XXI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

Resolução da prova – 1ª fase – Nível 1

19 de junho de 2018

Problema 1. Uma abelha produz 5 gramas de mel por ano. Em quanto tempo uma colônia de 36000 abelhas consegue produzir 60 quilogramas de mel?

a) 1 ano b) 4 meses c) 3 meses d) 6 meses e) 5 meses e meio

Resolução: Se uma abelha produz 5 gramas de mel por ano, isso significa que produz $\frac{5}{12}$ gramas por mês. Logo, 36000 abelhas produzirão por mês $36000 \times \frac{5}{12} = 15000$ gramas ou 15 quilogramas de mel por mês. Portanto, 60 quilogramas de mel serão produzidos em $60 \div 15 = 4$ meses.

(**Alternativa B**)

Problema 2. Pinho, Danilo, Fernando, Eliezer e Felipe disputaram uma prova de atletismo. Consideremos que:

- Felipe chegou antes de Pinho e Fernando;
- Eliezer chegou antes de Felipe;
- Danilo chegou depois de Fernando;
- Danilo não foi o último a chegar.

As medalhas de ouro, prata e bronze deverão ser entregues, respectivamente, a:

a) Eliezer, Felipe e Fernando.
b) Eliezer, Felipe e Pinho.
c) Eliezer, Fernando e Pinho.
d) Fernando, Eliezer e Felipe.
e) Danilo, Fernando e Pinho.

Resolução: Pelas informações do enunciado, Eliezer chegou na frente de Felipe, e Felipe chegou na frente de Pinho e Fernando (não necessariamente nessa ordem). Como Danilo não foi o último, e chegou depois de Fernando, concluímos que o último lugar ficou com Pinho, e assim a ordem de chegada é a seguinte: Eliezer - Felipe - Fernando - Danilo - Pinho.

(**Alternativa A**)

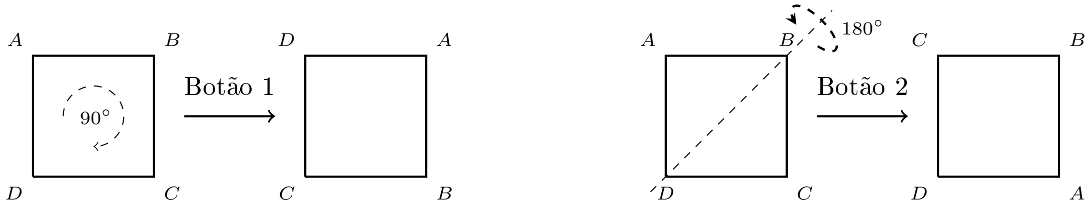
Problema 3. Um número natural é dito *todo ímpar* quando todos os seus algarismos são ímpares. Quantos são os números *todos ímpares* de três algarismos que são múltiplos de cinco?

a) 20 b) 125 c) 25 d) 60 e) 8

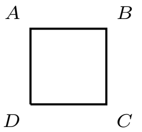
Resolução: Para um número todo ímpar ser múltiplo de 5 o seu algarismo das unidades deve ser igual a 5. Além disso, os possíveis valores para a dezena e centena são: $1, 3, 5, 7$ e 9. Logo, temos $5 \times 5 \times 1 = 25$ números naturais de três algarismos que são todos ímpares.

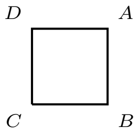
(**Alternativa C**)

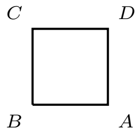
Problema 4. Ao apertar o botão 1 de uma máquina, um quadrado é girado 90º no sentido horário ao redor de seu centro no plano. Ao apertar o botão 2, o quadrado é girado, no espaço, 180º com relação à diagonal que "sobe da esquerda para a direita".

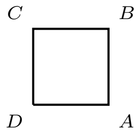


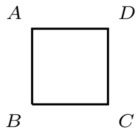
Qual é a configuração do quadrado após apertarmos os botões 2, 1, 1 e 2 nesta ordem?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução: Começando do quadrado ABCD, apertando os botões 2, 1, 1, 2 nesta ordem obtemos:

- Após o botão 2: CBAD,
- Após o botão 1: DCBA,
- Após o botão 1: ADCB,
- Após o botão 2: CDAB.

Ao final, o quadrado está na posição CDAB.

(**Alternativa C**)

Problema 5. A caminho de Bagdá, um jumento e um camelo param num poço para beber água. O camelo diz:

- Este poço é grande. Eu levaria mais de quatro horas para beber sozinho toda a água deste poço. E você?

O jumento responde:

- Você bebe 1 litro a mais do que eu a cada minuto. Olhe o volume do poço: 3036 litros. Nós dois juntos conseguiríamos secar este poço em exatos 132 minutos!

Quantos litros de água o jumento consegue beber em um minuto?

a) 11 litros   b) 10 litros   c) 17 litros   d) 9 litros   e) 12 litros

Resolução: Os dois animais juntos conseguem secar o poço de 3036 litros em 132 minutos, o que significa que os dois juntos bebem $3036 \div 132 = 23$ litros por minuto. Como o camelo é mais rápido em 1 litro por minuto, se o jumento bebe x litros por minuto, o camelo bebe $x+1$ litros por minuto. Fazendo $x + (x+1) = 23$ obtemos $2x + 1 = 23$ e $x = 11$.

(**Alternativa A**)

Problema 6. Nicolas cortou uma folha quadrada em três partes iguais, como mostra a figura 1. Com as três partes Nicolas montou um retângulo, fazendo coincidir os lados menores, como mostra a figura 2. O perímetro da folha quadrada é 24 cm.

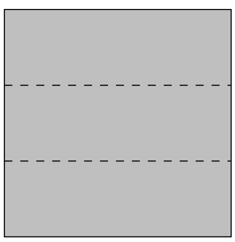


Figura 1


Figura 2

Qual é o perímetro do retângulo representado pela figura 2?

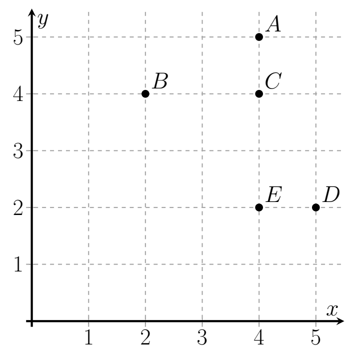
a) 36 cm b) 40 cm c) 18 cm d) 6 cm e) 38 cm

Resolução: Se o perímetro do quadrado é 24 cm e os quatro lados são iguais, então cada lado do quadrado mede $24 \div 4 = 6$ cm. Assim, o lado maior do retângulo da figura 2 mede $6 + 6 + 6 = 18$ cm e o lado menor, que é um terço do lado do quadrado, mede $6 \div 3 = 2$ cm. O perímetro do retângulo é a soma de todas as medidas de seus lados: $2 + 18 + 2 + 18 = 40$ cm.

(**Alternativa B**)

Problema 7. A coordenada x de um ponto P é o número de divisores positivos de 6 e a coordenada y é o resto da divisão de 37 por 7. Qual ponto no gráfico ao lado tem as mesmas coordenadas do ponto P?

a) $A(4, 5)$ b) $B(2, 4)$ c) $C(4, 4)$ d) $D(5, 2)$ e) $E(4, 2)$



Resolução: O número 6 tem 4 divisores: $\{1, 2, 3, 6\}$ (talvez precise colocar positivos no enunciado). A divisão com resto de 37 por 7 é $37 = 7 \times 5 + 2$, cujo resto é 2. Assim o ponto tem coordenada x valendo 4 e coordenada y valendo 2, ou seja, o ponto $(4, 2)$.

(**Alternativa E**)

Problema 8. Moedas de 5 e 25 centavos são dispostas em três pilhas, cada uma com 55 centavos. Em cada pilha há quantidades diferentes de moedas. Quantas moedas há no total?

a) 9 b) 13 c) 17 d) 21 e) 33

Resolução: Podemos analisar os casos olhando primeiro para o número de moedas de 25 centavos e depois analisar o restante para calcular o número de moedas de 5 centavos necessárias:

Nº de moedas de 25 centavos	Restante	Nº de moedas de 5 centavos	Nº total de moedas
0	55	11	11
1	30	6	7
2	5	1	3

Somando os valores total de cada forma, obtemos: $11 + 7 + 3 = 21$.

(**Alternativa D**)

Problema 9. Quantos números pares formados por dois algarismos distintos satisfazem a propriedade que a diferença entre o maior algarismo e o menor é múltiplo de 3?

a) 5 b) 7 c) 8 d) 10 e) 11

Resolução: Para um número ser par, ele deve terminar com um dos seguintes algarismos: $0, 2, 4, 6, 8$. Como os algarismos do número são diferentes e a diferença entre eles é um múltiplo de três, temos três possibilidade para essa diferença: $3, 6, 9$. Vamos listar os números com essas propriedades:

- Terminando com 0: 30, 60 e 90.
- Terminando com 2: 52 e 82.
- Terminando com 4: 14 e 74.
- Terminando com 6: 36 e 96.
- Terminando com 8: 28 e 58.

Ao todo, temos 11 números.

(**Alternativa E**)

Problema 10. Qual é o algarismos das unidades do número 2018^{2018}?

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Resolução: Primeiramente observe que para determinarmos o algarismo das unidades do número 2018^{2018} basta encontrarmos o algarismo das unidades do número 8^{2018}. Observe que:

- $8^1 = 8$, logo o algarismo das unidades de 8^1 é 8.
- $8^2 = 64$, logo o algarismo das unidades de 8^2 é 4.
- $8^3 = 512$, logo o algarismo das unidades de 8^3 é 2. Além disso, veja que para determinarmos o algarismos das unidade de 8^3 basta determinarmos o algarismos das unidades do número resultante do produto da unidade de 8^2 por 8, isto é, a unidade de $4 \times 8 = 32$.
- podemos obter o algarismo das unidades de 8^4 calculando o algarismo das unidades de $2 \times 8 = 16$. Logo, o algarismo das unidades de 8^4 é 6.
- podemos obter o algarismo das unidades de 8^5 calculando o algarismo das unidades de $6 \times 8 = 48$. Logo, o algarismo das unidades de 8^5 é 8.

Deste modo, encontramos um padrão: o algarismo das unidades das potências de 8 se repetem de 4 em 4. Logo, basta dividirmos 2018 por 4 para determinarmos o número procurado. Veja que

$$2018 = 4 \times 504 + 2,$$

então o algarismos das unidade de 2018^{2018} é 4.

(**Alternativa C**)