UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

# XX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

## Resolução da prova – 2ª fase – Nível 3

**23 de setembro de 2017**

**Problema 1.** Seja $f$ uma função que a todo número natural $n$ associa o resto da divisão de $n$ por 7. Por exemplo, $f(40) = 5$ pois o resto da divisão de 40 por 7 é igual a 5. Se $x$ é um número natural e $f(x) = 3$, calcule

$$f(x + 2017^{2017}).$$

**Resolução:** Se $f(x) = 3$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $x = 7q + 3$.

Note que $2017 = 7 \cdot 288 + 1$.

Assim, para um inteiro $n \geq 1$, temos

$$2017^n = (7 \cdot 288 + 1)^n = 1 + \binom{n}{1}(7 \cdot 288) + \binom{n}{2}(7 \cdot 288)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(7 \cdot 288)^n.$$

Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2017^{2017} = 7k + 1$.

Como $x = 7q + 3$ e $2017^{2017} = 7k + 1$, temos que

$$x + 2017^{2017} = 7q + 3 + 7k + 1 = 7(q + k) + 4.$$

Como $4 < 7$ e o resto é único, temos $f(x + 2017^{2017}) = 4$.

**Problema 2.** Determine todos os números naturais de dois algarismos, $ab$, em que $a$ é o algarismo das dezenas e $b$ é o algarismos das unidades, tais que exista um número natural $n$ maior do que 1 que satisfaça:

$$a^n + b^n = n \cdot (a + b).$$

**Resolução:** Note que de $a^n + b^n = n(a + b)$ segue que $a(a^{n-1} - n) = b(n - b^{n-1})$.

Agora, vamos mostrar algumas desigualdades auxiliares:

$$2^{n-1} > n, \text{ para todo } n \geq 3, \tag{1}$$
$$2^n + 1 > 3n, \text{ para todo } n \geq 4, \tag{2}$$
$$1 + k^n > (k + 1)n, \text{ para todo } n \geq 2 \text{ e } k \geq 3, \tag{3}$$
$$k^n > kn, \text{ para todo } n \geq 2 \text{ e } k \geq 3. \tag{4}$$

Como a primeira e a segunda desigualdades são simples e como a quarta é consequência da terceira, então provaremos apenas a terceira (por indução sobre $n$).

De fato, para $n = 2$, temos que

$$1 + k^2 > 2(1 + k) \implies k^2 - 2k - 1 > 0.$$

Como as raízes de $p(x) = x^2 - 2x - 1$ são $1 \pm \sqrt{2}$, logo para $k > 1 + \sqrt{2}$ a desigualdade é satisfeita, em particular para $k \geq 3$. Supondo que a desigualdade é válida para $n \geq 2$, considere

$$1 + k^{n+1} = 1 - k + k(1 + k^n) > 1 - k + k(k + 1)n = nk^2 + nk - k + 1.$$

Queremos que isso seja maior que

$$(k + 1)(n + 1) = nk + k + n + 1.$$

Assim devemos mostrar que

$$nk^2 + nk - k + 1 > nk + k + n + 1,$$

ou seja,

$$nk^2 - 2k - n > 0.$$

Como as raízes do polinômio $q(x) = nx^2 - 2x - n$ são $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+n^2}}{n}$, e como

$$\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{n} < \frac{1+\sqrt{n^2+n^2}}{n} = \frac{1+n\sqrt{2}}{n} = \frac{1}{n} + \sqrt{2},$$

logo a desigualdade é satisfeita para $k > 1 + \sqrt{2}$, em particular para $k \geq 3$. Portanto, provamos que a desigualdade é verdadeira.

Casos a excluir:

- Se $n \geq 3$, $a \geq 2$ e $b \geq 2$ então, $a(a^{n-1} - n)$ será positivo e $b(n - b^{n-1})$ será negativo;
- Se $a = 1$, $b \geq 3$ e $n \geq 2$, então pela desigualdade (3), temos que $1 + b^n > n(b+1)$;
- Se $b = 1$, $a \geq 3$ e $n \geq 2$, então pela desigualdade (3), temos que $1 + a^n > n(a+1)$;
- Se $b = 0$, $a \geq 3$ e $n \geq 2$, então pela desigualdade (4), temos que $a^n > na$.

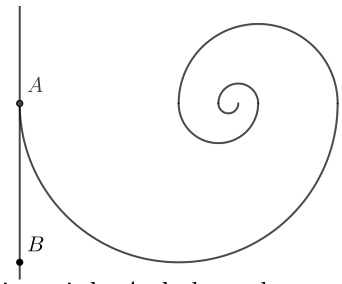
Vejamos os casos restantes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $a = 1, b = 0$ | : | $1 - n = 0 \Rightarrow n = 1$ |
| 2) | $a = 1, b = 1$ | : | $2n = 2 \Rightarrow n = 1$ |
| 3) | $a = 1, b = 2$ | : | $1 - n = 2n - 2^n \Rightarrow 3n = 2^n + 1$ |
| 4) | $a = 2, b = 0$ | : | $2^n = 2n \Rightarrow n = 1$ ou $n = 2$ |
| 5) | $a = 2, b = 1$ | : | $2^n - 2n = n - 1 \Rightarrow 3n = 2^n + 1$ |
| 6) | $a = 2, b = 2$ | : | $2^n = 2n \Rightarrow n = 1$ ou $n = 2$ |

Como $n > 1$, logo os casos 1 e 2 não ocorrem. Os casos 2 e 6 são verdadeiros para $n = 2$. Os casos 3 e 5 são verdadeiros apenas para $n = 3$, pois para $n \geq 4$, teremos $3n < 2^n + 1$ pela desigualdade (2).

Portanto os únicos números que satisfazem a condição dada são 12, 20, 21 e 22.

**Problema 3.** Sejam $A$ e $B$ pontos no plano tais que o segmento $\overline{AB}$ tem comprimento $r$. Uma partícula desloca-se no plano a partir do ponto $A$, percorrendo semicírculos de centros colineares com $A$, a uma taxa de um semicírculo por minuto, de modo que a reta que passa pelos ponto $A$ e $B$ é tangente ao círculo que contém o primeiro semicírculo, de raio $r$, e cada semicírculo subsequente tem raio igual à metade do raio do semicírculo anterior, como na figura ao lado.




Se uma segunda partícula sai de $B$ no mesmo instante em que a primeira sai de $A$, deslocando-se em linha reta com velocidade constante, e se encontra com a primeira após $n$ minutos, qual a distância total percorrida pela segunda partícula após estes $n$ minutos?

**Resolução:** Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $P_n$ o ponto em que a primeira partícula está ao final do minuto $n$, e $O_n$ o centro do círculo que contém o $n$-ésimo semicírculo. Como esta partícula desloca-se a uma taxa de 1 semicírculo por minuto, temos que ao final de cada minuto ela está sobre a reta que contém os centros de todos os semicírculos, e portanto $P_n$ está sobre esta reta, conforme figura. (Mais ainda, podemos ver que $P_n = O_{n-1}$, para todo $n \geq 2$.)

Assim, para determinar a medida do segmento $\overline{AP_n}$, podemos simplesmente somar ou subtrair os diâmetros dos semicírculos, conforme sejam percorridos pela partícula em um minuto par ou em um minuto ímpar, isto é, a medida de $\overline{AP_n}$, digamos $c_n$, é

$$c_n = 2r - \frac{2r}{2} + \frac{2r}{4} - \frac{2r}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2r}{2^{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\frac{2r}{2^{i-1}}.$$

Vemos que esta é a soma dos termos de uma progressão geométrica com $n$ termos, sendo o primeiro termo $2r$ e a razão $-1/2$. Usando a fórmula para a soma dos termos de uma tal progressão com $n$ termos (referentes aos $n$ minutos que temos interesse) obtemos

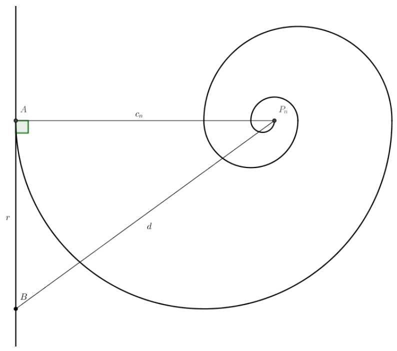
$$c_n = 2r \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \cdots = \frac{r}{3 \cdot 2^{n-2}} \cdot \left(2^n + (-1)^{n+1}\right).$$

Agora, note que o triângulo $ABP_n$ é retângulo em $A$, pois $AB$ é reta tangente em $A$ ao círculo que contém o primeiro semicírculo e $\overline{AP_n}$ está contido na reta $AO_1$, que é perpendicular à reta $AB$.

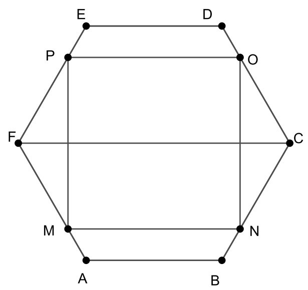
Queremos a distância percorrida pela segunda partícula nos $n$ minutos. Como as partículas se encontram após $n$ minutos e a primeira partícula estará ao final destes $n$ minutos no ponto $P_n$, a segunda partícula também estará em $P_n$, e portanto a distância desejada $d$ é dada pela medida da hipotenusa do triângulo retângulo $ABP_n$.

Como os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AP_n}$ deste triângulo medem respectivamente $r$ e $c_n$, logo sua hipotenusa mede

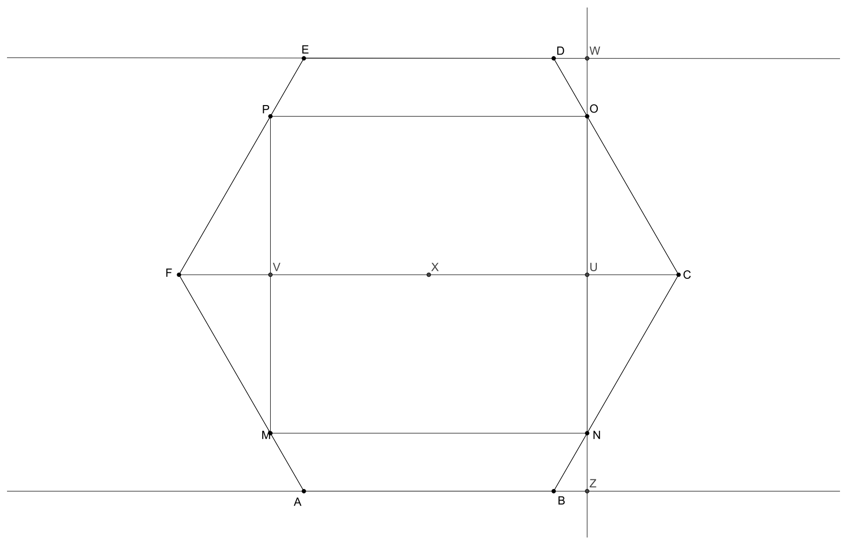
$$d = \sqrt{r^2 + c_n^2}.$$



**Problema 4.** Calcule a área do quadrado $MNOP$ inscrito no hexágono regular $ABCDEF$ de lado medindo $l$, sabendo-se que os lados $\overline{MN}$ e $\overline{OP}$ do quadrado são paralelos aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ do hexágono.




**Resolução:** Sejam $U$ e $V$ os pontos de intersecção dos lados $\overline{NO}$ e $\overline{PM}$ do quadrado, respectivamente, com a diagonal $\overline{FC}$ do hexágono.




Seja $X$ o ponto médio de $\overline{FC}$, como $ABCDEF$ é um hexágono regular, logo obtemos seis triângulos equiláteros $\triangle XAB$, $\triangle XBC$, $\triangle XCD$, $\triangle XDE$, $\triangle XEF$ e $\triangle XFA$. Deste modo, $FX = l = XC$, e a diagonal $\overline{FC}$ é paralela a $\overline{AB}$ e é um eixo de simetria do hexágono. Deste modo, $V\hat{F}P = U\hat{C}O = 60°$ e $\triangle VPF \equiv \triangle UOC$, pois $OU = PV$. Assim, temos que $UC = FV$.

Se $x$ é o comprimento do lado do quadrado $MNOP$, temos: $UC = FV = \dfrac{2l - x}{2}$. Então $CO = CN = 2UC = 2l - x$. Sejam $Z$ o ponto de intersecção das retas $ON$ e $AB$ e $W$ o ponto de intersecção das retas $ON$ e $DE$. É fácil verificar que $\triangle BZN \equiv \triangle DWO$.

Então $ZW = l\sqrt{3} = x + 2ZN$, ou $ZN = \dfrac{l\sqrt{3}-x}{2}$, mas $ZN = (l - CN)\dfrac{\sqrt{3}}{2} = (x-l)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Segue que

$$\frac{l\sqrt{3}-x}{2} = (x-l)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ou seja

$$x(\sqrt{3}+1) = 2l\sqrt{3}.$$

Portanto,

$$x = \frac{2l\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2l\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} = l(3-\sqrt{3}).$$

Logo, $A_{MNOP} = x^2 = l^2(12 - 6\sqrt{3})$.

**Problema 5.** Três botões luminosos, numerados por $1, 2$ e $3$, se acendem ou se apagam conforme são pressionados. O primeiro botão está aceso e os outros dois estão apagados. Abel, Bia e Cadu retiram, um de cada vez e nesta ordem, sem reposição, uma bola de dentro de uma caixa que contém cinco bolas, numeradas de 1 a 5.

- Se o número retirado por Abel for primo, Abel pressiona os botões 1 e 2 (se o número não for primo, Abel não faz nada);
- Se o número retirado por Bia for par, Bia pressiona os botões 1 e 3 (se o número não for par, Bia não faz nada);
- Se o número retirado por Cadu for ímpar, Cadu pressiona os botões 2 e 3 (se o número não for ímpar, Cadu não faz nada).

Após este processo, qual a probabilidade das três luzes terminarem acesas?

**Resolução:** Vejamos o que precisa acontecer quando as bolas são retiradas da caixa para que as três luzes terminem acesas:

- Se Abel tirar um número primo, a configuração original de LDD (ligado-desligado-desligado) mudará para DLD (desligado-ligado-desligado). Se Bia não tirar um número par, então a primeira luz terminará desligada, independente de qual número sair para Cadu, logo Bia deve tirar um número par. Assim ficaremos com LLL e , deste modo, Cadu não pode tirar um número ímpar.
- Se Abel não tirar um número primo, continuamos com LDD. Se Bia tirar um número par, então ela desligará o primeiro botão e este terminará desligado, independente de qual número for retirado po Cadu. Deste modo, é necessário que Bia tire um número que não seja par. Assim, chegamos com LDD em Cadu, que precisa tirar um número ímpar para acender os botões 2 e 3, ficando com LLL, como desejado.

Resumindo, as condições gerais para as retiradas de bolas são que elas saiam de uma das duas seguintes formas:

- Primo - Par - Não ímpar;
- Não primo - Não par - Ímpar.

Podemos agora descrever as árvores de possibilidades para que as três luzes terminem acesas, dentro das restrições impostas acima.

Observe que não há como Abel tirar 2 e chegarmos às três luzes acesas, pois se Abel tirar 2 (primo), Bia deve tirar um número par, logo 4. Assim, Cadu deve tirar um número não ímpar (isto é, par), mas isto não é possível pois os números pares de 1 a 5 (2 e 4) já foram retirados.

As demais árvores são como segue:


Há assim um total de 12 possibilidades dentre o total de $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilidades de retiradas de bolas da caixa. A probabilidade desejada é portanto de

$$\frac{12}{60} = 20\%.$$