UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

XXI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

Resolução da prova – 1ª fase – Nível 3

19 de junho de 2018

Problema 1. Em um campeonato de futebol, cada time jogou duas partidas contra os demais (portanto, o time A jogou duas partidas contra o time B, duas partidas contra o time C, e assim sucessivamente). Em seguida, os dois melhores colocados disputaram a final, em jogo único. Ao final do campeonato foram jogadas 133 partidas. Qual foi o número de times que participaram deste campeonato?

a) 10 b) 11 c) 12 d) 14 e) 20

Resolução: Denotando por n o número de times, veja que uma partida da primeira fase fica determinada se escolhermos um dos times (n possibilidades), e em seguida o seu adversário ($n-1$ possibilidades). Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de partidas disputadas na primeira fase é dado por $n \cdot (n-1)$. Note que neste problema, estamos considerando $A \times B$ e $B \times A$ como partidas diferentes, pois cada time jogou duas partidas contra os demais. Como a final foi disputada em jogo único, o número de partidas da primeira fase é dado por $133 - 1 = 132$. Assim, segue que $n \cdot (n-1) = 132$, e portanto $n = 12$.

(**Alternativa C**)

Problema 2. Um lojista remarcou o preço de uma televisão, baixando-o em 20%. No dia seguinte, arrependido, ele aumentou em 20% o preço remarcado. Comparado com o preço inicial, ao final, o preço da televisão ficou:

a) 4% menor. b) 4% maior. c) o mesmo. d) 2% maior. e) 2% menor.

Resolução: Seja P_0 o preço inicial da televisão. Ao reduzi-lo em 20%, o preço da televisão passou a ser $P_1 = \frac{80P_0}{100}$. Quando o lojista aumentou em 20% o preço remarcado, o preço final, $P2$, ficou

$$P_2 = \frac{120P_1}{100} = \frac{120\frac{80P_0}{100}}{100} = \frac{12 \cdot 8 \cdot P_0}{100} = \frac{96P_0}{100}.$$

Portanto, o preço final da televisão é 96% do preço inicial, ou seja, 4% menor do que o preço inicial.

(**Alternativa A**)

Problema 3. Em um triângulo retângulo ΔABC com ângulo reto em A, temos que $AB = 3$ cm e $AC = 4$ cm. Seja D um ponto no lado $\overline{AC}$ tal que $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $\angle ABC$. A área do triângulo ΔBCD é igual a:

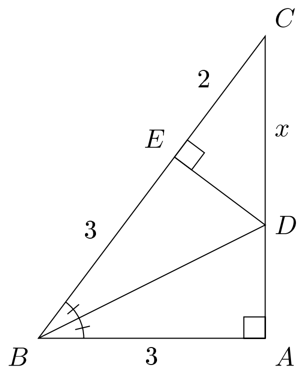
a) $\frac{9}{4}$ cm^2. b) $\frac{12-3\sqrt{3}}{2}$ cm^2. c) 3 cm^2. d) $\frac{15}{4}$ cm^2. e) 6 cm^2.

Resolução: Considerando o ponto E no lado $\overline{BC}$ tal que $BE = 3$, temos que ΔABD e ΔEBD são triângulos congruentes (caso de congruência LAL), e portanto os ângulos em E são ângulos retos. Desse modo, ΔEDC e ΔABC são semelhantes (caso de semelhança AA) e, denotando $CD = x$, temos

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{4}$$

Segue que $x = \frac{5}{2}$ cm e, portanto, a área do triângulo ΔBCD é

$$\mathcal{A} = \frac{3 \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{15}{4} \text{ cm}^2$$



(**Alternativa D**)

Problema 4. A soma dos dois últimos algarismos (dezena e unidade) do número 2018^{2018} é:

a) 5 b) 6 c) 9 d) 13 e) 14

Resolução: Para encontrarmos os algarismos da dezena e da unidade de 2018^{2018}, trabalharemos módulo 100. Abaixo, listamos 2018^n para $n = 1, \ldots, 8$, para vermos se há algum padrão nos resultados.

- $2018^1 \equiv 18 \mod 100$
- $2018^2 \equiv 18^2 \equiv 24 \mod 100$
- $2018^3 \equiv 24 \cdot 18 \equiv 32 \mod 100$
- $2018^4 \equiv 32 \cdot 18 \equiv 76 \mod 100$
- $2018^5 \equiv 76 \cdot 18 \equiv 68 \mod 100$
- $2018^6 \equiv 68 \cdot 18 \equiv 24 \mod 100$
- $2018^7 \equiv 24 \cdot 18 \equiv 32 \mod 100$
- $2018^8 \equiv 32 \cdot 18 \equiv 76 \mod 100$

Há um padrão cíclico: de 2018^2 em diante, os dois últimos algarismos se repetem a cada aumento de 4 no expoente. Portanto, para quaisquer $q, r \in \mathbb{N}$ com $r \geq 2$ temos que

$$2018^{r+4q} \equiv 2018^r \mod 100.$$

Assim,

$$2018^{2018} = 2018^{2+4\cdot 254} \equiv 2018^2 \equiv 24 \mod 100,$$

e disso segue que 2018^{2018} termina em 24. A soma dos algarismos desejada é portanto $2 + 4 = 6$.

(**Alternativa B**)

Problema 5. Uma reta é dita tangente a uma parábola se a parábola está toda de um lado da reta e se esta reta intercepta a parábola em apenas um ponto.

A equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$ é:

a) $y = x$. **b)** $y = 2x$. **c)** $y = 2x - 1$. **d)** $y = x - 1$. **e)** $x = 1$.

Resolução: A equação da reta não vertical que passa por um ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m é dada por

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m.$$

A reta tangente à parábola $y = x^2$ em $P(1, 1)$ não pode ser a reta vertical $x = 1$, pois nesse caso teríamos que a parábola não está toda de um lado da reta.

Logo, obtemos no nosso problema que

$$\frac{y - 1}{x - 1} = m,$$

em que m denota o coeficiente angular da reta, ou seja, a equação da reta procurada é da forma

$$y = mx - (m - 1).$$

Devemos encontrar o valor do coeficiente angular m tal que essa reta seja tangente a parábola $y = x^2$. Para determinarmos os pontos de intersecção dessa reta com a parábola igualamos suas expressões, obtendo

$$x^2 = y = mx - (m - 1).$$

Reorganizando a equação acima obtemos

$$x^2 - mx + (m - 1) = 0, \tag{1}$$

cujo discriminante é

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2.$$

Como a Equação (1) tem uma única solução se, e somente se, seu discriminante é zero, obtemos que o valor do coeficiente angular deve ser $m = 2$ e, portanto, a equação da reta é $y = 2x - 1$.

(**Alternativa C**)

Problema 6. O número natural $2^{500} + 1$ é:

a) múltiplo de 17. b) primo. c) múltiplo de 15. d) múltiplo de $(2^{125}+1)$. e) múltiplo de $(2^{125}-1)$.

Resolução: Uma vez que $16 \equiv (-1) \mod 17$, temos que

$$2^{500}+1 \equiv (2^4)^{125}+1 = 16^{125}+1 \equiv (-1)^{125}+1 \equiv -1+1 \equiv 0 \mod 17,$$

e disso segue que $2^{500}+1$ é múltiplo de 17.

Uma outra resolução: dados a e b números reais e m e n números naturais quaisquer com m ímpar, temos que

$$a^{mn}+b^{mn} = (a^n+b^n)\left(a^{n(m-1)} - a^{n(m-2)}b^n + \cdots + (-1)^{m-2}a^n b^{n(m-2)} + (-1)^{m-1}b^{n(m-1)}\right).$$

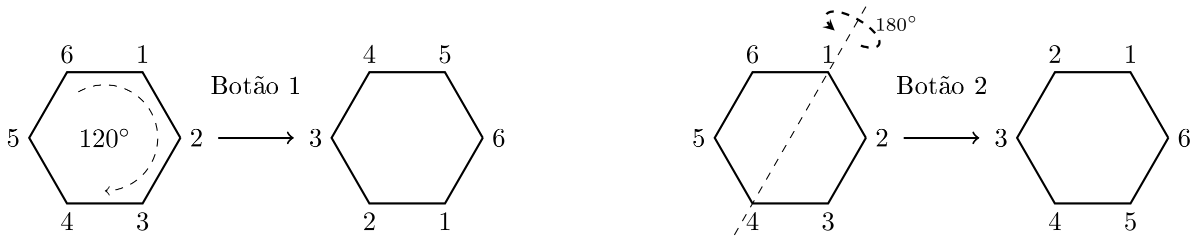
Fazendo $a=2$, $b=1$, $m=125$ e $n=4$, obtemos

$$2^{500}+1 = (2^4+1)(2^{496}+\cdots+1) = 17(2^{496}+\cdots+1),$$

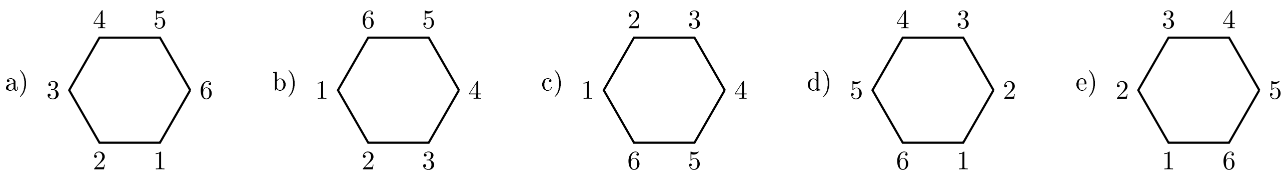
logo, $2^{500}+1$ é múltiplo de 17.

(**Alternativa A**)

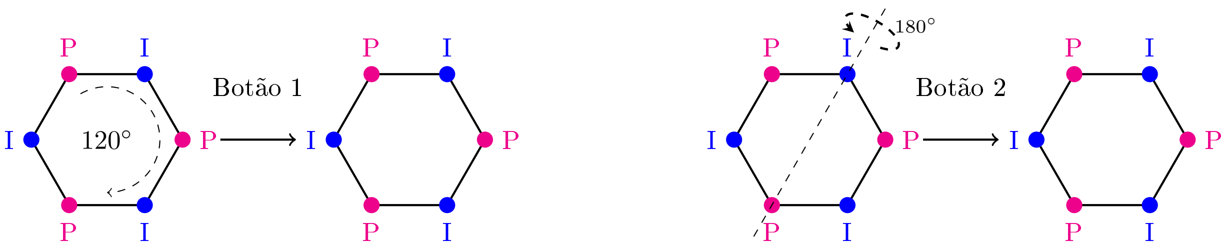
Problema 7. Ao apertar o botão 1 de uma máquina, um hexágono regular é girado 120º no sentido horário ao redor de seu centro no plano. Ao apertar o botão 2, o hexágono é girado, no espaço, 180º com relação à diagonal que "sobe da esquerda para a direita".



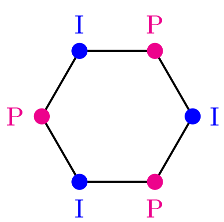
Qual das configurações abaixo não é possível obter, independentemente da ordem e de quantas vezes os botões 1 e 2 são apertados?



Resolução: No hexágono original, denotemos os vértices ímpares com a letra I, e os vértices pares com a letra P. Os movimentos realizados ao apertarmos os botões 1 e 2 sempre levam P em P, e I em I.



Portanto, qualquer sequência de apertos destes botões sempre leva P em P, e I em I. Assim, vemos que a configuração abaixo não pode ser obtida a partir da original, pressionando os botões.



Uma vez que o hexágono apresentado na alternativa E tem essa configuração, não podemos obtê-lo.

(**Alternativa E**)

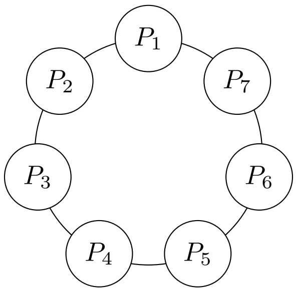
Problema 8. Sentadas ao redor de uma mesa redonda há 7 pessoas, que podem ser de três tipos: os *fulanos*, que sempre falam a verdade; os *ciclanos*, que sempre mentem; e os *beltranos*, que podem falar a verdade ou mentir. Sabendo que cada pessoa da mesa disse que a pessoa à direita dela é um ciclano, qual é o número mínimo de beltranos que deve haver na mesa?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Resolução: Mostraremos primeiro que é impossível que haja apenas ciclanos na mesa: isto é verdade pois, se há um ciclano na mesa, ele mente ao dizer que a pessoa a sua direita é um ciclano e, portanto, a pessoa à direita desse ciclano é um fulano ou um beltrano.

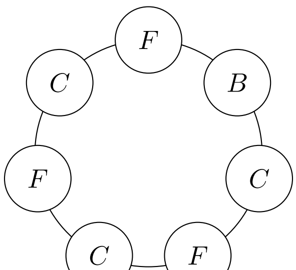
Em seguida, mostraremos que é impossível não haver algum beltrano sentado à mesa: de fato, suponha por absurdo que não há beltranos na mesa. Isto quer dizer que cada pessoa na mesa é um fulano ou um ciclano. Como já sabemos que é impossível que haja apenas ciclanos na mesa, e estamos supondo que não há beltranos na mesa, isto garante que há pelo menos um fulano na mesa.

Denotando este fulano por P_1, denotemos as demais pessoas da mesa por $P_2, \ldots, P_7$, em que P_2 está à direita de P_1, P_3 está à direita de P_2, e assim sucessivamente, como na figura.



- Como P_1 é fulano, P_1 fala a verdade ao dizer que P_2 é um ciclano; portanto, P_2 é ciclano.
- Como P_2 é ciclano, P_2 mente ao dizer que P_3 é um ciclano; portanto, P_3 é fulano ou beltrano e, como supusemos que não há beltranos na mesa, segue que P_3 é necessariamente um fulano.
- Seguindo o mesmo raciocínio, podemos concluir que P_4 é ciclano, P_5 é fulano, P_6 é ciclano e P_7 é fulano.
- Como P_7 é fulano, P_7 fala a verdade ao dizer que P_1 (a pessoa a sua direita) é um ciclano; portanto, P_1 é ciclano, o que é absurdo pois, como sabemos lá do início, P_1 é fulano!

O absurdo surgiu de termos suposto erroneamente que não há beltranos na mesa. Pelo exposto, há pelo menos um beltrano na mesa, portanto. Existem configurações com apenas um beltrano na mesa. Abaixo mostramos um exemplo, denotando os fulanos por F, ciclanos por C e beltranos por B.



Assim, o número mínimo de beltranos que deve haver na mesa é 1.

(**Alternativa B**)

Problema 9. Para celebrar os 21 anos da ORM, Nicolas calcula o produto

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 21$$

e encontra a soma S_1 de todos os algarismos deste número. Em seguida, calcula a soma S_2 de todos os algarismos de S_1. Prosseguindo desta forma, Nicolas chegará em um S_k que tem apenas um algarismo. Que algarismo é este?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Resolução: O número $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 21$ é divisível por 9, logo a soma S_1 de seus algarismos também é divisível por 9; portanto, a soma S_2 dos algarismos de S_1 também é divisível por 9, e assim por diante.

Assim, vemos que o número S_k é divisível por 9 e, como S_k tem apenas um algarismo, ele necessariamente é igual a 9.

(**Alternativa E**)

Problema 10. Seja ΔABC um triângulo equilátero, e sejam D e E pontos sobre o lado $\overline{AC}$ tais que $CD = DE = EA = \dfrac{CA}{3}$. Denotando por α a medida do ângulo $\angle CBD$, por β a medida do ângulo $\angle DBE$ e por γ a medida do ângulo $\angle EBA$, temos que:

a) $\alpha < \beta < \gamma$. b) $\alpha = \gamma < \beta$. c) $\alpha = \gamma > \beta$. d) $\alpha > \beta > \gamma$. e) $\alpha = \beta = \gamma$.

Resolução: Os triângulos ΔABE e ΔCBD são congruentes pelo caso LAL, assim $\alpha = \gamma$. Considere o ponto $K \in \overrightarrow{BE}$ tal que E esteja entre B e K e $BK = BC$. Na intersecção da circunferência de centro D e raio DC com a circunferência de centro B e raio BK está um ponto L que é o terceiro vértice de um triângulo ΔBDL, congruente ao triângulo ΔBDC pelo caso LLL (o outro ponto de intersecção das duas circunferÊncias é exatamente o ponto C). Note que a circunferência de centro B e raio BC é exterior ao triângulo ΔABC. Então, o ponto L estará no mesmo semiplano que D, em relação à reta $\overleftrightarrow{BK}$. Assim, a medida do ângulo $\angle DBL$ é menor que a medida do ângulo $\angle DBK$. Finalmente, como $\Delta BDL \equiv \Delta BDC$, temos que $D\widehat{B}L = \alpha < D\widehat{B}K = \beta$. Portanto $\alpha = \gamma < \beta$.

(**Alternativa B**)