Assis (Criciúma)

- Ricardo Bornhausen Meneghini (Joinville)
- Richard Menezes Martins (Florianópolis)
- Rodrigo Vicente Cercal (Joinville)
- Simon Joel Warkentin (Joinville)
- Yan Filipe Grave Bieger (Florianópolis)

Nível 2

Ouro

- Diego Wyzykowski (Joinville)

Prata

- Lucas Da Silveira Guadagnin (Criciúma)

Bronze

- Davi Gustavo Lisboa Girardi (Florianópolis)
- Eduardo Ferrari Ghizzo (Joinville)
- Júlia Bertelli (Joinville)
- Viktoria Weihermann (São Bento do Sul)

Menção Honrosa

- Airton José Schmitt Junior (Biguaçu)
- Bianca Tribéss (Pomerode)
- Bruno Alexis Morales Huaco (Itajaí)
- Bruno Mota (Joinville)
- Bruno Nunes (Joinville)
- Caio Linhares Prujansky (Florianópolis)

- Christian Shikanai Feliciano (São José)
- Fernanda Momm Antunes (Joinville)
- Gabriel Machado (Massaranduba)
- Gabriel Müller (Santo Amaro da Imperatriz)
- Guilherme Bertazi Viana Cavalcanti (Florianópolis)
- Guilherme Schuler Dambroso (Videira)
- Leonardo Lennert Rammé (Joinville)
- Lucas Steuernagel (Joinville)
- Luis Fernando Momm Antunes (Joinville)
- Ruan Olsen (Rio Negrinho)
- Shadi Bavar (Blumenau)
- Vitor Probst Curtarelli (Timbó)

Nível 3

Ouro

- Lucas Tadeu Krüger Poffo (Joinville)

Prata

- Amadeo Zimermann (São Pedro de Alcântara)
- Henrique Mazzuchelo Espíndola (Tubarão)
- Ivani Ivanova Ivanova (Blumenau)
- Leonardo Estevo Martins (São José)
- Luís Antônio Vinholi (Joinville)
- Miguel Bauschat (Blumenau)

Bronze

- Analiz Hüntemann Garcia (Santo Amaro da Imperatriz)
- Fernando Luiz Alves Lapa (Joinville)
- Gabriela Marques De Almeida (Florianópolis)
- Guilherme Weber Menon (Joinville)
- Leandro Jun Kimura (Joinville)
- Paulo Vinícius Lisboa Girardi (Florianópolis)
- Sidnei Rodrigo dos Santos (Jaraguá do Sul)
- Vinícius Martins Freire (Florianópolis)
- Willian Feldmann Kumlehn (Joinville)

Menção Honrosa

- André Victória Matias (Criciúma)
- Helena Carolina Rengel Koch (Jaraguá do Sul)
- Jéssica Ilha da Silva (São José)
- Lucas Colzani (Gaspar)
- Natália Deyse Koch (Chapecó)
- Natan Votre (Criciúma)
- Rafael Tormena (Joinville)
- Rodrigo Reimert da Silva (Joinville)
- Victor Hamann Pereira (Blumenau)

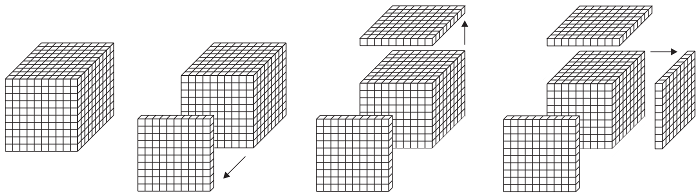
Escolas Participantes

Associação Educacional Luterana Bom Jesus (Joinville); CECAM Centro de Educação Camboriú Ltda. (Camboriú); Centro Educacional Caminho do Saber (Rio Negrinho); Centro Educacional Companhia do Saber (São José); Centro Educacional Criativo (Florianópolis); Centro Educacional Machado de Assis (Joinville); Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis); Centro Educacional Paraíso Infantil (Florianópolis); Centro Educacional Pedro dos Santos (Rio do Sul); Centro Educacional Roberto Machado (Rio do Sul); Cetisa (Timbó); CEUS (Maravilha); Colégio Bom Jesus (São Bento do Sul); Colégio Bom Jesus Coração de Jesus (Florianópolis); Colégio Bom Jesus Divina Providência (Jaraguá do Sul); Colégio Bom Jesus Santo Antônio (Blumenau); Colégio Catarinense (Florianópolis); Colégio Cenecista José Elias Moreira (Joinville); Colégio Cenecista Pedro Antônio Fayal (Itajaí); Colégio Cenecista São José (Rio Negrinho); Colégio da Lagoa (Florianópolis); Colégio da Univille (Joinville); Colégio de Aplicação da UFSC (Florianópolis); Colégio de Ensino Médio Univille (São Bento do Sul); Colégio Dehon (Tubarão); Colégio Dom Bosco (Rio do Sul); Colégio Dom Jaime Câmara (São José); Colégio dos Santos Anjos (Joinville); Colégio Elisa Andreoli (São José); Colégio Energia (Florianópolis); Colégio Evolução (São Ludgero); Colégio Gardner (São José); Colégio Geração (Florianópolis); Colégio Global (São Bento do Sul); Colégio Madre Francisca Lampel (Gaspar); Colégio Marista (Criciúma); Colégio Nossa Senhora de Fátima (Florianópolis); Colégio Sagrada Família (Itapiranga); Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí); Colégio Santa Catarina (Florianópolis); Colégio Santa Rosa de Lima (Lages); Colégio Santo Antônio (Joinville); Colégio São Bento (Criciúma); Colégio Sinodal Doutor Blumenau (Pomerode); Colégio Superação (Videira); Colégio Tendência (Florianópolis); Colégio Tradição (Florianópolis); Colégio Tupy (Joinville); Colégio Universitário (Gaspar); Cooperativa Educacional de Imbituba (Imbituba); EB Ministro Pedro Aleixo (Massaranduba); EBM Álvaro Tancredo Dippold (São Francisco do Sul); EBM Doutor Franklin de Oliveira (São Francisco do Sul); EBM Waldemar da Costa (São Francisco do Sul); **E**ducandário Imaculada Conceição (Florianópolis); **E**EB Almirante Barroso (Canoinhas); **E**EB Altamiro Guimarães (Antônio Carlos); **E**EB Erwin Radtke (Blumenau); **E**EB Manoel Dutra Bessa (Urubici); **E**EB Osvaldo Aranha (Joinville); **E**EB Professor José Rodrigues Lopes (Garopaba); **E**EB e Profissional Professora Adélia Cabral Varejão (Laguna); **E**EB São Bento (São Bento do Sul); **E**EB Willy Hering (Rio do Sul); **E**EBM Professora Laura Andrade (Turvo); **E**EM Professor Roberto Grant (São Bento do Sul); **E**M Caravaggio (Nova Veneza); **E**M Governador Pedro Ivo Campos (Joinville); **E**M Joaquim Vicente de Oliveira (Itapema); **E**M Mauricio Germer (Timbó); **E**M Padre Martinho Stein (Timbó); **E**M Professora Anna Maria Harger (Joinville); **E**M Professora Elsir Bernadete Gaya Muller (Navegantes); **E**M Professora Karin Barkemeyer (Joinville); **E**M Professora Lacy Luiza da Cruz Flores (Joinville); **E**M Professora Zulma do Rosário Miranda (Joinville); **E**M Terezinha Paseto Spillere (Nova Veneza); **E**M Tiroleses (Timbó); **E**M Viver e Conhecer (Capinzal); **E**MEB Professora Selma Teixeira Graboski (Rio Negrinho); **E**MEF Monteiro Lobato (Itapoá); **E**MEF Professora Augusta Knorring (Brusque); **E**MEF Ribeirão Cavalo (Jaraguá do Sul); **E**scola Barão do Rio Branco (Blumenau); **E**scola Comecinho de Vida (Videira); **E**scola Dinâmica (Florianópolis); **E**scola Educacional Técnica SATC (Criciúma); **E**scola Sarapiquá (Florianópolis); **E**scola Técnica de Comércio de Tubarão (Tubarão); **E**scola Técnica do Vale do Itajaí (Blumenau); **E**scola Técnica Tupy (São Bento do Sul); **E**xathum Curso e Colégio (Joinville); **I**FSC - Campus Chapecó (Chapecó); **I**FSC - Campus Florianópolis (Florianópolis); **I**FSC - Campus Joinville (Joinville); **I**nstituto Educacional Madre Elisa Savoldi (Sombrio); **I**nstituto Maria Auxiliadora (Rio do Sul); **K**umon - Florianópolis (Florianópolis); **K**umon - Joaçaba (Joaçaba); **L**ogus Sociedade de Ensino Ltda. (Santo Amaro da Imperatriz); **N**úcleo Escolar Presidente Adolfo Konder (Irineópolis); **S**ENAI - Jaraguá do Sul (Jaraguá do Sul); **S**ENAI - São Miguel D'Oste (São Miguel D'Oeste); **S**ENAI - Tubarão (Tubarão); **S**ociedade Educacional Posiville Ltda. (Joinville).

Provas e Gabaritos

Prova Nível 1

1. Um cubo C é construído com 1000 pequenos cubos de 1 cm de aresta (cada face do cubo tem dimensões 10 cm por 10 cm). O cubo C é cortado, retirando-se fatias de 1 cm de espessura, segundo a ordem da figura abaixo:



Depois de retirar 17 fatias, quantos cubinhos de 1 cm de lado restam no sólido?

2. Em uma grande cidade há casas onde se acolhem gatos. Sabe-se que o número de gatos acolhidos em cada casa é maior ou igual a 20 e menor ou igual a 70. Qual o maior número possível de casas que acolherão, juntas, um total de 2011 gatos? Neste caso, quantos gatos há em cada casa?

3. Em um país distante, a unidade monetária é o pila, com símbolo PL\$. O excesso de velocidade é punido com PL\$ 100,00 a cada 10 unidades de velocidade que ultrapassarem o permitido. Nas estradas a velocidade máxima permitida é de 80 Km/h. Em um trecho, do Km 100 ao Km 260, existem 4 radares que detectam excesso de velocidade e dobram o valor da multa a cada reincidência. Por exemplo, um motorista que passa pelo primeiro radar a 90 Km/h, pelo segundo radar a 100 Km/h, pelo terceiro a 110 Km/h e pelo quarto a 120 Km/h pagará multa de $100+200\times 2+300\times 4+400\times 8=4900$ pilas. Abel faz este trajeto a uma velocidade constante de 80 Km/h. Bill faz o mesmo trajeto em velocidade constante e paga uma multa de PL\$ 3000,00. Suponha que os dois motoristas passaram juntos pelo Km 260 às 17 horas.

a) A que horas Abel passou pelo Km 100?
b) A que horas Bill passou pelo Km 100?

4. Encontre três números primos distintos, em ordem crescente, tais que o produto do segundo pela soma dos outros dois seja igual a 125.

5. Os habitantes do planeta EX têm um curioso sistema de símbolos para se comunicarem. Eles usam duas vogais (A e I), duas consoantes (B e K) e três números (3, 5 e 7). Suas palavras são formadas de acordo com as seguintes regras:

   1ª) todas as palavras começam com uma consoante e terminam com um número;

   2ª) o 7 nunca aparece depois de vogal;

   3ª) o 5 não se repete em uma palavra;

   4ª) vogais, consoantes e números podem se repetir numa palavra, exceto no caso da 3ª regra.

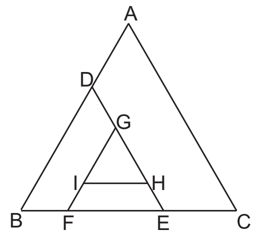
   Quantas palavras com 3 símbolos e começadas com B existem para os habitantes do planeta EX?

Prova Nível 2

1. Na figura ao lado, o triângulo ABC é equilátero e $\overline{DE}//\overline{AC}$ ($\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AC}$), $\overline{FG}//\overline{BD}$, $\overline{HI}//\overline{FE}$.

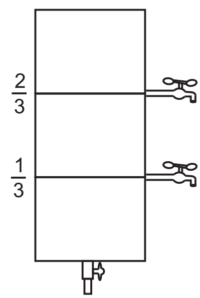
   a) Mostre que o triângulo IHG é equilátero.

   b) Supondo que $AD = \dfrac{1}{3}AB$, $BF = \dfrac{1}{3}BE$ e $EH = \dfrac{1}{3}EG$, qual é a razão entre as áreas dos triângulos IHG e ABC?



2. Em uma grande cidade há casas onde se acolhem gatos. Sabe-se que o número de gatos acolhidos em cada casa é maior ou igual a 20 e menor ou igual a 70, e que não há duas casas com o mesmo número de gatos. Qual o menor número possível de casas que juntas acolherão 2011 gatos? Neste caso, quantos gatos há em cada casa?

3. Um tanque de água possui um ralo no fundo e duas torneiras localizadas respectivamente a $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{2}{3}$ de sua altura total do fundo (FIGURA). Sabe-se que o tanque, quando totalmente cheio, será totalmente esvaziado em 2 horas com somente o ralo aberto. Supondo que o ralo e as duas torneiras têm a mesma vazão e que as vazões são constantes, em quanto tempo o tanque cheio esvaziará com o ralo e as torneiras abertas simultaneamente?



4. Encontrar quatro números primos distintos a, b, c e d, com $a < b < c < d$, tais que:

$$ab + bc + cd = 208$$
$$abc + bcd = 825.$$

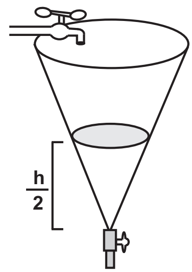
5. Sabendo que o número $\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\sqrt{3}}$ é um inteiro, calcule este número.

Prova Nível 3

1. Mostre que os números da forma $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5$ são quadrados perfeitos para $n \geq 0$.

2. Qual o menor inteiro positivo n tal que o número $\underbrace{201120112011...2011}_{n-vezes}$ é múltiplo de 11?

3. Um tanque na forma de cone invertido tem uma torneira que o enche, com vazão constante, em 1 hora, e um ralo no seu vértice que o esvazia, também com vazão constante, em 2 horas. Suponha que o tanque está inicialmente vazio. Ao abrir a torneira e o ralo simultaneamente, qual é o tempo necessário para que o nível da água atinja a metade da altura do cone?



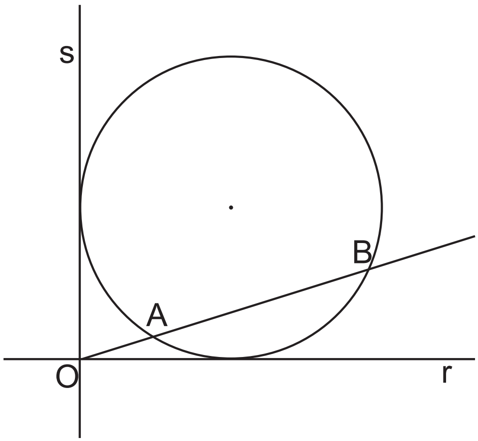
4. Considere a função $f(x,y) = 1 - \dfrac{x}{y}$, para $x > 0$ e $y > 0$. Defina:

$$F_n(x) = \begin{cases} f(x,x) & \text{se} \quad n = 1, \\ f(F_{n-1}(x),x) & \text{se} \quad n > 1. \end{cases}$$

Calcule $F_{2011}(2)$.

5. Na figura a seguir, as retas s e r são perpendiculares e a circunferência tem raio a e é tangente às duas retas. Os pontos A e B da circunferência são tais que:

(i) O, A e B são colineares;
(ii) o ângulo entre as retas $\overrightarrow{OA}$ e r é menor do que $45°$;
(iii) a medida de OA é um terço da medida de AB.



a) Calcule OA em função do raio a da circunferência.
b) Calcule a razão entre as distâncias do ponto A às retas r e s.

Gabarito Nível 1

1. Ao retirarmos uma fatia do cubo C estaremos retirando $10 \times 10 = 100$ cubinhos, restando um sólido com $10 \times 10 \times 9 = 900$ cubinhos. No segundo corte retiramos uma fatia com $10 \times 9 = 90$ cubinhos, restando um sólido com $10 \times 9 \times 9 = 810$ cubinhos. No terceiro corte retiramos uma fatia com $9 \times 9 = 81$ cubinhos, restando $9 \times 9 \times 9 = 729$ cubinhos, ou seja, um cubo com uma unidade a menos em cm em cada aresta.
   Assim, a cada 3 fatias (1ª, 2ª e 3ª ; 4ª, 5ª e 6ª; etc) passamos a um novo cubo com uma unidade a menos em aresta do que o cubo anterior. Após retirarmos $15 = 3 \times 5$ fatias restará um cubo com $5 \times 5 \times 5 = 125$ cubinhos, na 16ª fatia sairão $5 \times 5 = 25$ cubinhos, restando $125 - 25 = 100$ cubinhos. Na 17ª fatia saem $5 \times 4 = 20$ cubinhos, restando $100 - 20 = 80$ cubinhos.

   Resposta: Depois de retirar 17 fatias, restam no sólido 80 cubinhos.

2. Para que o número de casas seja o maior possível, cada casa deveria acolher a menor quantidade possível de gatos, ou seja, 20 gatos. Porém, como $2011 = 100 \times 20 + 11$, se 100 casas acolhessem, cada uma, 20 gatos, restariam 11 gatos que não poderíam ser acolhidos em nenhuma casa (já que 20 é o número mínimo). Então só restaria "espalhar"os 11 gatos pelas 100 casas, ou distribuir 20 gatos por 99 casas e uma casa com $20 + 11 = 31$ gatos. De qualquer maneira o número máximo de casa será 100.

   Resposta: O maior número possível de casas que acolherão, juntas, 2011 gatos será 100 casas. Neste caso, há várias maneiras de distribuir os gatos, conforme descrito acima.

3. (a) Abel fez um trajeto de $260 - 100 = 160$ Km a uma velocidade constante de 80 Km/h. Portanto ele demorou $160 \div 80 = 2$ horas para fazer o percurso.
   Resposta: Abel passou pelo Km 100 às 15 horas.

   (b) Bill passa, em velocidade constante, por quatro radares. Então o valor da multa em cada radar seria o mesmo, mas devido às reincidências, ele pagou uma vez o valor da multa pela detecção do primeiro radar, duas vezes pelo segundo, quatro vezes pelo terceiro e oito vezes pelo quarto radar.

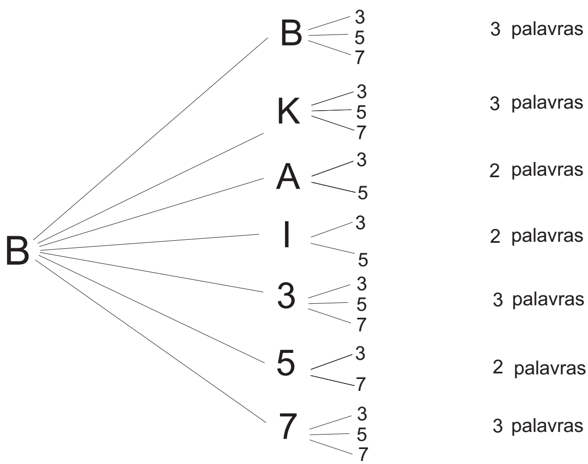
Assim, ele pagou $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ vezes o valor da multa inicial. Tal multa foi então no valor de $3000 \div 15 = 200$. Então trafegou com 20 unidades de velocidade em excesso, ou seja, ele viajou à velocidade constante de 100 Km/h. Em um percurso de 160 Km, Bill gastou $160 \div 100 = 1,6$ horas, ou, 1 hora e $0,6$ hora, ou, 1 hora e $0,6 \times 60 = 36$ minutos.

Resposta: Bill passou pelo Km 100 às 15 horas e 24 minutos.

4. Se os três números fossem ímpares (ou seja, distintos de 2), então a soma de dois deles seria par, e o produto final seria par e portanto diferente de 125. Portanto, um dos números primos (o menos deles) é 2.
   Como o produto do segundo pela soma dos outros dois é $125 = 5^3$, então o segundo deles só pode ser 5. Então os outros dois somam 25, portanto o maior deles é 23.

   Resposta: Os primos que satisfazem a condição do enunciado são 2, 5 e 23.

5. Façamos uma árvore:



   Resposta: No planeta EX existem 18 palavras com 3 símbolos e começadas com B.

Gabarito Nível 2

1. (a) De $\overline{DE}//\overline{AC}$ temos que :

$$\begin{cases} B\hat{D}E = B\hat{A}C = 60^{\text{o}} \\ B\hat{E}D = B\hat{C}A = 60^{\text{o}}. \end{cases}$$

Como $\overline{FG}//\overline{BD}$ temos que $I\hat{G}H = B\hat{D}E = 60^{\text{o}}$, e como $\overline{HI}//\overline{FE}$ temos que $I\hat{H}G = B\hat{E}D = 60^{\text{o}}$. Portanto, $G\hat{I}H = 60^{\text{o}}$ e o triângulo IHG é equilátero.

(b) Como $AD = \frac{1}{3}AB$, temos que $BD = \frac{2}{3}AB$. Mas $BE = BD$ e, portanto, $BE = \frac{2}{3}AB$.

Como $BF = \frac{1}{3}BE$, temos:

$$FE = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}AB = \frac{4}{9}AB.$$

Mas $EG = FE$.

Como $EH = \frac{1}{3}EG$, temos:

$$GH = \frac{2}{3}EG = \frac{2}{3}FE = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9}AB = \frac{8}{27}AB.$$

Portanto, a razão de semelhança entre os triângulos IHG e ABC é igual a

$\frac{8}{27}$.

Segue-se que a razão entre suas áreas é igual a $\left(\frac{8}{27}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$.

Resposta: A razão entre as áreas dos triângulos IHG e ABC é $\frac{64}{729}$.

2. Para que o número de casas seja o menor possível devemos distribuir os gatos a partir da maior quantidade permitida por casa, sem repetir esses números. Então os 2011 gatos ficarão distribuídos segundo a soma

$$70 + 69 + 68 + ... \ .$$

Efetuando a soma de 70 até 20 (inclusive) obtemos:

$$\begin{aligned} 70 + 69 + ... + 21 + 20 = \\ = (70 + 20) + (69 + 21) + ... + (46 + 44) + (45) = \\ = 25 \times 90 + 45 = 2295. \end{aligned}$$

Esse valor ultrapassa 2011 em 284. Vamos então subtrair as casas entre 20 e 29:

$$20+21+...+28+29 = (20+29)+(21+28)+...+(24+25) = 5\times 49 = 245.$$

Assim,

$$70 + ... + 30 = 2295 - 245 = 2050,$$

e, portanto,

$$70 + ... + 31 = 2050 - 30 = 2020.$$

Este número ultrapassa o valor 2011 em 9 unidades. Não é possível uma casa acolher 9 gatos somente. E então retiramos a casa com 31 gatos e teremos a soma:

$$70 + ... + 32 = 2020 - 31 = 1989 \text{ gatos.}$$

Agora faltam 22 gatos para totalizar 2011 e uma casa ficará com esses 22 gatos. Portanto, distribuindo gatos em

$$(70 - 32) + 1 + 1 = 38 + 1 + 1 = 40 \text{ casas}$$

com $70, 69, 68, ..., 33, 32$ e 22 gatos, respectivamente, teremos o número mínimo de casas.

Resposta: O menor número possível de casas que juntas acolherão 2011 gatos será 40 casas. Neste caso, eles serão distribuídos nas casas da seguinte maneira: $70, 69, 68, ..., 33, 32$ e 22 gatos.

3. Cada torneira e o ralo esvaziam $\frac{1}{3}$ do tanque em $\frac{120}{3}$ minutos $= 40$ minutos. O primeiro terço do tanque é esvaziado pelos três abertos que, tendo a mesma vazão constante, o farão em $\frac{40}{3}$ minutos $= 13 + \frac{1}{3}$ minutos $= 13$ minutos e 20 segundos. O segundo terço do tanque será esvaziado pelo ralo e por **uma** torneira, que o farão em $\frac{40}{2}$ minutos $= 20$ minutos. O último terço do tanque será esvaziado pelo ralo em 40 minutos. Portanto, o tempo total para esvaziar o tanque será:
   13 minutos e 20 segundos +20 minutos +40 minutos = 1 hora 13 minutos e 20 segundos.

   Resposta: O tanque cheio esvaziará em 1 hora 13 minutos e 20 segundos.

4. Observe que, como $abc + bcd = (a + d)bc = 825$, temos que os três fatores $(a + d)$, b e c devem ser ímpares. Mas como a soma de dois primos ímpares é par, então $a = 2$ (para que $a + d$ seja ímpar).

   Agora observe que a decomposição em fatores primos de 825 é:
$$825 = 3 \cdot 5^2 \cdot 11.$$
   Então só há duas possibilidades para que o produto $(a + d)bc$ seja igual a 825. Uma delas é $a + d = 25$ e, nesse caso, $d = 23$, $b = 3$ e $c = 11$. Mas então teremos $ab + bc + cd = 6 + 33 + 253 > 208$. A outra possibilidade é que b ou c sejam iguais a 5. Se $c = 5$ então $b = 3$ e $a + d = 55$, ou seja, $d = 53$. Nesse caso também teriamos $ab + bc + cd > 208$. Então $b = 5$.

   Ficamos então com o sistema:
$$\begin{cases} 10 + 5c + cd = 208 & (1) \\ 10c + 5cd = 825. & (2) \end{cases}$$
   A equação (1) nos dá: $cd = 198 - 5c$ e, substituindo na equação (2), obtemos: $10c + 5(198 - 5c) = 825$, o que nos dá $c = 11$. Voltando à equação (1) temos: $10 + 55 + 11d = 208$, o que nos dá $d = 13$. Note que, na equação original, teremos: $ab + bc + cd = (2 \cdot 5) + (5 \cdot 11) + (11 \cdot 13) = 10 + 55 + 143 = 208$.

   Resposta: Portanto, os quatro primos são: $a = 2, b = 5, c = 11$ e $d = 13$.

5. Note que $1 < \dfrac{10}{9}\sqrt{3} < 2$, pois $\dfrac{10\sqrt{3}}{9} < 2$ se, e somente se, $10\sqrt{3} < 18$, e isso ocorre se e somente se $100 \times 3 < 18^2$, o que é verdade; e $\dfrac{10\sqrt{3}}{9} > 1$ se, e somente se, $10\sqrt{3} > 9$, e isso ocorre se e somente se $100 \times 3 > 9^2 = 81$, o que é verdade. Então, somando 2 nas desigualdades, temos:

$$3 < 2 + \frac{10\sqrt{3}}{9} < 4. \tag{1}$$

Agora, como $1 < \dfrac{10}{9}\sqrt{3} < 2$, obtemos $-2 < -\dfrac{10}{9}\sqrt{3} < -1$. Somando 2 nas duas desigualdades, obtemos:

$$0 < 2 - \frac{10\sqrt{3}}{9} < 1. \tag{2}$$

Extraindo a raiz cúbica em (1) e (2), obtemos:

$$1 < \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} < \sqrt[3]{4} < 2$$

e

$$0 = \sqrt[3]{0} < \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} < \sqrt[3]{1} = 1.$$

Somando, obtemos: $1 < \sqrt[3]{2 + \dfrac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \dfrac{10\sqrt{3}}{9}} < 3.$

Resposta: Como a soma das duas raízes é um inteiro, este inteiro é o 2.

Gabarito Nível 3

1. Se $n = 0$ então o número é $25 = 5^2$. Para $n \geq 1$ temos:

$$44...422...25 = 4\cdot 10^{2n+1}+4\cdot 10^{2n}+...+4\cdot 10^{n+2}+2\cdot 10^{n+1}+...+2\cdot 10+5 =$$
$$= 4(10^{2n+1} + 10^{2n} + ... + 10^{n+2}) + 2(10^{n+1} + ... + 10) + 5 =$$
$$= 4 \cdot \frac{10^{2n+2} - 10^{n+2}}{9} + 2 \cdot \frac{10^{n+2} - 10}{9} + 5 =$$
$$= \frac{4}{9}10^{2n+2} - \frac{4}{9}10^{n+2} + \frac{2}{9}10^{n+2} - \frac{20}{9} + 5 =$$
$$= \frac{4}{9}10^{2n+2} - \frac{2}{9}10^{n+2} + \frac{25}{9} = \frac{1}{9}(4 \cdot 10^{2n+2} - 2 \cdot 10^{n+2} + 25) =$$
$$= \frac{1}{9}(4 \cdot 10^{2n+2} - 2 \cdot 10 \cdot 10^{n+1} + 25) =$$
$$= \frac{1}{9}(2 \cdot 10^{n+1} - 5)^2 = \left(\frac{2 \cdot 10^{n+1} - 5}{3}\right)^2.$$

2. O número 2011 não é múltiplo de 11 pois, pelo critério de divisibilidade por 11, a diferença entre a soma dos algarismos da dezena e do milhar e a soma dos algarismos da unidade e da centena não é múltiplo de 11:

$$2011 : (2 + 1) - (1 + 0) = 2.$$

Para um número como $\underbrace{201120112011...2011}_{n-vezes}$, aquela diferença será $3n - n = 2n$. O menor inteiro positivo que torna esse número um múltiplo de 11 é o próprio 11.

Resposta: O menor inteiro positivo n para a condição do enunciado é o 11.

3. Como a vazão da torneira é o dobro da vazão do ralo, se, em um certo intervalo de tempo, a torneira coloca um volume V de água no tanque, o ralo escoa um volume $\frac{V}{2}$. Assim, com a torneira e o ralo abertos, o tanque será totalmente cheio no dobro do tempo que seria com a torneira aberta e o ralo fechado, ou seja, em 2 horas.

O volume da água correspondente à metade da altura é igual a $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ do volume do tanque. Assim, para que o nível da água atinja a metade da altura do cone, o tempo necessário será $\frac{1}{8} \times 2\text{ h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15$ minutos.

Resposta: O tempo necessário para que o nível da água atinja a metade da altura do cone é de 15 minutos.

4. Calculando alguns termos da sequência $F_n(2)$

$$F_1(2) = f(2,2) = 1 - \frac{2}{2} = 0$$

$$F_2(2) = f(F_1(2),2) = 1 - \frac{0}{2} = 1$$

$$F_3(2) = f(F_2(2),2) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$F_4(2) = f(F_3(2),2) = 1 - \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$F_n(2) = f(F_{n-1}(2),2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - ...(-1)^n \times \frac{1}{2^{n-2}} \quad ,$$

o que pode ser demonstrado por indução.

Assim,

$$F_{2011}(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - ...(-1)^{2011} \times \frac{1}{2^{2009}} =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2^{2009}}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

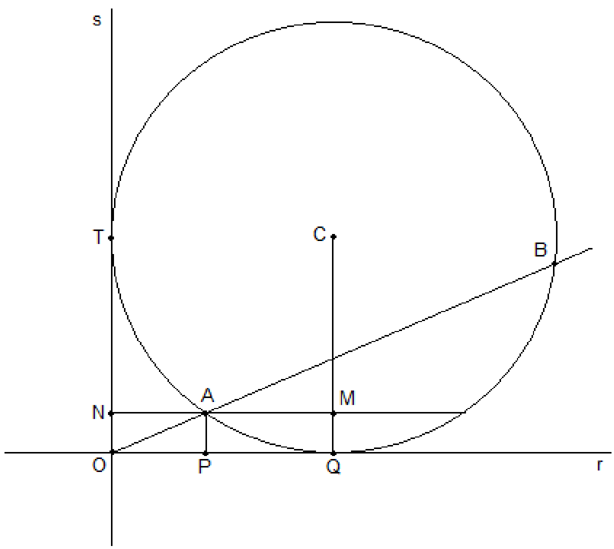
$$= \frac{1 - \dfrac{1}{2^{2010}}}{1 + \dfrac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{2^{2010} - 1}{2^{2010}}}{\dfrac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2^{2010} - 1}{3 \times 2^{2009}}.$$

Resposta: $F_{2011}(2) = \dfrac{2^{2010} - 1}{3 \times 2^{2009}}$.

5. (a) Sejam T e Q os pontos de tangência da circunferência com as retas s e r respectivamente.



Pela potência do ponto O em relação à circunferência, temos:

$a^2 = (OT)^2 = OA.OB = OA(OA+AB) = OA(OA+3OA) = 4(OA)^2$.

Então, $a = OT = 2OA$ ou $OA = \dfrac{a}{2}$.

Resposta: $OA = \dfrac{a}{2}$.

(b) Sejam P e N os pés das perpendiculares por A às retas r e s respectivamente. Queremos achar

$$\frac{AP}{AN}.$$

No triangulo retângulo $\triangle APO$ temos, pelo Teorema de Pitágoras:

$$(OA)^2 = (AP)^2 + (AN)^2$$

ou,

$$(AP)^2 + (AN)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Sejam C o centro da circunferência e M o ponto de intersecção de $\overline{CQ}$ com a reta AN. No triângulo retângulo $\triangle CMA$ temos:

$$(AC)^2 = (CM)^2 + (AM)^2$$

ou

$$a^2 = (CQ - MQ)^2 + (MN - AN)^2$$

ou

$$a^2 = (a-AP)^2+(a-AN)^2 = 2a^2-2a(AP+AN)+(AP)^2+(AN)^2$$

$$= 2a^2 - 2a(AP + AN) + \frac{a^2}{4}.$$

Então:

$$2a(AP + AN) = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow AP + AN = \frac{5a}{8}. \qquad (1)$$

Agora,

$$\frac{25a^2}{64} = (AP + AN)^2 = (AP)^2 + (AN)^2 + 2 \times AP \times AN =$$

$$= \frac{a^2}{4} + 2 \times AP \times AN.$$

Então:

$$AP \times AN = \frac{9a^2}{128}. \tag{2}$$

De (1) e (2), temos a equação de segundo grau:

$$\lambda^2 - \frac{5a}{8}\lambda + \frac{9a^2}{128} = 0$$

cujas raízes são AP e AN. Mas

$$\lambda = \frac{\frac{5a}{8} \pm \sqrt{\frac{25a^2}{64} - \frac{9a^2}{32}}}{2} = \frac{\frac{5a}{8} \pm \sqrt{\frac{7a^2}{64}}}{2} = \frac{\frac{5a}{8} \pm \frac{a}{8}\sqrt{7}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{16}a.$$

Então:

$$AP = \frac{5 - \sqrt{7}}{16}a$$

e

$$AN = \frac{5 + \sqrt{7}}{16}a.$$

Portanto:

$$\frac{AP}{AN} = \frac{5 - \sqrt{7}}{5 + \sqrt{7}} = \frac{(5 - \sqrt{7})^2}{25 - 7} = \frac{32 - 10\sqrt{7}}{18} = \frac{16 - 5\sqrt{7}}{9}$$

(independe de a).

Resposta: A razão entre as distâncias do ponto A às retas r e s é de

$\dfrac{16 - 5\sqrt{7}}{9}$.

Artigos

Desvendando o método de Cardano

Helena Carolina Rengel Koch[1] e Licio Hernanes Bezerra[2]

helenacarolina@netuno.com.br e licio.bezerra@ufsc.br

Sabemos, pela teoria de Galois [3], que só existem fórmulas algébricas fechadas de resolução de equações polinomiais para polinômios de ordem menor ou igual a 4. Aprendemos no ensino fundamental uma fórmula para resolução de equações de segundo grau, mas somos raramente apresentados aos métodos de resolução de cúbicas e quárticas. Vamos apresentar aqui o chamado método de Cardano, que surgiu para encontrar uma raiz de um polinômio de terceiro grau. Historicamente, esse método está intrinsecamente ligado à gênese dos números complexos, conforme afirmam muitos estudiosos de história da matemática (ver, por exemplo, [1, 2]). Nessa época (século XVI), calculava-se apenas uma raiz real e, a partir dessa raiz, reduzia-se o polinômio inicial a um polinômio de segundo grau. Em certos casos, para calcular essa raiz real, operações algébricas com raízes de números negativos eram realizadas, mais como um artifício, já que esses números não faziam muito sentido na época. O objetivo deste artigo é apresentar o método de Cardano de uma forma geral e detalhada, analisando-se as três raízes, reais ou complexas. Tomamos como base a introdução a esse método feita em [3].

O método de Cardano

Considere uma equação real de terceiro grau da forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Primeiro, vamos eliminar o termo quadrático dessa equação, fazendo uma mudança de variáveis: $x = t - \dfrac{a}{3}$. Assim, temos:

[1]Licencianda em Matemática da UFSC e bolsista do PICME/CNPq.
[2]Professor do Departamento de Matemática da UFSC.

$$x^3 = \left(t - \frac{a}{3}\right)^3 = t^3 - at^2 + \frac{a^2t}{3} - \frac{a^3}{27},$$
$$ax^2 = a\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 = at^2 - \frac{2a^2t}{3} + \frac{a^3}{9},$$
$$bx = b\left(t - \frac{a}{3}\right) = bt - \frac{ab}{3}.$$

O resultado, então, é o seguinte:

$$t^3 - at^2 + \frac{a^2t}{3} - \frac{a^3}{27} + at^2 - \frac{2a^2t}{3} + \frac{a^3}{9} + bt - \frac{ab}{3} + c = 0,$$

ou seja,

$$t^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)t + \left(\frac{2a^3 - 9ab}{27} + c\right) = 0.$$

Sejam, agora, $p = -\dfrac{a^2}{3} + b$ e $q = \dfrac{2a^3 - 9ab}{27} + c$. Com essa notação, a equação se escreve da seguinte forma:

$$t^3 + pt + q = 0. \tag{2}$$

Denotando as três raízes da equação (2) por t_1, t_2 e t_3, temos:

1. $t_1 + t_2 + t_3 = 0$;
2. $t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = p$;
3. $t_1t_2t_3 = -q$.

Assim, $t_1 = -t_2 - t_3$, $t_2^2 + t_3^2 + t_2t_3 = -p$ e $t_2^2t_3 + t_2t_3^2 = q$. Sejam $v = -t_2$ e $u = t_3$. Assim, concluímos que

$$0 = (v-u)^3 + p(v-u) + q = v^3 - 3v^2u + 3vu^2 - u^3 + p(v-u) + q =$$
$$= (q - u^3 + v^3) + (p - 3vu)(u - v).$$

Suponhamos agora que encontramos u e v que satisfazem:

$$u^3 - v^3 = q \tag{3}$$
$$uv = \frac{p}{3}. \tag{4}$$

Nesse caso, como podemos observar acima, $t = v - u$ é uma solução para (2). Isolando v em (4), obtemos $v = \frac{p}{3u}$. Substituindo o valor encontrado em (3), encontramos a equação:

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = q. \tag{5}$$

Multiplicando ambos os lados de (5) por u^3, obtemos

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Representando u^3 como y, isto resulta na seguinte equação:

$$y^2 - qy - \frac{p^3}{27} = 0.$$

As raízes desta equação podem ser encontradas através da fórmula de resolução de equações de segundo grau:

$$y = \frac{-(-q) \pm \sqrt{(-q)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{-p^3}{27}\right)}}{2 \times 1} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Como $y = u^3$,

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{6}$$

Como $t = v - u$ e $x = t - \frac{a}{3}$, temos então que

$$x = \left(\frac{p}{3u} - u\right) - \frac{a}{3}.$$

A seguir, vamos analisar os valores obtidos de x por esse procedimento, uma vez que os resultados obtidos até aqui são meramente formais.

As raízes

As duas expressões para u contidas em (6) fazem sentido quando $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Nesse caso, podemos observar que há seis possíveis valores para u: as três raízes cúbicas complexas de $\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$, mais as três raízes cúbicas complexas de $\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$. Se $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$, podemos até imaginar que $\dfrac{q}{2}+\left(\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}\right)$ denote o número $A=\dfrac{q}{2}+\left(\sqrt{\mid\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}\mid}\right)i$ e que $\dfrac{q}{2}-\left(\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}\right)$ denote o número $B=\dfrac{q}{2}-\left(\sqrt{\mid\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}\mid}\right)i$. Nesse caso, também há seis possíveis valores para u como soluções complexas das equações $u^3=A$ e $u^3=B$. Contudo, veremos a seguir que os três valores finais obtidos para x obtidos a partir das soluções de $u^3=A$ serão os mesmos obtidos a partir das soluções de $u^3=B$. Ou seja, o sinal escolhido na expressão de y não importa.

O caso $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$

Primeiro, vamos supor que $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$ é menor do que zero. Temos então que $\dfrac{q}{2}\pm\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$ pertence ao conjunto dos números complexos. Sejam, agora,

$$A=\frac{q}{2}+\left(\sqrt{\mid\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\mid}\right)i \ \text{ e } \ B=\frac{q}{2}-\left(\sqrt{\mid\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\mid}\right)i.$$

Pela definição de conjugado de um número complexo, temos que $A=\overline{B}$ e $B=\overline{A}$. Também, pela definição de módulo de um número complexo, temos que $\mid A\mid=\mid B\mid$. Sejam

$$r=\mid A\mid=\mid B\mid$$
$$\theta\text{, argumento de } A$$
$$\alpha\text{, argumento de } B.$$

Assim, $\alpha=-\theta$, logo, $A=re^{i\theta}$ e $B=re^{-i\theta}$. Portanto, as três possíveis soluções para $u^3=A$ e $u^3=B$ são, respectivamente:

1. $u_1 = \sqrt[3]{r} \times e^{\frac{i\theta}{3}}$;
2. $u_2 = \sqrt[3]{r} \times e^{\frac{i\theta}{3} + \frac{i2\pi}{3}}$;
3. $u_3 = \sqrt[3]{r} \times e^{\frac{i\theta}{3} + \frac{i4\pi}{3}}$;
4. $u_4 = \sqrt[3]{r} \times e^{-\frac{i\theta}{3}} = \overline{u_1}$;
5. $u_5 = \sqrt[3]{r} \times e^{-\frac{i\theta}{3} + \frac{i2\pi}{3}} = \overline{u_3}$;
6. $u_6 = \sqrt[3]{r} \times e^{-\frac{i\theta}{3} + \frac{i4\pi}{3}} = \overline{u_2}$.

Vamos calcular agora o valor de $\sqrt[3]{r}$:

$$r^2 = |A|^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\left|\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right|}\right)^2 = \frac{q^2}{4} + \left|\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right|.$$

Como $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} < 0$, então:

$$\left|\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right| = -\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = -\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}.$$

Assim,

$$r^2 = \frac{q^2}{4} + \left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right) = -\frac{p^3}{27} = \left(\frac{-p}{3}\right)^3.$$

Logo,

$$\sqrt[3]{r^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{-p}{3}\right)^3} = \frac{-p}{3}.$$

Temos, portanto, que

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{-p}\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{-3p}}{3}.$$

Podemos então representar os seis valores de u por

$$u = \frac{\sqrt{-3p}}{3} \times e^{\frac{i\phi}{3}},$$

em que $\phi = \pm\theta, \pm\theta+2\pi, \pm\theta+4\pi$. Sendo assim, vamos calcular $x = \left(\frac{p}{3u} - u\right) - \frac{a}{3}$. Começaremos por $\frac{p}{3u}$:

$$\frac{p}{3u} = \frac{p}{3\frac{\sqrt{-3p}}{3} \times e^{\frac{i\phi}{3}}} = \frac{p \times e^{\frac{-i\phi}{3}}}{\sqrt{-3p}} = \frac{p\sqrt{-3p} \times e^{\frac{-i\phi}{3}}}{-3p} = -\frac{\sqrt{-3p} \times e^{\frac{-i\phi}{3}}}{3}.$$

Dessa forma,

$$x = \left(-\frac{\sqrt{-3p} \times e^{\frac{-i\phi}{3}}}{3} - \frac{\sqrt{-3p} \times e^{\frac{i\phi}{3}}}{3}\right) - \frac{a}{3} =$$

$$= -\frac{\sqrt{-3p}}{3} \times \left(e^{\frac{-i\phi}{3}} + e^{\frac{i\phi}{3}}\right) - \frac{a}{3}. \tag{7}$$

Podemos notar que o valor de x para u_1 e o valor de x para u_4 são iguais, ou seja, se substituírmos ϕ por θ ou por $-\theta$, obtemos o mesmo resultado. O mesmo acontece com os valores de x para u_2 e u_6 e para u_3 e u_5. Isso significa que, utilizando as soluções de $u^3 = A$ obtemos três valores que correspondem aos mesmos três valores que são obtidos se utilizamos as soluções de $u^3 = B$. Finalmente, observe em (7) que as três raízes são **reais**.

O caso $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$

Vamos analisar agora o caso que $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ maior ou igual a zero. Sejam

$$A = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } B = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Temos que A e B são números reais. Dessa forma, tanto $u^3 = A$ como $u^3 = B$ têm uma solução real e duas complexas:

1. $u_1 = \sqrt[3]{A}$;
2. $u_2 = u_1 \times e^{\frac{2\pi i}{3}}$;
3. $u_3 = u_1 \times e^{\frac{4\pi i}{3}}$;

4. $u_4 = \sqrt[3]{B}$;
5. $u_5 = u_4 \times e^{\frac{2\pi i}{3}}$;
6. $u_6 = u_4 \times e^{\frac{4\pi i}{3}}$.

Lema 1 *O valor obtido para x com $u = u_1$ é igual ao valor de x obtido com $u = u_4$. O mesmo acontece com os pares (u_2, u_6) e (u_3, u_5).*

Demonstração:

$$u_1 - u_4 = \frac{p}{3}\left(\frac{u_4 - u_1}{-\frac{p}{3}}\right) = \frac{p}{3}\left(\frac{u_4 - u_1}{\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}}\right) =$$

$$= \frac{p}{3}\left[\frac{u_4 - u_1}{\sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}\right] = \frac{p}{3}\left(\frac{u_4 - u_1}{\sqrt[3]{AB}}\right) =$$

$$= \frac{p}{3}\left(\frac{u_4 - u_1}{u_1.u_4}\right).$$

Logo,

$$\frac{p}{3} = -u_1.u_4.$$

Analogamente, obteríamos que

$$\frac{p}{3} = -u_2.u_6 = -u_3.u_5.$$

Assim,

$$\begin{cases} \dfrac{p}{3u_1} = -u_4 \quad \text{e} \quad \dfrac{p}{3u_4} = -u_1 \\[2ex] \dfrac{p}{3u_2} = -u_6 \quad \text{e} \quad \dfrac{p}{3u_6} = -u_2 \\[2ex] \dfrac{p}{3u_3} = -u_5 \quad \text{e} \quad \dfrac{p}{3u_5} = -u_3. \end{cases}$$

□

Conclusões

No caso que $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$, todas as raízes são reais e são da forma $-(u_k+\overline{u_k})-\dfrac{a}{3}$, em que $u_k=-\dfrac{\sqrt{-3p}}{3}\times\left(e^{\frac{i\theta+2(k-1)\pi}{3}}+e^{\frac{-i\theta-2(k-1)\pi}{3}}\right)$, $k=1:3$. Lembremos que θ é o argumento de $A=\dfrac{q}{2}+\left(\sqrt{\left|\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}\right|}\right)i$.

No caso que $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}\geq 0$

$$x=-\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)-\frac{a}{3}$$

é uma raiz real da equação. As outras raízes são

$$x=-\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times e^{2\pi i/3}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times e^{-2\pi i/3}\right)-\frac{a}{3}$$

e

$$x=-\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times e^{-2\pi i/3}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times e^{2\pi i/3}\right)-\frac{a}{3}.$$

Referências

[1] C. B. Boyer, *História da Matemática, 2. ed.*, São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[2] G. Garbi, *Romance das equações algébricas*, São Paulo: Livraria da Física, 2010.

[3] I. N. Herstein, *Tópicos de Álgebra*, São Paulo: Polígono, 1970.

Encontro Inesperado com o "e"

Antônio Vladimir Martins [1]

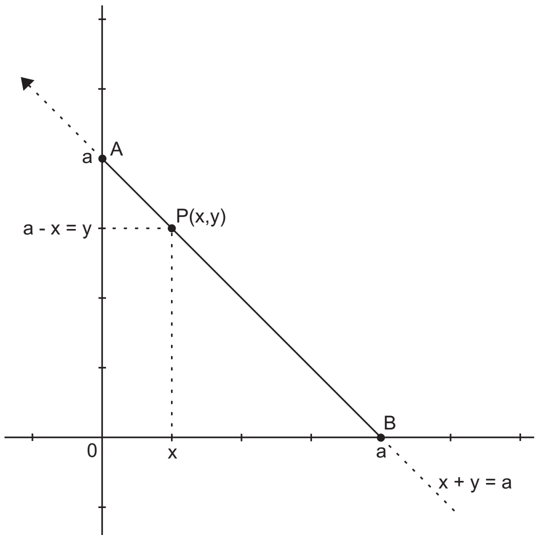
Se você quer um livro que apresenta problemas que despertam a curiosidade, que tenham aplicações inesperadas da Álgebra a questões da vida prática e divertidas excursões através da História da Matemática, eu indico o envolvente "Aprenda Álgebra Brincando"de I. Perelmann. No capítulo IX, que trata de logaritmos, encontra-se o problema "***Decompor um número a > 0 em n parcelas positivas de modo que seja máximo o produto destas parcelas***". Neste artigo eu desenvolvo algumas passagens que não estão detalhadas no livro.

O problema pode ser equacionado assim:

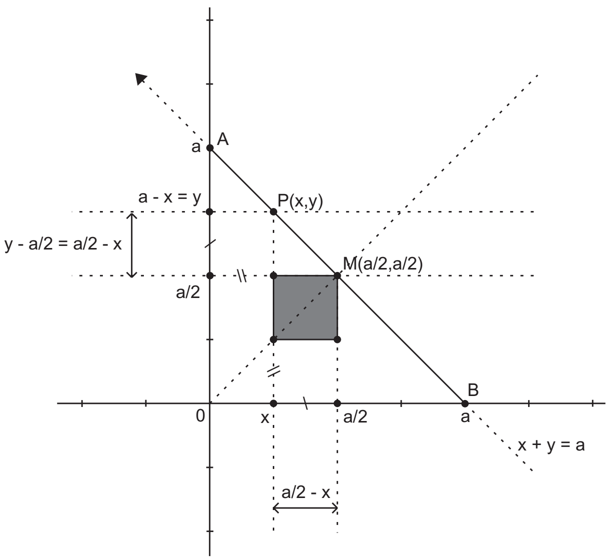
Dado $a > 0$*, encontrar um inteiro positivo* n *e* $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ *tais que* $x_1+x_2+...+x_n = a$ *e* $p = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} \cdot (a-x_1-...-x_{n-1})$ *deve assumir o maior valor possível.*

O produto p será máximo quando $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Para $n = 2$, a validade deste resultado pode ser visualizada nas figuras a seguir.

[1]Professor do Departamento de Matemática da UFSC.



Os pontos (x, y) do segmento de reta AB satisfazem $x + y = a$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.



Entre todos os retângulos com vértice superior direito P sobre $\overline{AB}$ e dois lados sobre os eixos (área = xy) o de maior área é aquele com vértice superior direito em M, que é justamente o quadrado de lado $x = y = \frac{a}{2}$. Na figura, o retângulo sombreado é a área a mais que o quadrado tem sobre o retângulo de vértice P.

Quando $n \geq 3$ a afirmação pode ser explicada usando-se derivadas parciais do Cálculo Diferencial. Para o leitor curioso, decidi mostrar algumas contas no caso $n = 4$.

Sejam x, y, z e w as parcelas positivas de a. Então:
$p = xyzw = xyz \cdot (a - x - y - z) = (a - y - z - w) \cdot yzw$. Os trios (x, y, z) que produzem valor máximo para p devem ser pontos críticos (derivadas parciais nulas) e satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} yz \cdot (a - 2x - y - z) = 0 \\ xz \cdot (a - x - 2y - z) = 0 \\ xy \cdot (a - x - y - 2z) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + 2y + z = a \\ x + y + 2z = a \end{cases} \qquad \text{(pois } x, y, z > 0\text{).}$$

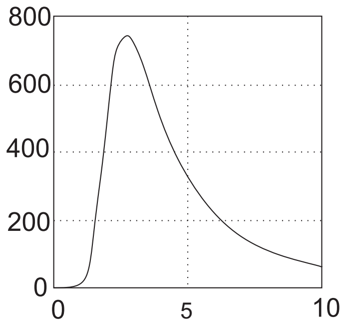
Destas equações tiramos $x = y = z$. Fazendo um procedimento análogo para os pontos críticos (y, z, w) de $p = (a - y - z - w) \cdot yzw$ tiramos $y = z = w$. Assim, $x = y = z = w$, no caso $n = 4$.

Sendo $x_1 = x_2 = ... = x_n = x$, a função a ser maximizada é $p = x \cdot x \cdot ... \cdot x = x^n$ sujeita à condição $nx = x + x + ... + x = a$.

$$p = x^{\frac{a}{x}} \qquad (a > 0, x > 0).$$

A figura a seguir mostra o gráfico[2] desta função quando $a = 18$.

[2]Gráfico feito com MATLAB, (`x = linspace(0.01,10,200); y=exp(18*log(x)./x); subplot(2,2,1);plot(x,y);axis square;grid on`).



Como $p(x) = x{\cdot}x{\cdot}...{\cdot}x = x^n = x^{\frac{a}{x}} = \exp(\frac{a\ln x}{x})$, e $p^{'}(x) = \dfrac{ap(x)(1-\ln x)}{x^2}$.

Note que $p^{'}(x) = 0$ apenas quando

$$x = e = 2,7182... \text{ e } p^{''}(e) = \frac{-a\exp\left(\frac{a}{e}\right)}{e^3} < 0.$$

Nestas condições o Cálculo Diferencial nos diz que $x = e = 2,7182...$ é ponto de máximo de $p = p(x)$.

Considerando-se $n = \left\{\dfrac{a}{e}\right\}$ = distância de $\dfrac{a}{e}$ ao inteiro mais próximo, obtém-se o n solicitado no problema.

Exemplos:

1. $a = 18,\quad \dfrac{a}{e} \simeq 6,62183\ ,\quad n = \left\{\dfrac{a}{e}\right\} = 7\ ;$

   $$n- = 6,\quad \frac{18}{6} = 3 \quad \text{e} \quad \left(\frac{18}{6}\right)^6 = 3^6 = 729\ ;$$

   $$n = 7,\quad \frac{18}{7} \simeq 2,5714286 \quad \text{e} \quad \left(\frac{18}{7}\right)^7 \simeq 743,398\ ;$$

   $$n+ = 8,\quad \frac{18}{8} = 2,25 \quad \text{e} \quad \left(\frac{18}{8}\right)^8 \simeq 656,841.$$

   Assim, quando $a = 18$, o produto das parcelas é máximo se o número de parcelas é igual a 7.

2. $a = 50,\quad \dfrac{a}{e} \simeq 18,393972\ ,\quad n = \left\{\dfrac{a}{e}\right\} = 18\ ;$

$$n- = 17,\quad \frac{50}{17} \simeq 2,9411765 \quad \text{e} \quad \left(\frac{50}{17}\right)^{17} \simeq 92227100\ ;$$

$$n = 18,\quad \frac{50}{18} \simeq 2,7777778 \quad \text{e} \quad \left(\frac{50}{18}\right)^{18} \simeq 96951600\ ;$$

$$n+ = 19,\quad \frac{50}{19} \simeq 2,631579 \quad \text{e} \quad \left(\frac{50}{19}\right)^{19} \simeq 96407700.$$

Assim, quando $a = 50$ o produto das parcelas é máximo se $a = 50$ é dividido em 18 parcelas iguais.

Nota: No problema dos envelopes trocados ocorre outro encontro inesperado com o número e. Este problema trata de colocar n cartas distintas em n envelopes endereçados e determinar a probabilidade de que toda carta seja colocada em envelope errado. Mostra-se que esta probabilidade é dada por $p_n = 1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - ... + (-1)^n \dfrac{1}{n!}$, que é um número próximo de $\dfrac{1}{e} = 0,36787...$ $(\cong 36,8\%)$, quando n é grande.

Para detalhes, o leitor pode consultar [2].

Referências

[1] I. Perelmann, *Aprenda Álgebra Brincando*, Hemus Liv-5-Curitiba-PR.

[2] J.P.Q. Carneiro, *O problema do Amigo Oculto*, RPM 28, 21-26, 1995.

I Olimpíada Regional Mirim de Matemática

Carmem Suzane Comitre Gimenez[1] e Claires Marcele Sada Boldo[2]

carmemsuzane@gmail.com e claires@ca.ufsc.br

Desde os primeiros anos de realização da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM), fomos questionados por uma professora do Educandário Imaculada Conceição, a professora Rita de Cássia Döbele Roedel, sobre a possibilidade de expandir a abrangência da competição, estendendo-a aos estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental. Organizar uma olimpíada para as séries iniciais? Na época a equipe da ORM chegou a discutir o assunto, mas não se sentiu confortável para trabalhar com este nível de ensino. A ideia foi adiada, mas não descartada.

Em 2010 começamos a conversar com algumas escolas e seus professores e a competição começou a tomar forma. O trabalho desenvolvido por alguns professores da UFSC na formação continuada de educadores serviu de suporte para elaborar o projeto piloto da Olimpíada Regional Mirim de Matemática (ORMM), uma competição voltada, inicialmente, para estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental.

A primeira edição da ORMM aconteceu em 2011, com a participação de alunos do Colégio de Aplicação da UFSC (três turmas) e do Educandário Imaculada Conceição (uma turma).

Tendo como referência a Olimpíada Regional de Matemática e outras competições dessa natureza, os objetivos da ORMM são:

1. Estabelecer um veículo para a melhoria do ensino da matemática nas escolas, criando um ambiente estimulante para o estudo dessa disciplina entre alunos e professores.

[1] Professora do Departamento de Matemática da UFSC.
[2] Professora do Colégio de Aplicação da UFSC.

2. Salientar a importância da matemática para o futuro dos jovens e do desenvolvimento do Brasil, contribuindo para a descoberta precoce de talentos para a Matemática e para as Ciências, em geral.

3. Preparar os alunos das séries iniciais do ensino fundamental para a participação nas Olimpíadas Brasileira e/ou Regional de Matemática, aplicadas em séries posteriores.

A Olimpíada Regional Mirim de Matemática é uma competição realizada em apenas uma etapa, uma vez por ano, com os alunos do quinto ano do ensino fundamental, por meio de uma prova escrita.

A organização e realização da ORMM é de responsabilidade da equipe da ORMM, cujas atribuições são, entre outras, a elaboração de listas de atividades de treinamento com suas resoluções e a aplicação destes treinamentos com os alunos do quinto ano do Ensino Fundamental, juntamente com o(a) professor(a) de matemática de cada turma.

A logística de uma competição neste nível é diferente da logística da ORM, pois devem-se considerar algumas particularidades da faixa etária e do nível escolar dos alunos participantes, o que exige uma participação efetiva dos professores e da escola. Os treinamentos são realizados em sala de aula, com a presença do professor da turma e da equipe da ORMM. Em acordo com diretores e professores das duas escolas, os treinamentos ocorreram quinzenalmente a partir do início de agosto de 2011. As questões discutidas nos treinamentos foram adaptadas dos bancos de questões da ORM, OBMEP, OBM, OMERJ e da Olimpíada Canguru. Cada turma teve quatro treinamentos antes da competição. A prova constou de cinco questões discursivas e foi aplicada no dia 30 de setembro, nas duas escolas, no horário das aulas.

A premiação dos alunos do Educandário Imaculada Conceição (EIC) ocorreu no mesmo evento da premiação da ORM, em 19/11/2011 no Centro de Cultura e Eventos da UFSC. A premiação dos alunos do Colégio de Aplicação da UFSC (CA) ocorreu em 29/11/2011 no auditório do CA.

Alunos premiados

Menção Honrosa

Carlos Henrique Antonello Soldatti
Luara Shinohara
Alexandra D. Broering Bett
Bruno Gabriel de M. Fazzioni
Fernanda do Nascimento
Gabriela Rigotti
Geovana Silveira Martins
Keli Mailin da Silva
Marina Martins Pesce
Nicolli Sebastião Heidemann
Tales Kruger Silva

Medalha de Bronze

Clara Gotardo
Alisson Fabra Da Silva
Bruna Gonçalves Selau
Hans Buss Heipemann
Renan Perelmutr Gonçalves
Tamires Eduarda Rode

Medalha de Prata

Maria Caroline G. Pereira
Moacyr Hermann
Rodrigo José Gomes Duarte
Thor Munirah Lessa
Victor Eleotério Pinera Marques

Medalha de Ouro

Fernando G. da Silveira
Luiz Cláudio Macedo Januário
Alexandro de C. Teixeira Neto
Elis do Valle Ribeiro

A equipe da ORMM, em sua primeira edição, estava assim constituída:

- *Professores*: Carmem Suzane Comitre Gimenez (MTM-UFSC), coordenadora da ORMM, Claires Marcele Sada Boldo (CA-UFSC) e José Luiz Rosas Pinho (MTM-UFSC), coordenador da ORM.

- *Acadêmicos do PET - MTM, do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC*: Daniella Losso e Thuysa S. de Souza.

- *Bolsistas de Extensão*: Bianca de Souza, acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC e Michely de Melo Pellizzaro, acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC.

- *Professoras das escolas envolvidas*: Adriana Regina Locks (EIC), Lara Duarte Souto Maior (CA), Mariana Zilotti Frazzi (CA) e Silvana Leonora Lehmkuhl Teres (CA).

A experiência com as olimpíadas em todo o país tem mostrado que elas são eficazes não apenas no estímulo à criatividade dos jovens, mas também como um veículo para difundir novas ideias a respeito do ensino de matemática no Brasil, atingindo diretamente o professor e seus alunos. Isto não foi diferente com os alunos e professores do quinto ano do ensino fundamental. A primeira edição da ORMM foi amplamente aceita pelos diretores, coordenadores pedagógicos, professores e alunos das escolas envolvidas. Destaca-se a participação das professoras das turmas, que acompanharam os treinamentos e manifestaram sua satisfação em conhecer novas estratégias na resolução de problemas. Os alunos mostraram interesse, entusiasmo e boa disciplina durante os treinamentos, fazendo com que as escolas envolvidas solicitassem a reedição do projeto em 2012.

A II ORMM terá a participação de três escolas (Colégio de Aplicação da UFSC, Educandário Imaculada Conceição e Colégio Catarinense), com 11 turmas e mais de 300 alunos. As atividades serão desenvolvidas por meio de treinamentos mensais, com início no mês de março, totalizando cinco treinamentos em cada turma. Gostaríamos de estender a participação a todas as escolas interessadas, mas isto requer uma ampliação da equipe de professores bem como de tempo disponível, além de alterações na logística dos treinamentos.

Durante o VII Encontro de Professores da ORM, realizado na UFSC em março deste ano, aconteceu uma Oficina de Resolução de Problemas para as professoras das escolas participantes em 2012 e discutiu-se a possibilidade de um trabalho conjunto com os professores das escolas, que ficariam responsáveis por alguns dos treinamentos. Essas e outras alterações estão sendo analisadas para as (possíveis) próximas edições. O Projeto ainda está em fase de construção.

Apesar do sucesso dessa primeira edição da ORMM, não é possível garantir a sua continuidade nos próximos anos. São muitos os fatores envolvidos para que ele seja viável em grande escala. Apesar do apoio e do envolvimento das escolas, de seus professores e alunos, do trabalho, empenho e dedicação dos bolsistas e professores da equipe, ainda dependemos da Universidade para viabilizar um Projeto de Extensão dessa natureza. Esperamos que a boa avaliação do Projeto em 2012 sensibilize a Universidade e nos permita realizar novas edições da ORMM.

Segue abaixo, a prova da I ORMM de 2011.

PROVA

1. Daniella e Douglas vão à lanchonete fazer um lanche. A lanchonete oferece as seguintes opções:

Salgado	**Bebida**	**Doce**
Sanduíche	Suco	Sorvete
Coxinha	Refrigerante	Bombom
Pastel		

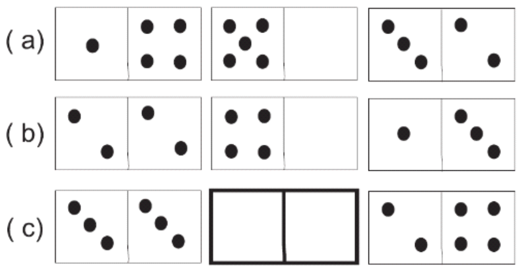
Cada um vai comprar um lanche composto por um salgado, uma bebida e um doce. Daniella não gosta de sorvete e Douglas não gosta de sanduíche.
De quantas maneiras diferentes cada um deles pode escolher seu lanche? Escreva todas as possibilidades.

2. Iara usou sua calculadora para efetuar algumas operações. Ela começou com o número 432 e obteve os seguintes resultados:

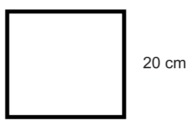
$$432 \qquad 500 \qquad 250 \qquad 2000 \qquad 2011$$

Quais foram as operações que Iara fez para obter cada resultado a partir do anterior?

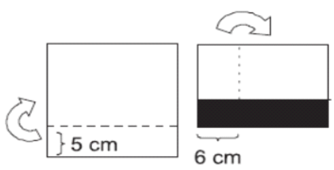
3. Observe as sequências (a) e (b). Descubra o segredo e complete a sequência (c).



4. O desenho abaixo é uma folha quadrada com 20cm de lado.



A folha é dobrada duas vezes, como mostram as figuras (1) e (2).

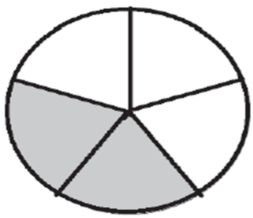


(1) (2)

Após as duas dobras, qual é, em centímetros, o contorno da parte branca da figura (3)?

(3)

5. A especialidade do restaurante Matafome é a pizza de mussarela, que é vendida em fatias. Cada pizza é dividida em cinco fatias. Sabe-se que duas destas fatias matam a fome de uma criança de dez anos, como mostra a figura.



Anieli quer comemorar seu aniversário de dez anos no restaurante Matafome, com seus 14 convidados. Todas as crianças possuem dez anos. Quantas pizzas são necessárias para matar a fome de Anieli e seus convidados?

Curiosidades

O número mágico

O número 1089 é conhecido como o número mágico. Veja o porquê: escolha qualquer número de três algarismos distintos, por exemplo, 875.

Agora escreva este número de trás para frente e subtraia o menor do maior: $875 - 578 = 297$.

Agora inverta também esse resultado e faça a soma: $297 + 792 = 1089$ (o número mágico).

Tentando outra vez com o número 876: escrevendo este número de trás para frente e subtraindo o menor do maior: $876 - 678 = 198$.

Agora invertendo também esse resultado e fazendo a soma: $198 + 891 = 1089$ (o número mágico).

A origem do símbolo da raiz quadrada

O símbolo da raiz quadrada

$$\surd$$

tem uma aparência maravilhosamente antiga, como algo retirado de um manuscrito ancestral sobre alquimia. É o tipo de símbolo que os magos escreviam, e as fórmulas que o contêm sempre parecem impressionantes e misteriosas. Mas onde foi que ele surgiu?

Antes de 1400, os autores matemáticos europeus costumavam usar a palavra "radix"para "raiz"ao se referirem às raízes quadradas.

No fim da Idade Média, eles abreviaram a palavra com a letra inicial, um R maiúsculo cortado por um pequeno traço:

℞

Os algebristas renascentistas italianos Girolamo Cardano, Luca Pacioli, Rafael Bombelli e Tartaglia (Niccolò Fontana) costumavam usar este símbolo.

A origem do símbolo de fatorial

O primeiro símbolo para “fatorial de n”, que é:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1,$$

foi:

$$n\rfloor$$

Mas era um símbolo difícil de imprimir. Assim, em 1808, o matemático francês Christian Kramp decidiu mudá-lo para:

$$n!$$

Mais fácil de imprimir. A versão antiquada rapidamente saiu de moda, sendo um dos muitos exemplos em que as questões práticas de impressão afetaram o simbolismo matemático.

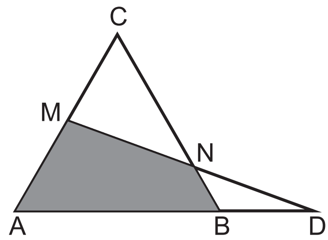
Quem inventou o sinal de igual?

A origem da maior parte dos símbolos matemáticos se perde nas brumas da antiguidade, mas sabemos de onde veio o sinal de igual ($=$). Robert Record foi um médico e matemático galês que, em 1557, escreveu: *"A pedra de amolar o intelecto, que é a segunda parte da aritmética: contendo a extração das raízes; a prática cossike, com a regra da equação; e os trabalhos dos números surdos"*.

No livro, Record escreveu: "Para evitar a tediosa repetição de "é igual a", utilizarei, como faço frequentemente em meu trabalho, um par de retas paralelas, ou gêmeas de extensão, =, pois não pode haver duas coisas mais iguais."

Soluções dos Problemas Propostos

1. Na figura abaixo, ΔABC é um triângulo equilátero com lado igual a 20, o ponto D está sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e $BD = 12$, e M é o ponto médio de $\overline{AC}$. Calcule a área do quadrilátero $ABNM$.



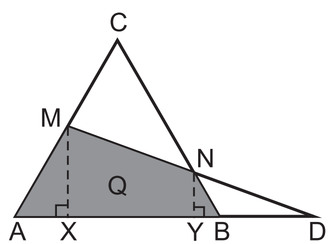
(Proposto por Eliezer Batista, professor do Departamento de Matemática da UFSC, no artigo "Áreas e Semelhanças"da Revista da Olimpíada Regional de Matemática, n^{o}9)

SOLUÇÃO : (apresentada por Natã Machado, aluno de graduação do Curso de Matemática - Bacharelado da UFSC)

Ao analisarmos a figura apresentada no enunciado percebemos que a área do quadrilátero $ABNM$ (chamarei aqui de A_Q) é a área do ΔAMD subtraída da área do ΔBND, isto é:

$$A_Q = A_{\Delta AMD} - A_{\Delta BND}.$$

Para calcularmos as áreas dos triângulos ΔAMD e ΔBND precisamos de suas alturas. Observe a figura abaixo.



Analisemos primeiramente o ΔAMD. Tomando como base o lado AD, temos como altura o segmento MX.

Note que o ΔAMX é retângulo em X, e pelo enunciado sabemos que $AM = 10$ e $M\hat{A}X = 60^{\text{o}}$.

Logo,

$$\frac{MX}{AM} = \text{sen}60^{\text{o}} \quad \Rightarrow \quad MX = 10 \times \text{sen}60^{\text{o}} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow MX = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad MX = 5\sqrt{3}.$$

Como já temos os lados AM e MX, podemos calcular o lado AX do ΔAMX. Ele nos será útil mais a frente.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$(AM)^2 = (MX)^2 + (AX)^2 \quad \Rightarrow \quad AX = \sqrt{(AM)^2 - (MX)^2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AX = \sqrt{10^2 - (5\sqrt{3})^2} \quad \Rightarrow \quad AX = \sqrt{100 - 75} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AX = 5.$$

Analisemos agora o ΔBND. Tomando como base o lado BD, temos como altura o segmento NY (veja figura anterior).

Para acharmos a medida da altura NY teremos que analisar algumas semelhanças entre os triângulos presentes no desenho.

Observe os triângulos ΔDXM e ΔDYN. Pelo caso de semelhança ângulo-ângulo (AA) podemos afirmar que $\Delta DXM \sim \Delta DYN$.

Por consequência da semelhança, concluímos que:

$$\frac{DX}{DY} = \frac{MX}{NY} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB + BD - AX}{BD + BY} = \frac{MX}{NY} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{20 + 12 - 5}{12 + BY} = \frac{5\sqrt{3}}{NY} \quad \Rightarrow \quad \frac{27}{12 + BY} = \frac{5\sqrt{3}}{NY} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 27NY = 60\sqrt{3} + 5\sqrt{3}BY. \tag{1}$$

Chegamos em uma relação com os segmentos NY e BY.

Agora analisemos os triângulos ΔAMX e ΔBNY. Pelo mesmo caso de semelhança usado anteriormente, ângulo-ângulo, podemos afirmar que $\Delta AMX \sim \Delta BNY$.

Por consequência da semelhança, concluímos que:

$$\frac{NY}{MX}=\frac{BY}{AX} \quad\Rightarrow\quad \frac{NY}{5\sqrt{3}}=\frac{BY}{5} \quad\Rightarrow\quad 5NY=5\sqrt{3}BY \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad BY=\frac{\sqrt{3}}{3}NY. \tag{2}$$

Substituindo a relação (2) em (1), temos:

$$27NY=60\sqrt{3}+5\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}NY\right) \quad\Rightarrow\quad 22NY=60\sqrt{3} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow NY=\frac{30}{11}\sqrt{3}.$$

Calculemos agora as áreas dos triângulos ΔAMD e ΔBND.

$$A_{\Delta AMD}=\frac{AD\times MX}{2}=\frac{32\times 5\sqrt{3}}{2}=80\sqrt{3},$$

e

$$A_{\Delta BND}=\frac{BD\times NY}{2}=\frac{12\times\frac{30}{11}\sqrt{3}}{2}=\frac{180\sqrt{3}}{11}.$$

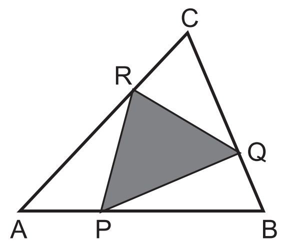
E agora já podemos calcular a área do quadrilátero $ABNM$.

Portanto,

$$A_Q=A_{\Delta AMD}-A_{\Delta BND}=80\sqrt{3}-\frac{180\sqrt{3}}{11}=\frac{700\sqrt{3}}{11}.$$

2. Na figura abaixo, temos que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA} = \frac{1}{2}.$$



a) Calcule a razão entre a área do triângulo ΔPQR e a área do triângulo ΔABC.

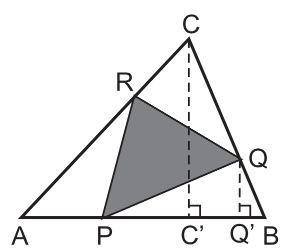
b) Calcule a razão entre a área do triângulo ΔPQR e a área do triângulo cujos lados são congruentes às medianas do triângulo ΔABC.

(Proposto por Eliezer Batista, professor do Departamento de Matemática da UFSC, no artigo "Áreas e Semelhanças"da Revista da Olimpíada Regional de Matemática, nº9)

SOLUÇÃO (a): (apresentada por Natã Machado, aluno de graduação do Curso de Matemática - Bacharelado da UFSC)

SOLUÇÃO (b): (apresentada pelo proponente)

(a) Primeiramente tracemos a altura do ΔABC, relativa à base AB, e chamemos CC'. Depois tracemos a altura do ΔBPQ, relativa à base PB, e chamemos QQ', conforme a figura abaixo.



Da figura, temos que:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \times CC'}{2}.$$

Note que $PB = \dfrac{2}{3}AB$ e $BQ = \dfrac{1}{3}BC$.
Agora, analisando os triângulos $\Delta BCC'$ e $\Delta BQQ'$, observamos que eles são semelhantes pelo caso de semelhança ângulo-ângulo (AA).
Então:

$$\frac{QQ'}{CC'} = \frac{BQ}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{QQ'}{CC'} = \frac{\frac{1}{3}BC}{BC} \quad \Rightarrow \quad QQ' = \frac{1}{3}CC'.$$

Portanto,

$$A_{\Delta BPQ} = \frac{PB \times QQ'}{2} = \frac{\frac{2}{3}AB \times \frac{1}{3}CC'}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\Delta BPQ} = \frac{AB \times CC'}{9}.$$

Com o mesmo raciocínio, descobre-se que:

$$A_{\Delta APR} = A_{\Delta CQR} = A_{\Delta BPQ} = \frac{AB \times CC'}{9}.$$

(No cálculo da área do triângulo ΔCQR, será necessário analisar a área do triângulo ΔABC em relação à base AC, mas ao final teremos que $A_{\Delta CQR} = \dfrac{AC \times BB'}{9}$. Sendo BB' a altura do triângulo ΔABC relativa à base AC).
Como $A_{\Delta ABC} = \dfrac{AB \times CC'}{2} = \dfrac{AC \times BB'}{2}$, concluímos que $AB \times CC' = AC \times BB'$.
Assim,

$$A_{\Delta CQR} = \frac{AB \times CC'}{9}.$$

Logo,

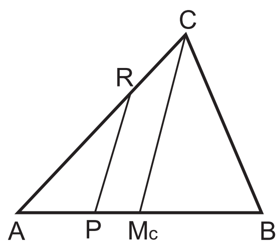
$$A_{\Delta PQR} = \frac{AB \times CC'}{2} - 3 \times \left(\frac{AB \times CC'}{9}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\Delta PQR} = \frac{AB \times CC'}{6}.$$

Logo, a razão entre as áreas dos triângulos $A_{\Delta PQR}$ e $A_{\Delta ABC}$ é:

$$\frac{A_{\Delta PQR}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\dfrac{AB \times CC'}{6}}{\dfrac{AB \times CC'}{2}} = \frac{1}{3}.$$

(b) Sejam a, b, c os lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Sejam também M_a, M_b, M_c os pontos médios dos lados a, b e c, respectivamente. Finalmente, sejam u_a, u_b e u_c as medidas das medianas AM_a, BM_b e CM_c, respectivamente.



Consideremos o lado PR e a mediana CM_c.

Temos que $AP = \frac{1}{3}AB$ e $AR = \frac{2}{3}AC$. Temos ainda que:

$$\frac{AP}{AM_c} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{1}{2}AB} = \frac{2}{3} = \frac{AR}{AC} \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{PR} // \overleftrightarrow{CM_c}$$

e, pelo caso AA de semelhança, $\triangle APR \sim \triangle AM_cC$.

Então:

$$\frac{PR}{M_cC} = \frac{AR}{AC} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad PR = \frac{2}{3}M_cC = \frac{2}{3}u_c.$$

Analogamente, teremos que:

$$PQ = \frac{2}{3}u_a \quad \text{e} \quad QR = \frac{2}{3}u_b.$$

Com isto podemos concluir que realmente existe um triângulo de lados u_a, u_b, u_c pois satisfazem à desigualdade triangular:

$$u_a = \frac{3}{2}PQ < \frac{3}{2}(QR + RP) = \frac{3}{2}QR + \frac{3}{2}RP = u_b + u_c.$$

Analogamente,

$$u_b < u_a + u_c \quad \text{e} \quad u_c < u_a + u_b.$$

Seja $\triangle KLM$ o triângulo tal que $KL = u_a$, $LM = u_b$ e $MK = u_c$, pelo caso LLL de semelhança temos $\triangle KLM \sim \triangle PQR$ e a razão de semelhança é:

$$\frac{PQ}{KL} = \frac{QR}{LM} = \frac{RP}{MK} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{\triangle PQR}}{A_{\triangle KLM}} = \frac{4}{9}.$$

Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão um exemplar da mesma (Veja "Informações Gerais").

1. *(Proposto pelo Professor José Luiz Rosas Pinho, do Departamento de Matemática da UFSC)*

   Prove que, dentre todos os triângulos retângulos de perímetro dado, aquele que tem hipotenusa <u>mínima</u> é o triângulo isósceles (solução sem usar Cálculo Diferencial). Mostre que não existe um triângulo retângulo de perímetro dado que tenha hipotenusa máxima. Argumente, a priori, porque o problema deve ter solução para hipotenusa mínima e não tem para hipotenusa máxima.

2. *(Proposto pelo Professor José Luiz Rosas Pinho, do Departamento de Matemática da UFSC)*

   Considere a circunferência de centro no ponto $(0, 0)$ e raio 2, e considere os pontos $A(0, 4)$ e $B(6, 4)$. Encontre as coordenadas do ponto P na circunferência de modo que a medida do ângulo $A\hat{P}B$ seja <u>máxima</u> (solução sem usar Cálculo Diferencial).

Premiados da ORM em Olimpíadas de Matemática

Premiados da ORM em Olimpíadas de Matemática

Airton José Schmitt Junior - Biguaçu
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Amadeo Zimermann - São Pedro de Alcântara
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Medalha de Prata na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Ana Carolina de Medeiros da Silva - Joinville
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Anderson Negreli - São Bento do Sul
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Prata na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

André Victória Matias - Criciúma
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Bruno da Silveira Dias - Florianópolis
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Bruno Leonardo Schneider - São José
Medalha de Bronze na I Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1998 (Nível 1)
Medalha de Prata na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Menção Honrosa na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Menção Honrosa na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)
Medalha de Prata na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Bruno Mota - Joinville
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Bruno Nunes - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Carlos Bruno Medeiros da Costa Pereira Neto - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Caroline da Silveira - Joinville
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Douglas Ohf - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Eduardo Adelano Agostini Pasold - Timbó
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Eduardo José Mendes - Biguaçu
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Eduardo Lennert Rammé - Joinville
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2011 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Elisangela Dornelles - Massaranduba
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Felipe Paupitz Schilichting - Florianópolis
Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)
Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Fernanda Momm Antunes - Joinville
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Fernando Luiz Alves Lapa - Joinville
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Gabriel Augusto Moreira - Joinville
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Gabriel Machado - Massaranduba
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Gislaine Hoffmann - Antônio Carlos
Medalha de Prata na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Medalha de Prata na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Giuliano Boava - Criciúma
Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 3)
Medalha de Prata na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 3)
Menção Honrosa na III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2000
Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2001

Menção Honrosa na IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2001
Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2002
Menção Honrosa na V Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2002
Medalha de Bronze na XXV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2003
Medalha de Bronze (Third Prize) na X Internacional Mathematical Competition for University Students em 2003 - Cluj-Napoca, Romênia
Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2004

Guilherme Rohden Echelmeier - Itajaí
Medalha de Prata na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)
Medalha de Ouro na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)
Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)
Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 2)
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)

Guilherme Weber Menon - Joinville
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Gustavo Bernardo de Oliveira - Joinville
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Gustavo Lisbôa Empinotti - Florianópolis
Medalha de Prata na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)
Medalha de Ouro na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Medalha de Prata na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na 13ª Olimpíada de Maio em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XIX Olimpíada de Matemática do Cone Sul em 2008 - Temuco, Chile
Medalha de Prata na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na LI Olimpíada Internacional de Matemática em 2010 - Astana, Cazaquistão
Medalha de Bronze na III Romanian Master in Mathematics em 2010
Medalha de Bronze na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2010
Medalha de Prata na 25ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2010 - Assunção, Paraguai
Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 3)
Menção Honrosa na IV Romanian Master in Mathematics em 2011
Medalha de Prata na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2011
Medalha de Bronze na LII Olimpíada Internacional de Matemática em 2011 - Amsterdã, Holanda

Hanna Kurihara e Silva - Florianópolis
Medalha de Bronze na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)

Medalha de Bronze na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)
Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Helena Carolina Rengel Koch - Jaraguá do Sul
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Ivani Ivanova Ivanova - Blumenau
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Medalha de Prata na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Janine Garcia - São Francisco do Sul
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

João Marcos Carnieletto Nicolodi - Florianópolis
Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 1)
Medalha de Ouro na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Julia Almeida Oliveira - Joaçaba
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Júlia Bertelli - Joinville
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 1)
Medalha de Prata na 17ª Olimpíada de Maio em 2011 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Julia Heck Deters - Itapiranga
Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Karina Livramento dos Santos - Navegantes
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Laiane Freitas Suzart - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Leandro Augusto Lichtenfelz - Blumenau
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2008
Medalha de Prata (Second Prize) na XVI Internacional Mathematical Competition for University Students em 2009 - Budapeste, Hungria

Leandro Jun Kimura - Joinville
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Leandro Roza Livramento - Florianópolis
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Leonardo Gonçalves Fischer - Fraiburgo
Medalha de Bronze na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)
Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Leonardo Lennert Rammé - Joinville
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Leonard Henrrik Wodtke - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Letícia Perini - Timbó
Menção Honrosa na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Lucas Bruno Barbosa Sandoval - Florianópolis
Medalha de Ouro na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 2)
Medalha de Bronze na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 3)

Lucas Lolli Savi - Florianópolis
Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)
Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 2)
Medalha de Bronze na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)

Luis Fernando Momm Antunes - Joinville
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Luiz Fernando Bossa - Brusque
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Medalha de Ouro na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Mikhail Zimmer Heidrich - Lages
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Natália Deyse Koch - Chapecó
Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Natan Cardozo Leal - São Bento do Sul
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)
Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 3)
Medalha de Prata na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Nicole Braga de Medeiros Nicolak - Joinville
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 1)
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Renan Henrique Finder - Joinville
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)

Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)
Medalha de Prata na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 2)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 2)
Medalha de Prata na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 3)
Medalha de Ouro na XVIII Olimpíada de Matemática do Cone sul em 2007 - Uruguai
Medalha de Prata na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)
Medalha de Prata na 23ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2008 - Brasil
Medalha de Prata na 49ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2008 - Madri, Espanha
Medalha de Prata na 50ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2009 - Bremen, Alemanha
Medalha de Ouro na 24ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2009 - Santiago de Querétaro, México
Medalha de Ouro na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)
Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2010
Medalha de Ouro na XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2011
Medalha de Ouro (First Prize) na XVIII International Mathematics Competition for University Students em 2011
Medalha de Prata na III Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática em 2011 - Quito, Equador
Medalha de Ouro (First Prize) na XIX Internacional Mathematical Competition for University Students em 2012 - Blagoevgrad, Bulgária
Medalha de Ouro na IV Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática em 2012 - Guanajuato, México

Rodrigo Vicente Cercal - Joinville
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Rogério Hannemann Júnior - Joinville
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Ruan Victor Soares da Silva - Joinville
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Shadi Bavar - Blumenau
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Sidnei Rodrigo Dos Santos - Jaraguá do Sul
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Simon Joel Warkentin - Joinville
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Tiago Madeira - Itajaí
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 1)
Medalha de Bronze na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada de Maio em 2003 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 2)
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada de Maio em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)
Medalha de Prata na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)

Vitor Costa Fabris - Criciúma
Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)
Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Vitor Probst Curtarelli - Timbó
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Medalha de Prata na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Informações Gerais

Envio de Problemas e Soluções

As seções de problemas propostos e soluções são seções dinâmicas. Contribua propondo problemas ou enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém, podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o LaTeX, então o artigo deverá ser preferencialmente submetido neste formato.

Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) devem cadastrar suas escolas. O cadastramento para a OBM e ORM é feito somente no site da OBM (www.obm.org.br). Escolas já cadastradas em anos anteriores deverão confirmar a cada novo ano a sua inscrição. Para o cadastramento será necessário o código do Inep da escola. Existe um período para cadastramento ou confirmação. Consulte o site da OBM. No site não aparece a opção para cadastramento na ORM. As escolas cadastradas para a OBM estarão automaticamente cadastradas para a ORM. No cadastramento deve ser indicado o nome de apenas um dos seguintes coordenadores regionais: José Luiz Rosas Pinho ou Licio Hernanes Bezerra).

Alunos interessados em participar das olimpíadas devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberem a revista podem solicitar o envio da mesma.

Além disso, a revista é enviada às universidades federais brasileiras (um exemplar por IES), por intermédio da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

– nosso site: www.orm.mtm.ufsc.br
– telefone/Fax: (48) 37216809 (PET Matemática)
– e-mail: orm@pet.mtm.ufsc.br
– endereço: PET Matemática
Departamento de Matemática - CFM
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Universitário - Trindade
88040-900 – Florianópolis/SC