UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

XXI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

Prova – 1ª fase – Nível 3

19 de junho de 2018

Problema 1. Em um campeonato de futebol, cada time jogou duas partidas contra os demais (portanto, o time A jogou duas partidas contra o time B, duas partidas contra o time C, e assim sucessivamente). Em seguida, os dois melhores colocados disputaram a final, em jogo único. Ao final do campeonato foram jogadas 133 partidas. Qual foi o número de times que participaram deste campeonato?

a) 10 b) 11 c) 12 d) 14 e) 20

Problema 2. Um lojista remarcou o preço de uma televisão, baixando-o em 20%. No dia seguinte, arrependido, ele aumentou em 20% o preço remarcado. Comparado com o preço inicial, ao final, o preço da televisão ficou:

a) 4% menor. b) 4% maior. c) o mesmo. d) 2% maior. e) 2% menor.

Problema 3. Em um triângulo retângulo ΔABC com ângulo reto em A, temos que $AB = 3$ cm e $AC = 4$ cm. Seja D um ponto no lado $\overline{AC}$ tal que $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $\angle ABC$. A área do triângulo ΔBCD é igual a:

a) $\frac{9}{4}$ cm^2. b) $\frac{12-3\sqrt{3}}{2}$ cm^2. c) 3 cm^2. d) $\frac{15}{4}$ cm^2. e) 6 cm^2.

Problema 4. A soma dos dois últimos algarismos (dezena e unidade) do número 2018^{2018} é:

a) 5 b) 6 c) 9 d) 13 e) 14

Problema 5. Uma reta é dita tangente a uma parábola se a parábola está toda de um lado da reta e se esta reta intercepta a parábola em apenas um ponto.

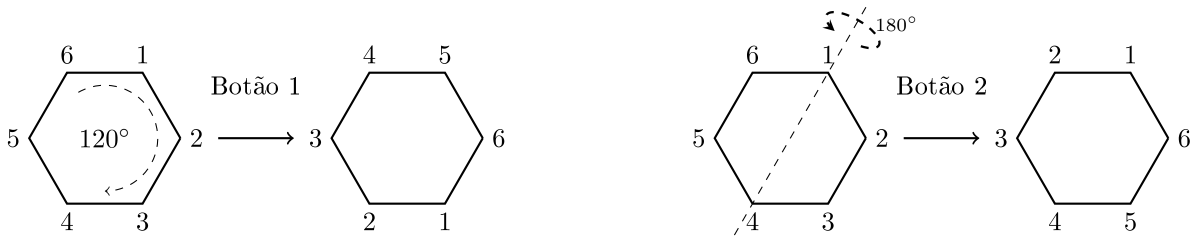
A equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$ é:

a) $y = x$. b) $y = 2x$. c) $y = 2x - 1$. d) $y = x - 1$. e) $x = 1$.

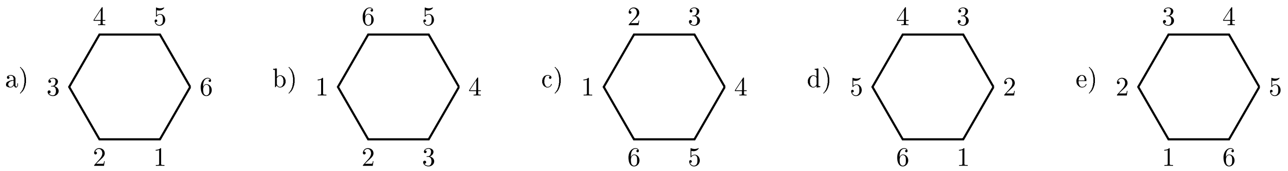
Problema 6. O número natural $2^{500} + 1$ é:

a) múltiplo de 17. b) primo. c) múltiplo de 15. d) múltiplo de $(2^{125} + 1)$. e) múltiplo de $(2^{125} - 1)$.

Problema 7. Ao apertar o botão 1 de uma máquina, um hexágono regular é girado 120º no sentido horário ao redor de seu centro no plano. Ao apertar o botão 2, o hexágono é girado, no espaço, 180º com relação à diagonal que "sobe da esquerda para a direita".



Qual das configurações abaixo não é possível obter, independentemente da ordem e de quantas vezes os botões 1 e 2 são apertados?



Problema 8. Sentadas ao redor de uma mesa redonda há 7 pessoas, que podem ser de três tipos: os *fulanos*, que sempre falam a verdade; os *ciclanos*, que sempre mentem; e os *beltranos*, que podem falar a verdade ou mentir. Sabendo que cada pessoa da mesa disse que a pessoa à direita dela é um ciclano, qual é o número mínimo de beltranos que deve haver na mesa?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Problema 9. Para celebrar os 21 anos da ORM, Nicolas calcula o produto

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 21$$

e encontra a soma S_1 de todos os algarismos deste número. Em seguida, calcula a soma S_2 de todos os algarismos de S_1. Prosseguindo desta forma, Nicolas chegará em um S_k que tem apenas um algarismo. Que algarismo é este?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Problema 10. Seja ΔABC um triângulo equilátero, e sejam D e E pontos sobre o lado $\overline{AC}$ tais que $CD = DE = EA = \dfrac{CA}{3}$. Denotando por α a medida do ângulo $\angle CBD$, por β a medida do ângulo $\angle DBE$ e por γ a medida do ângulo $\angle EBA$, temos que:

a) $\alpha < \beta < \gamma$. b) $\alpha = \gamma < \beta$. c) $\alpha = \gamma > \beta$. d) $\alpha > \beta > \gamma$. e) $\alpha = \beta = \gamma$.