XXI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

Resolução da prova – 1ª fase – Nível 2

19 de junho de 2018

Problema 1. Em um campeonato de futebol, cada time jogou duas partidas contra os demais (portanto, o time A jogou duas partidas contra o time B, duas partidas contra o time C, e assim sucessivamente). Em seguida, os dois melhores colocados disputaram a final, em jogo único. Ao final do campeonato foram jogadas 133 partidas. Qual foi o número de times que participaram deste campeonato?

a) 10 b) 11 c) 12 d) 14 e) 20

Resolução: Denotando por n o número de times, veja que uma partida da primeira fase fica determinada se escolhermos um dos times (n possibilidades), e em seguida o seu adversário ($n-1$ possibilidades). Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de partidas disputadas na primeira fase é dado por $n.(n-1)$. Note que neste problema, estamos considerando $A \times B$ e $B \times A$ como partidas diferentes, pois cada time jogou duas partidas contra os demais. Como a final foi disputada em jogo único, o número de partidas da primeira fase é dado por $133 - 1 = 132$. Assim, segue que $n.(n-1) = 132$, e portanto $n = 12$.

(**Alternativa C**)

Problema 2. Pinho, Danilo, Fernando, Eliezer e Felipe disputaram uma prova de atletismo. Consideremos que:

- Felipe chegou antes de Pinho e Fernando;
- Eliezer chegou antes de Felipe;
- Danilo chegou depois de Fernando;
- Danilo não foi o último a chegar.

As medalhas de ouro, prata e bronze deverão ser entregues, respectivamente, a:

a) Eliezer, Felipe e Fernando.
b) Eliezer, Felipe e Pinho.
c) Eliezer, Fernando e Pinho.
d) Fernando, Eliezer e Felipe.
e) Danilo, Fernando e Pinho.

Resolução: Pelas informações do enunciado, Eliezer chegou na frente de Felipe, e Felipe chegou na frente de Pinho e Fernando (não necessariamente nessa ordem). Como Danilo não foi o último, e chegou depois de Fernando, concluímos que o último lugar ficou com Pinho, e assim a ordem de chegada é a seguinte: Eliezer - Felipe - Fernando - Danilo - Pinho.

(**Alternativa A**)

Problema 3. No dia de seu aniversário, Pedro recebeu seu salário e colocou o dinheiro no bolso. Em seguida, gastou $\frac{2}{5}$ desse dinheiro com aluguel. Encontrou, logo após, um amigo que lhe deu de presente 10% do valor que ainda restava após o pagamento do aluguel. Sabendo que, após receber o presente, Pedro ficou com R$ 1.320,00, qual o salário de Pedro?

a) R$ 2.200,00 b) R$ 2.000,00 c) R$ 1.800,00 d) R$ 1.500,00 e) R$ 1.200,00

Resolução: Denotando por x o salário de Pedro, o valor gasto com aluguel corresponde a $\frac{2x}{5}$. Assim, após o pagamento do aluguel, restaram para Pedro $\frac{3x}{5}$ reais. Como o presente que ele recebeu corresponde a 10% do restante, chegamos na equação: $x - \frac{2x}{5} + 0,1 \cdot \frac{3x}{5} = 1320$. Resolvendo, chegamos ao resultado $x = 2000$.

(**Alternativa B**)

Problema 4. Quantos números pares formados por dois algarismos distintos satisfazem a propriedade que a diferença entre o maior algarismo e o menor é múltiplo de 3?

a) 5 b) 7 c) 8 d) 10 e) 11

Resolução: Para um número ser par, ele deve terminar com um dos seguintes algarismos: $0, 2, 4, 6, 8$. Como os algarismos do número são diferentes e a diferença entre eles é um múltiplo de três, temos três possibilidade para essa diferença: $3, 6, 9$. Vamos listar os números com essas propriedades:

- Terminando com 0: 30, 60 e 90.
- Terminando com 2: 52 e 82.
- Terminando com 4: 14 e 74.
- Terminando com 6: 36 e 96.
- Terminando com 8: 28 e 58.

Ao todo, temos 11 números.

(**Alternativa E**)

Problema 5. No ano passado, a correção de um lote das provas da Olimpíada Regional de Matemática foi feita pelas professoras Alda e Carmem. Sabe-se que o ritmo de correção das professoras é diferente: a cada 12 minutos, Carmem corrige 3 provas, e Alda corrige 5 provas. Além disso, a cada 40 provas corrigidas nesse lote, elas fazem uma pausa de 10 minutos para um café. Sabendo que o total de provas desse lote é 256, em quanto tempo elas terminaram a correção?

a) 6 horas e 24 minutos b) 6 horas e 54 minutos c) 7 horas e 24 minutos d) 7 horas e 34 minutos e) 8 horas

Resolução: Pelo enunciado, a cada 12 minutos, Alda e Carmem corrigem juntas 8 provas. Dessa forma, em 1 hora (60 minutos), eles corrigem juntas 40 provas. Como $256 = 6 \cdot 40 + 16$, segue que as professoras gastam um tempo de 6 horas e 24 minutos na correção das provas (6 horas para as 240 provas, e 24 minutos para as 16 provas restantes). Somando a esse tempo as 6 pausas para o café, cada uma com 10 minutos, obtemos um tempo total de 7 horas e 24 minutos.

(**Alternativa C**)

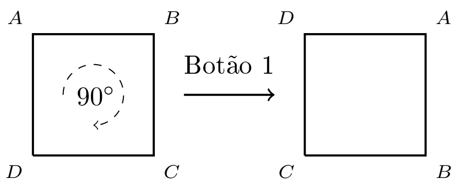
Problema 6. Dois irmãos nasceram no mês de janeiro. Em junho de 2018, a diferença da idade entre eles é de 20 anos, e o irmão mais velho tem o quadrado da idade do irmão mais novo. Em que ano nasceu o irmão mais velho?

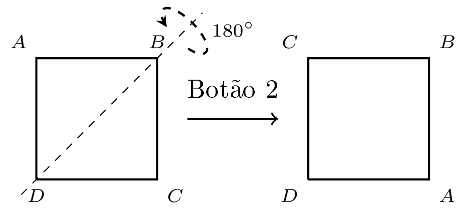
a) 1990 b) 1991 c) 1992 d) 1993 e) 1994

Resolução: Sendo x a idade do mais novo e y idade do mais velho, temos que $y - x = 20$ e $x^2 - x = 20$. Então, segue que $x = 5$, e $y = 25$. Portanto, o mais velho nasceu em 1993.

(**Alternativa D**)

Problema 7. Ao apertar o botão 1 de uma máquina, um quadrado é girado 90º no sentido horário ao redor de seu centro no plano. Ao apertar o botão 2, o quadrado é girado, no espaço, 180º com relação à diagonal que "sobe da esquerda para a direita". Uma pessoa aperta os botões 1 e 2 alternadamente, começando com o botão 1.





Depois de quantos apertos, volta-se à configuração original?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Resolução: Começando do quadrado ABCD, e apertando os botões 1 e 2 alternadamente, obtemos:

- Inicialmente, apertando o botão 1: DACB;
- Em seguida, apertando o botão 2: BADC;
- Em seguida, apertando o botão 1: CBAD;
- Em seguida, apertando o botão 2: ABCD.

Dessa forma, após 4 apertos de botão, voltamos à configuração original.

(**Alternativa C**)

Problema 8. Paulo, Úrsula, Flávia e Felipe criaram um jogo, que chamaram de jogo do PUFF, que funciona da seguinte forma: devem-se citar os números naturais, em ordem crescente, do número 1 até o número 1000. Porém, no lugar dos números múltiplos de 3 e dos que terminam em 3 deve-se dizer PUFF. Por exemplo, o começo do jogo é: 1 (Paulo), 2 (Úrsula), PUFF (Flávia), 4 (Felipe), 5 (Paulo), PUFF (Úrsula), 7 (Flávia)... Quantas vezes a palavra PUFF foi dita por Paulo, Úrsula ou Flávia?

a) 316 b) 226 c) 334 d) 443 e) 208

Resolução: Primeiro note que o total de números de 1 a 1000 que terminam em 3 é 100 (fixando 3 no final e variando o primeiro e segundo dígitos). O total de números que são múltiplos de 3 são 333 (parte inteira da divisão de 1000 por 3). Porém, alguns são múltiplos de 3 e terminam em 3 ao mesmo tempo. Para ser múltiplo de 3 e terminar em 3 ao mesmo tempo, é necessário (e suficiente) que a soma do primeiro e segundo dígito seja múltiplo de 3. Então, precisamos saber quantos números de 00 a 99 são múltiplos de 3, e são 34. Portanto, no total a palavra PUFF foi dita $100 + 333 - 34 = 399$ vezes. Resta ver quantas vezes Felipe falou PUFF. Felipe é o quarto a falar, e portanto todos os números que ele vai falar serão múltiplos de 4. Como nenhum múltiplo de 4 termina com o algarismo 3, Felipe vai falar PUFF apenas quando o número da sua vez for múltiplo de 4 e de 3, ou seja, múltiplo de 12. Finalmente, veja que a quantidade de múltiplos de 12 entre os números de 1 a 1000 é a parte inteira de 1000 dividido por 12, que é 83. Portanto, a resposta para o problema é $399 - 83 = 316$.

(**Alternativa A**)

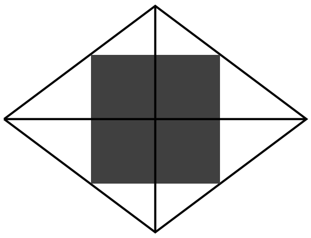
Problema 9. Uma máquina imprime placas de automóveis. Para tanto, ela usa 2 letras, dentre as letras A, B, C, D, E, F, G, e 3 números, dentre os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5. Esta máquina imprime uma placa por segundo, e uma mesma placa não é impressa duas vezes. Quanto tempo deve-se aguardar para ter certeza que foi impressa uma placa com 2 consoantes e com 3 algarismos ímpares?

a) mais de 2 horas
b) menos de 1 hora
c) 1 hora, 20 minutos e 17 segundos
d) 1 hora, 30 minutos e 51 segundos
e) 1 hora e 40 minutos

Resolução: A quantidade total de placas possíveis é $7.7.5.5.5 = 6125$. A quantidade total de placas com 2 consoantes e 3 dígitos ímpares é $5.5.3.3.3 = 675$. Para se ter certeza que foi impressa uma placa só com consoantes e números ímpares, é necessário imprimir $6125 - 675 + 1 = 5451$ placas. Isto equivale a 1 hora, 30 minutos e 51 segundos.

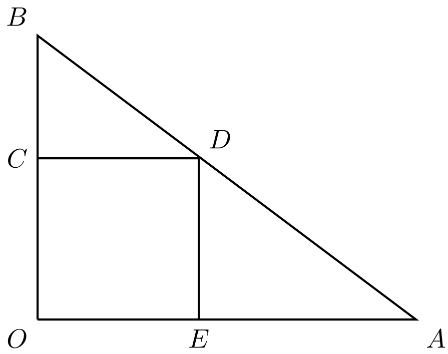
(**Alternativa D**)

Problema 10. Calcular a área do quadrado inscrito no losango de diagonais medindo 3 e 4, conforme figura.



a) 12 b) 9 c) 16 d) $\frac{36}{49}$ e) $\frac{144}{49}$

Resolução: Por simetria, consideraremos apenas um quarto da figura:



Das medidas das diagonais do losango chegamos em $OA = 2$ e $OB = \frac{3}{2}$. Denotando $x = CD = OC$, temos que $BC = \frac{3}{2} - OC = \frac{3}{2} - x$. Os triângulos BOA e BCD são semelhantes, logo:

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{OA}{OB} = \frac{CD}{BC} = \frac{x}{\frac{3}{2} - x} = \frac{2x}{3 - 2x},$$

e isolando x obtemos $x = \frac{6}{7}$; assim, o lado do quadrado original é $2x = \frac{12}{7}$ e, portanto, a área desejada é $\left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{144}{49}$.

(**Alternativa E**)