XX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

Resolução da prova – 2ª fase – Nível 2

23 de setembro de 2017

Problema 1. Um número natural é dito *todo par* quando todos os seus algarismos forem pares. Quantos são os números todos pares de quatro algarismos que são múltiplos de quatro?

Resolução: Do critério de divisibilidade por quatro sabemos que um número é divisível por quatro quando o número formado por seus últimos dois algarismos é divisível por quatro. Além disso, como o número deve ser todo par todos os seus algarismos devem ser pares.

Portanto, os dois últimos algarismos de um número todo par, que é um múltiplo de quatro podem ser:

$$00, 04, 08, 20, 24, 28, 40, 44, 48, 60, 64, 68, 80, 84 \quad e \quad 88,$$

ou seja, são 15 possibilidades. Para o algarismo do milhar teremos quatro possibilidades, $2, 4, 6$ e 8.

Deste modo, pelo Princípio Fundamental da Contagem há

$$4 \times 5 \times 15 = 300$$

números todos pares de quatro algarismos que são múltiplos de quatro.

Problema 2. Um aplicativo pede aos seus usuários que façam uma senha contendo três letras maiúsculas e três algarismos, nessa ordem. As letras que podem ser usadas são A, B, C e D; os algarismos que podem ser usados são 1, 2, 3 e 4. No entanto, por razões de segurança, o sistema proíbe que:

- Sejam escolhidas três letras iguais;
- Sejam escolhidos três algarismos iguais;
- Sejam escolhidos três algarismos consecutivos em ordem crescente.

Qual o total de senhas permitidas por este sistema?

Resolução: Inicialmente, vamos fazer uma contagem dos blocos de letras permitidos pelo sistema. Se o bloco iniciar com a letra A, a única proibição é o bloco AAA, e assim temos 15 blocos possíveis:

$$AAB, AAC, AAD, ABA, ABB, ABC, ABD, ACA, ACB, ACC, ACD, ADA, ADB, ADC, ADD.$$

De forma análoga, iniciando com B, a única proibição é o bloco BBB, e assim temos mais 15 blocos possíveis. O mesmo raciocínio vale para os blocos que iniciam com a letra C e para os que iniciam com a letra D. Assim, **o total de blocos de letras permitidos é 60** $(15 + 15 + 15 + 15)$.

Em relação aos blocos de números temos uma restrição a mais. Além de algarismos iguais, é proibido também escolher algarismos consecutivos em ordem crescente, ou seja, 123 e 234. Assim, se iniciarmos o bloco com o algarismo 1, os blocos 111 e 123 são proibidos. Temos então 14 possibilidades, que são:

$$112, 113, 114, 121, 122, 124, 131, 132, 133, 134, 141, 142, 143, 144.$$

Da mesma forma, se iniciarmos com o algarismo 2, os blocos 222 e 234 são proibidos, e haverá também 14 possibilidades. Por outro lado, se iniciarmos com o algarismo 3, a única proibição é o bloco 333, e assim temos 15 possibilidades. E também temos 15 possibilidades para os blocos que iniciam com o algarismo 4. Portanto, **o total de blocos de números permitidos é 58** $(15 + 15 + 14 + 14)$.

Finalmente, veja que para cada bloco de letras permitidos, temos 58 blocos de números possíveis. Como temos 60 blocos de letras permitidos, segue que o total de possibilidades é $60 \times 58 = 3480$ senhas.

Problema 3. Determine todos os números naturais de dois algarismos, ab, em que a é o algarismo das dezenas e b é o algarismos das unidades, tais que

$$a^2 + b^2 = 2(a + b).$$

Resolução: Inicialmente, note que a e b são números inteiros satisfazendo $1 \leq a \leq 9$ e $0 \leq b \leq 9$.

De $a^2 + b^2 = 2(a + b)$ obtemos $a(a - 2) = b(2 - b)$. Temos três casos possíveis: o número $a(a - 2)$ pode ser positivo, negativo, ou zero.

- Caso $a(a - 2) > 0$, usando que $a(a - 2) = b(2 - b)$, vemos que $b(2 - b)$ também é positivo neste caso. Como $b(2 - b)$ é positivo, isto força $b \neq 0$ e, como $b \geq 0$, temos portanto $b > 0$. Disso e de $b(2 - b) > 0$ ficamos com $(2 - b) > 0$, ou seja, $b < 2$.

  Vemos então que b é um número inteiro com $0 < b < 2$, ou seja, $b = 1$. Substituindo na equação $a(a - 2) = b(2 - b)$, chegamos em

  $$a(a - 2) = 1(2 - 1) = 1.$$

  Temos o produto de dois inteiros, a e $(a - 2)$, resultando em 1, logo ou ambos são iguais a 1, ou ambos são iguais a -1. Isto nos diz que $a = a - 2$, e portanto que $0 = -2$, o que é impossível!

  A conclusão é que o caso $a(a - 2) > 0$ não ocorre. Vejamos os outros casos.

- Caso $a(a-2) < 0$, uma vez que a é positivo temos que $(a-2)$ é negativo, isto é, $(a-2) < 0$, e assim $a < 2$. Juntando $a \geq 1$ e $a < 2$ concluímos que $a = 1$. Substituindo na equação $a(a - 2) = b(2 - b)$, ficamos com

  $$1(1 - 2) = b(2 - b),$$

  ou seja, $b(2 - b) = -1$. Em particular, isto garante que $b \neq 0$. Disso e do fato que $b \geq 0$, ficamos com $b > 0$.

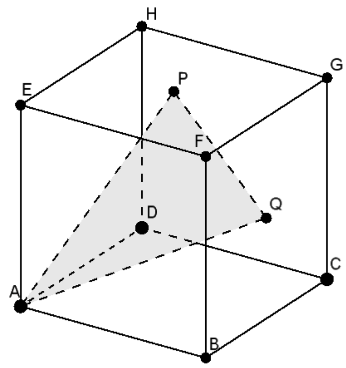
  O produto dos números b e $(2 - b)$ é igual a -1, logo um deles é igual a 1 e o outro é -1. Já vimos que $b > 0$, logo podemos concluir que $b = 1$. O outro dos números, $(2 - b)$, deve ser o -1, isto é, $2 - b = -1$, o que nos dá $b = 2 + 1 = 3$. Juntando tudo, temos que $b = 1$ e ao mesmo tempo $b = 3$, o que é novamente impossível! Assim, este caso também não ocorre.

- Como nenhum dos casos anteriores ocorre, podemos logicamente concluir que $a(a - 2) = 0$. O produto de dois números é igual a zero se e somente se pelo menos um deles for igual a zero, logo temos que $a = 0$ ou $(a - 2) = 0$, ou seja, $a = 0$ ou $a = 2$.

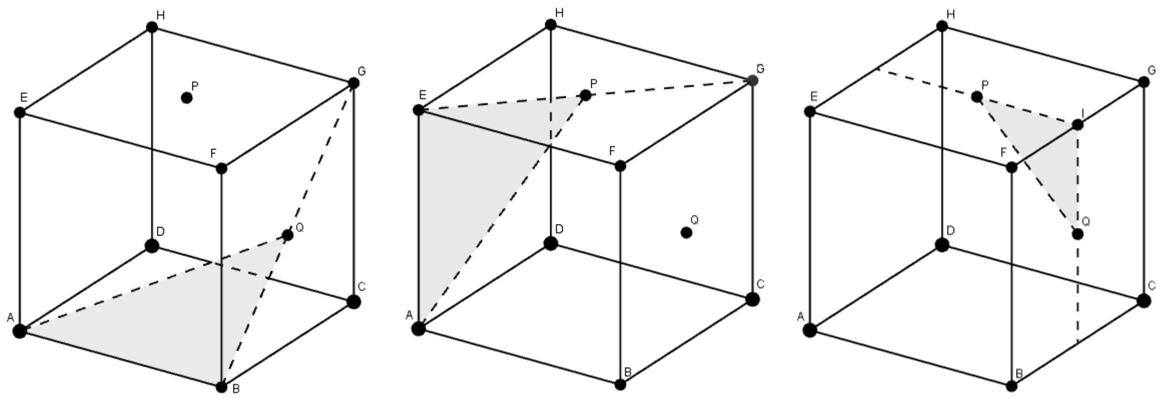
  Sabemos que $a \geq 1$, logo $a = 0$ não acontece, e portanto devemos ter $a = 2$. Finalmente, de $a(a - 2) = b(2 - b)$ e $a(a - 2) = 0$ chegamos em $b(2 - b) = 0$, de onde obtemos $b = 0$ ou $b = 2$.

Assim, há dois números possíveis de dois algarismos como pedido: 20 e 22.

Problema 4. No cubo da figura ao lado, os pontos P e Q são os centros das faces $EFGH$ e $BCGF$, respectivamente. Sabendo que as arestas do cubo medem 1 cm, calcule o perímetro do triângulo APQ.



Resolução: As figuras abaixo mostram que os lados $\overline{AQ}$, $\overline{AP}$ e $\overline{PQ}$ do triângulo APQ são hipotenusas de três triângulos retângulos: ABQ, AEP e PIQ, em que I é o ponto médio da aresta $\overline{FG}$.



Os comprimentos dos lados do triângulo APQ podem portanto ser calculados usando o Teorema de Pitágoras:

$$(AQ)^2 = (AB)^2 + (BQ)^2 \tag{1}$$
$$(AP)^2 = (AE)^2 + (EP)^2 \tag{2}$$
$$(PQ)^2 = (PI)^2 + (IQ)^2. \tag{3}$$

Sabemos que $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$ são arestas do cubo, logo $AB = AE = 1$. Também, podemos observar que Q é o ponto médio da diagonal $\overline{BG}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}(BG)^2 &= (BC)^2 + (CG)^2\\ (BG)^2 &= 1^2 + 1^2\\ BG &= \sqrt{1^2+1^2}\\ BG &= \sqrt{2},\end{aligned}$$

e portanto

$$BQ = \frac{BG}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da Equação 1,

$$\begin{aligned}(AQ)^2 &= (AB)^2 + (BQ)^2\\ (AQ)^2 &= 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\ AQ &= \sqrt{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Similarmente, P é o ponto médio do segmento $\overline{EG}$, logo $EP = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e, usando a Equação 2, chegamos em

$$AP = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Vemos da figura que PI é igual à metade do comprimento de uma aresta do cubo, isto é, $PI = \frac{1}{2}$. Da mesma forma, $IQ = \frac{1}{2}$. Temos portanto, da Equação 3, que

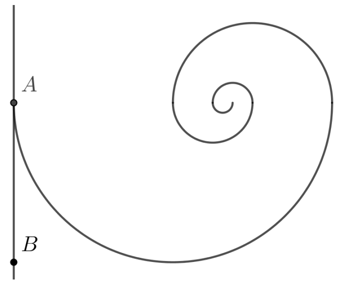
$$PQ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Deste modo, o perímetro do triângulo APQ é igual a

$$AP + AQ + PQ = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Problema 5. Sejam A e B pontos no plano tais que o segmento $\overline{AB}$ tem comprimento de 1 unidade. Uma partícula desloca-se no plano a partir do ponto A, percorrendo semicírculos de centros colineares com A, a uma taxa de um semicírculo por minuto, de modo que a reta que passa pelos ponto A e B é tangente ao círculo que contém o primeiro semicírculo, de raio 1, e cada semicírculo subsequente tem raio igual à metade do raio do semicírculo anterior, como na figura abaixo.

Se uma segunda partícula sai de B no mesmo instante em que a primeira sai de A, deslocando-se em linha reta com velocidade constante, e se encontra com a primeira após 5 minutos, qual a distância percorrida pela segunda partícula após estes 5 minutos?



Resolução: Vejamos o que acontece ao final de cada minuto:

- Ao final do primeiro minuto, a primeira partícula, que chamaremos de $P1$, encontra-se a 2 unidades de distância do ponto A, pois vai parar do outro lado de um círculo de raio 1 (e, portanto, diâmetro 2);
- Ao final do segundo minuto, $P1$ anda sobre um segundo semicírculo de raio $\frac{1}{2}$ (a metade do anterior) e diâmetro 1, voltando a ficar mais perto de A: a distância de A até $P1$ passa a ser $2-1$;
- Ao final do terceiro minuto, $P1$ se afasta novamente de A, andando sobre um semicírculo de raio $\frac{1}{4}$ (a metade do anterior) e diâmetro $\frac{1}{2}$, resultando na distância de A até $P1$ de $2-1+\frac{1}{2}$;
- Ao final do quarto minuto, $P1$ se aproxima mais uma vez de A, percorrendo um semicírculo de raio $\frac{1}{8}$ (a metade do anterior) e diâmetro $\frac{1}{4}$, o que resulta na distância de A até $P1$ de $2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$;
- Ao final do quinto minuto, $P1$ se afasta novamente de A, andando sobre um semicírculo de raio $\frac{1}{16}$ (a metade do anterior) e diâmetro $\frac{1}{8}$, parando em um ponto C, resultando na distância de A até $P1$ de $2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{11}{8}$.

Ao final de 5 minutos as partículas se encontram, logo a segunda partícula, $P2$, também estará no ponto C. A distância total d percorrida por $P2$ nos 5 minutos é igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo ABC, que pode ser calculado pelo Teorema de Pitágoras, uma vez que conhecemos as medidas $AB=1$ e $AC=\frac{11}{8}$ dos seus catetos:

$$d=\sqrt{1^2+\left(\frac{11}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{185}{64}}=\frac{\sqrt{185}}{8}.$$