UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

XX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

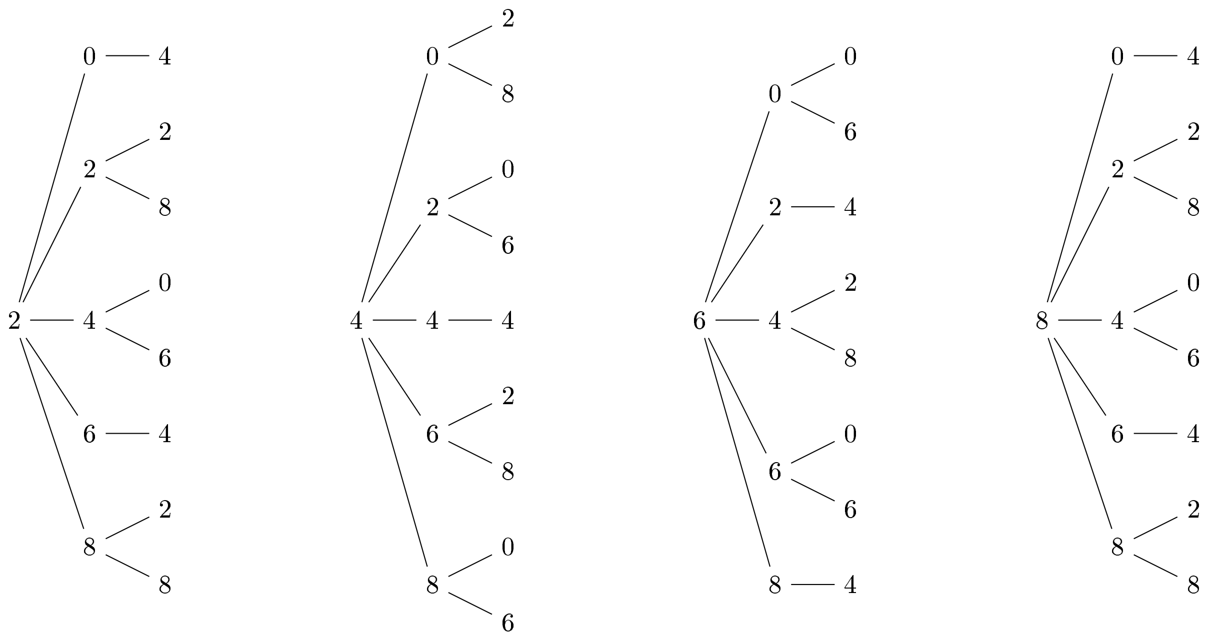
Resolução da prova – 2ª fase – Nível 1

23 de setembro de 2017

Problema 1. Um número natural é dito *todo par* quando todos os seus algarismos são pares. Quantos são os números *todos pares* de três algarismos que são múltiplos de seis?

Resolução: Queremos determinar quantos são os números todos pares de três algarismos que são múltiplos de seis. Um número todo par de três algarismos, pela definição de todo par, deve ter os três algarismos pares, o que significa que o número é par. Para que um número seja múltiplo de 6, ele deverá também ser múltiplo de 3.

Vamos construir os números que queremos determinar usando árvores. Como os algarismos pares são $0, 2, 4, 6$ e 8 para o primeiro algarismo (algarismos das centenas) temos as seguintes possibilidades: $2, 4, 6$ e 8 (lembre-se que o zero não pode ser o algarismo das centenas). Construiremos uma árvore para cada possibilidade do algarismo das centenas, o que nos dará quatro árvores. Cada uma delas é construída da seguinte maneira: colocado o algarismo das centenas, construímos um ramo para cada possibilidade do algarismo das dezenas. A partir de cada uma destas possibilidades, construímos um ramo para cada possibilidade para o algarismo das unidades, observando que a soma deste algarismo com os outros dois deve ser um múltiplo de 3.



Seguindo cada ramo em cada árvore, obtemos todos os números solicitados. Contando as possibilidades de cada árvore, temos $8 + 9 + 8 + 8 = 33$ números que satisfazem as condições impostas.

Portanto, 33 números todos pares de três algarismos são múltiplos de seis.

Problema 2. Em uma das reuniões da equipe ORM, Pinho comprou pães para a janta. Alda comeu um terço do que Fernando comeu. Felipe comeu a mesma quantidade que Alda e Fernando comeram juntos. Eliezer e Pinho comeram juntos o correspondente a um terço do total de pães. Sabendo que não sobraram pães, qual foi a fração do total de pães que Fernando comeu?

Resolução: Vamos representar a quantidade de pães que a Alda comeu por □. Logo, Fernando comeu □ □ □, que corresponde ao triplo da quantidade que Alda comeu.

Como Felipe comeu a mesma quantidade que Alda e Fernando comeram juntos, Felipe comeu □ □ □ □.

Local: PET Matemática – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas – Universidade Federal de Santa Catarina
Telefone: (48) 3721-4595 orm@pet.mtm.ufsc.br www.orm.mtm.ufsc.br

Por fim, veja que Eliezer e Pinho comeram juntos o correspondente a $\frac{1}{3}$ do total de pães. Logo, os demais (Alda, Fernando e Felipe) comeram juntos $\frac{2}{3}$ do total de pães. Deste modo,

$$\square \ \square\square\square \ \square\square\square\square$$

corresponde a $\frac{2}{3}$ do total de pães, ou seja,

$$\square\square\square\square$$

corresponde a $\frac{1}{3}$ do total de pães.

Vamos agora organizar estas quantidades:

- Quantidade que a Alda comeu: $\square$;
- Quantidade que o Fernando comeu: $\square\,\square\,\square$;
- Quantidade que o Felipe comeu: $\square\,\square\,\square\,\square$;
- Quantidade que o Pinho e o Eliezer comeram juntos: $\square\,\square\,\square\,\square$.

Então, o total de pães pode ser representado por:

$$\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square.$$

Portanto, Fernando comeu $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ do total de pães.

Problema 3. Rodrigo escreve uma lista com todos os números naturais de 1 a 2017:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2015, 2016, 2017.$$

Após escrever estes números, ele apaga todos aqueles que deixam resto 1 na divisão por 5. Em seguida, dos que sobraram, apaga todos os números que deixam resto 1 na divisão por 4. Quantos números não foram apagados?

Resolução: Vamos escrever os primeiros números da lista de Rodrigo:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, , \ldots .$$

Observe que os números $1, 6, 11, 16, 21, 26, \ldots$ deixam resto 1 na divisão por 5. Além disso, observe que estes números aparecem nesta lista de 5 em 5 números. Logo, podemos calcular quantos números desta lista deixam resto 1 na divisão por 5 calculando quantos "blocos" de 5 cabem nessa lista de 2017 números:

$$2017 = 403 \times 5 + 2.$$

Desta forma, teremos 404 (403 números nos blocos, também 2016) números que deixam resto 1 na divisão por 5.

Agora, vamos calcular quantos números da lista original deixam resto 1 na divisão por 4 e depois vamos calcular quantos destes já foram apagados.

Por um raciocínio similar ao feito anteriormente, temos que há 505 números que deixam resto 1 na divisão por 4, já que $2017 = 504 \times 4 + 1$.

Destes 505 números, os números que já foram apagados são:

$$1, 21, 41, \ldots .$$

Observe que estes números são aqueles que deixam resto 1 na divisão por 20, que ao todo são 101, já que

$$2017 = 100 \times 200 + 17.$$

Portanto, dos 505 números, 101 já foram apagados. Logo, temos 404 para apagar dos restantes.

Assim, a quantidade de números que não foram apagados é dada por

$$2017 - 404 - 404 = 2017 - 808 = 1209.$$

Problema 4. Airton desenhou um quadrado e dividiu cada lado em três partes iguais, conforme a figura 1. Em seguida, ele traçou alguns segmentos, como mostra a figura 2. A área do triângulo sombreado corresponde a qual fração da área do quadrado ELON?

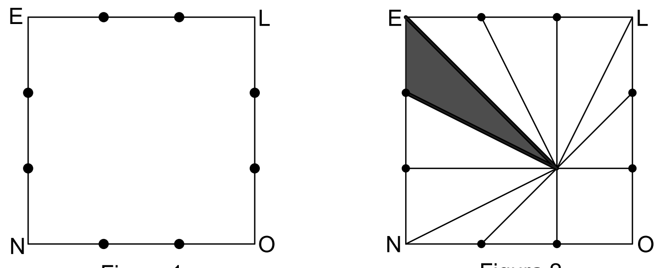
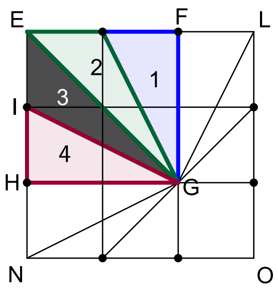


Figura 1 Figura 2

Resolução: Observe que a área dos triângulos $1, 2, 3$ e 4 da figura abaixo corresponde a $\frac{4}{9}$ da área do quadrado ELON.



Além disso, a soma das áreas dos triângulos 3 e 4 corresponde à metade da área do quadrado EFGH, ou seja, $\frac{4}{9} \div 2 = \frac{4}{18}$ da área do quadrado ELON.

Também veja que as áreas dos triângulos 3 e 4 são iguais, pois estes triângulos possuem base de mesmo comprimento (EI=IH) e mesma altura (HG).

Então, a área do triângulo 3 é $\frac{4}{18} \div 2 = \frac{1}{9}$ da área do quadrado ELON.

Problema 5. Oito times de futebol participaram de um torneio com o seguinte regulamento:

- Na primeira fase, formam-se duas chaves A e B, com quatro times cada, e cada time enfrenta todos os outros de sua chave uma única vez.
- Avançam para a segunda fase os três melhores de cada chave, formando uma única chave, e cada time classificado enfrenta os outros classificados uma única vez.
- Os dois times com melhor campanha disputam a final, em partida única.

Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto, e a derrota não conta pontos. Sabe-se que na primeira fase, não houve empates nos jogos da chave A, e houve um vencedor na grande final.

a) Qual o total de partidas disputadas no torneio?

b) Um dos finalistas somou um total de 22 pontos em suas partidas. Na primeira fase, esse time ficou em segundo lugar na chave A. Quantas vitórias, empates e derrotas esse time obteve? Qual sua classificação final?

Resolução: a) Vamos iniciar contando o número total de jogos do torneio. Vamos denotar por $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ os times da chave A, e por $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ os times da chave B. Como na primeira fase cada time enfrentou todos os outros da sua chave, foram realizados 6 jogos na chave A, que são:

$$a \times b,\ a \times c,\ a \times d,\ b \times c,\ b \times d,\ c \times d.$$

Observação: A notação $a \times b$ representa o jogo no qual os times a e b se enfrentaram.

De forma análoga, houve também 6 jogos na chave B. Portanto, na primeira fase do torneio foram realizados 12 jogos. Segundo o enunciado, foram classificados três times de cada chave para a segunda fase. Vamos supor que foram classificados os times $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ na chave A, e $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ na chave B. Como todos se enfrentam uma única vez nessa fase, foram realizados os seguintes jogos:

$$a \times b,\ a \times c,\ a \times e,\ a \times f,\ a \times g,\ b \times c,\ b \times e,\ b \times f,\ b \times g,\ c \times e,\ c \times f,\ c \times g,\ e \times f,\ e \times g,\ f \times g.$$

Dessa forma, na segunda fase do torneio foram realizados 15 jogos. Finalmente, na terceira fase houve apenas 1 jogo (a grande final). Logo, **o total de jogos disputados no torneio é 28** $(12 + 15 + 1)$.

b) O time mencionado neste item é um finalista. Dessa forma, esse time disputou 3 jogos na primeira fase (contra os times da sua chave), 5 jogos na segunda fase (contra os outros classificados) e a final. Portanto, esse time disputou 9 partidas no total. De acordo com o enunciado, esse time somou 22 pontos nessas 9 partidas.

Como cada vitória vale 3 pontos, concluímos que esse time ganhou no máximo 7 partidas. Nesse caso, com 1 empate e 1 derrota chegaríamos aos 22 pontos, pois $22 = (7 \times 3) + (1 \times 1)$.

Mas veja que se esse time tivesse ganho um número menor de partidas, o número de jogos não seria suficiente para atingir 22 pontos. Por exemplo, no caso de 6 vitórias, esse time precisaria de 4 empates para somar 22 pontos, pois $22 = (6 \times 3) + (4 \times 1)$. Mas isso não pode ocorrer, pois esse time só jogou 9 vezes. O mesmo problema acontece se o número de vitórias fosse ainda menor. Dessa forma, a única possibilidade é que a campanha desse time foi de **7 vitórias, 1 empate e 1 derrota** neste campeonato.

Ademais, segundo o enunciado, na primeira fase esse time ficou em 2^o lugar na chave A, e nessa chave não houve empates. Dessa forma, a única derrota só pode ter sido na primeira fase (pois se tivesse ganho as 3 partidas, ficaria em 1^o lugar). Como na grande final não houve empate, concluímos que esse time só pode ter ganho a final, ou seja, **foi o campeão do torneio**.