UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

XX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

Resolução da prova – 1ª fase – Nível 3

09 de agosto de 2017

Problema 1. Ao chegar do trabalho, Margarida percebeu que um de seus três filhos (Pedro, Jorge e Patrícia) havia quebrado um vaso na sala. Perguntando a eles sobre o ocorrido, cada um respondeu:

- Pedro: "Quem quebrou o vaso fui eu, mamãe";
- Jorge: "Quem quebrou o vaso não fui eu";
- Patrícia: "Quem quebrou o vaso não foi o Pedro".

Sabe-se que apenas um deles quebrou o vaso, e que apenas um deles disse a verdade. Quem quebrou o vaso e quem disse a verdade, respectivamente?

a) Jorge e Patrícia   b) Pedro e Pedro   c) Pedro e Jorge   d) Patrícia e Patrícia   e) Patrícia e Jorge

Resolução: Vamos analisar as possibilidades, para identificar qual delas está de acordo com o enunciado. Lembre que de acordo com o enunciado, apenas um deles disse a verdade.

Assumindo que Pedro quebrou o vaso, Pedro e Jorge teriam dito a verdade, e Patrícia teria mentido. Assim, teríamos duas verdades, o que não está de acordo com o enunciado. Por outro lado, assumindo que Patrícia quebrou o vaso, Pedro teria mentido, e Jorge e Patrícia teriam dito a verdade. Mais uma vez teríamos duas verdades, o que não está de acordo com o enunciado.

Finalmente, se Jorge quebrou o vaso, Pedro e Jorge teriam mentido, e apenas Patrícia teria dito a verdade, o que está de acordo com o enunciado. Assim, quem quebrou o vaso foi Jorge, e Patrícia disse a verdade.

(**Alternativa A**)

Problema 2. Paulinho deseja organizar um churrasco em família. No entanto, por uma questão de espaço, decidiu convidar apenas 4 dos seus 7 primos para participar deste churrasco. Ocorre que Abelardo e Bernardo, primos de Paulinho, só podem ir ao churrasco se forem juntos. De quantas maneiras diferentes Paulinho poderá escolher seus convidados?

a) 12   b) 14   c) 15   d) 18   e) 30

Resolução: Vamos chamar os primos de Paulinho de A, B, C, D, E, F e G, e vamos supor que os primos que só podem ir ao churrasco se forem juntos são A e B (Abelardo e Bernardo). Temos então dois casos a considerar:

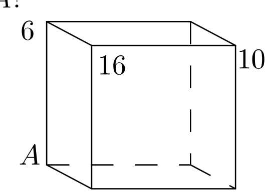
- Caso 1: A e B são convidados. Neste caso, temos que chamar mais dois convidados entre os demais, para completar o total de 4 pessoas. Fazendo uma contagem, temos 10 possibilidades, que são: C e D; C e E; C e F; C e G; D e E; D e F; D e G; E e F; E e G; F e G.
- Caso 2: A e B não são convidados. Neste caso, temos que chamar todos os convidados entre os demais. Fazendo uma contagem, encontramos 5 possibilidades: C, D, E e F; C, D, E e G; C, D, F e G; C, E, F e G; D, E, F e G.

Dessa forma, o número total de possibilidades é 15.

(**Alternativa C**)

Problema 3. Os vértices do cubo abaixo são numerados com os números pares de 2 a 16. A soma dos quatro números nos vértices de cada face é a mesma para todas as faces. Os números 6, 16 e 10 já foram atribuídos a alguns vértices, como mostra a figura. Qual é o número indicado no vértice A?

a) 2   b) 4   c) 8   d) 12   e) 14



Resolução: A soma dos oito primeiros números pares é $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72$. Dessa forma, se somarmos os valores dos vértices de duas faces opostas, estaremos somando todos os oito possíveis valores, e essa soma deverá ser igual a 72.

Como a soma é a mesma em cada face, podemos concluir que a soma dos valores dos vértices de uma face é $72 \div 2 = 36$. Por este raciocínio, o quarto número da face do topo é $36 - (6 + 10 + 16) = 36 - 32 = 4$.

Desta forma, ainda sobram os números 2, 8, 12 e 14 para serem atribuídos aos outros vértices. Na face frontal já temos $16 + 10 = 26$, o que significa que os dois números que faltam somam 10. Logo, a única possibilidade são os números 8 e 2. Temos então duas formas de atribuir os números 8 e 2 aos dois vértices restantes da face frontal: 8 à esquerda e 2 à direita ou 2 à esquerda e 8 à direita.

Se o 8 está no vértice da esquerda e o 2 no vértice da direita, a soma dos três números da face lateral direita é $4 + 10 + 2 = 16$, deste modo para completar 36 falta somar 20, número que não está disponível. Então, esta forma de atribuir os números aos vértices não está de acordo com o enunciado.

Concluímos, assim, que o 8 está no vértice da direita, e o 2 no vértice da esquerda. E assim, a soma dos vértices da face lateral esquerda é $6 + 16 + 2 + A$. Como essa soma deve ser igual a 36, em A só pode estar o número 12.

(**Alternativa D**)

Problema 4. Em um restaurante, existem três tipos de alimentos conforme o quadro abaixo:

Tipo 1	**Tipo 2**	**Tipo 3**
Cenoura	Carne	Arroz
Alface	Frango	Feijão
Rúcula	Peixe	Macarrão
Tomate		Batata
Beterraba		

Neste restaurante, em uma refeição, devem ser escolhidos no mínimo três alimentos do tipo 1, de zero a dois alimentos do tipo 2 e pelo menos um alimento do tipo 3, de acordo com as seguintes regras:

- o arroz deve ser acompanhado do feijão;
- o arroz e o macarrão não podem ser escolhidos juntos.

Nessas condições, a quantidade total de refeições diferentes que podem ser montadas é:

a) 560 b) 1120 c) 1008 d) 60 e) 1232

Resolução: Primeiramente, vamos determinar o número de maneiras de escolher os alimentos de cada um dos tipos. Em relação ao tipo 1, devem ser escolhidos no mínimo três alimentos. Temos então três casos a considerar:

- Cliente escolheu 3 alimentos do tipo 1: $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3!\ 2!} = 10$ maneiras;
- Cliente escolheu 4 alimentos do tipo 1: $C_{5,4} = \dfrac{5!}{4!\ 1!} = 5$ maneiras;
- Cliente escolheu 5 alimentos do tipo 1: como todos devem ser escolhidos, há apenas 1 maneira.

Na contagem acima usamos combinação, pois a ordem de escolha não interessa (escolher cenoura, alface e rúcula é o mesmo que escolher alface, rúcula e cenoura). Portanto, há $10 + 5 + 1 =$ **16 maneiras** de escolher os alimentos do tipo 1. Em relação ao tipo 2, devem ser escolhidos de zero a dois alimentos. Aqui também temos três casos a considerar:

- Cliente escolheu 0 alimentos do tipo 2: apenas 1 maneira;
- Cliente escolheu 1 alimento do tipo 2: $C_{3,1} = \dfrac{3!}{2!\ 1!} = 3$ maneiras;
- Cliente escolheu 2 alimentos do tipo 2: $C_{3,2} = \dfrac{3!}{1!\ 2!} = 3$ maneiras.

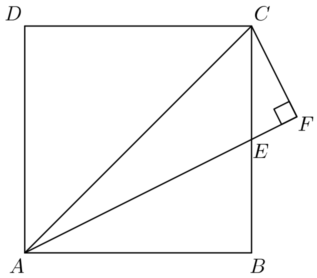
Dessa forma, há $1 + 3 + 3 =$ **7 maneiras** de escolher os alimentos do tipo 2. Em relação ao tipo 3, o cliente deve escolher pelo menos 1 alimento. Aqui vamos listar as possibilidades, em função das restrições apresentadas (arroz deve estar acompanhado de feijão, bem como arroz e macarrão não podem ser escolhidos juntos):

- Cliente escolheu 1 alimento do tipo 3: apenas feijão; apenas macarrão; apenas batata (não poderia ser escolhido apenas arroz, pois arroz deve estar acompanhado de feijão) - 3 maneiras;
- Cliente escolheu 2 alimentos do tipo 3: arroz e feijão; feijão e macarrão; feijão e batata; macarrão e batata - 4 maneiras;
- Cliente escolheu 3 alimentos do tipo 3: arroz, feijão e batata; feijão, batata e macarrão - 2 maneiras;
- Cliente escolheu 4 alimentos do tipo 3: não é possível, pois arroz e macarrão não podem ser escolhidos juntos.

Assim, temos $3 + 4 + 2 =$ **9 maneiras** de escolher os alimentos do tipo 3. Usando o princípio multiplicativo, segue que o número total de refeições que podem ser escolhidas neste restaurante é $16 \times 7 \times 9 =$ **1008 refeições**.

(**Alternativa C**)

Problema 5. Na figura abaixo, o quadrado $ABCD$ tem lado unitário, E é o ponto médio do lado $\overline{CB}$ e o ângulo em F é reto.



A área do triângulo ACF é igual a:

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$ c) $\dfrac{3}{10}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ e) $\dfrac{2}{5}$

Resolução: Como $C\widehat{E}F = A\widehat{E}B$ (opostos pelo vértice) então os triângulos retângulos EBA e CFE são semelhantes. Além disso, a razão de semelhança entre os dois é igual a $\dfrac{AE}{CE}$.

Como $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$, segue que $AE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Logo,

$$\frac{AE}{CE} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

Assim, a razão entre as áreas dos dois triângulos é igual a

$$\frac{A_{EBA}}{A_{CFE}} = (\sqrt{5})^2 = 5.$$

Portanto, $A_{CFE} = \dfrac{A_{EBA}}{5}$, mas $A_{EBA} = \dfrac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$. Logo, $A_{CFE} = \dfrac{1}{20}$.

Além disso, $A_{CEA} = A_{EBA} = \dfrac{1}{4}$ (possuem bases com mesmo comprimento, $CE = EB$, e alturas relativas a estes lados de mesmo comprimento, AB e DC).

Portanto,

$$A_{ACF} = A_{CEA} + A_{CFE} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{5+1}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

(**Alternativa C**)

Problema 6. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ uma função que satisfaz $f(0) = 1$ e, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f(m + n) = f(m) - f(n) + 1.$$

O valor de $f(2017)$ é:

a) 2017 b) 1 c) 0 d) -1 e) -2017

Resolução: Como a igualdade do enunciado é válida para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $m = 0$, e assim obtemos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$f(0 + n) = f(0) - f(n) + 1.$$

Como por hipótese $f(0) = 1$, segue que

$$f(n) = 1 - f(n) + 1.$$

Disto, obtemos que $2f(n) = 2$, ou seja, $f(n) = 1$. Trata-se, assim, de uma função constante e portanto, $f(2017) = 1$.

(**Alternativa B**)

Problema 7. Para todos os números naturais n maiores ou iguais a 1, os números reais da forma

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

são:

a) todos racionais e alguns não são inteiros.
b) todos inteiros.
c) todos irracionais.
d) alguns racionais e outros irracionais.
e) todos racionais e alguns são negativos.

Resolução: Inicialmente, veja que

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2\sqrt{5}}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{4}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2\sqrt{5}}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Agora tome n um número natural qualquer maior ou igual a 2 e note que

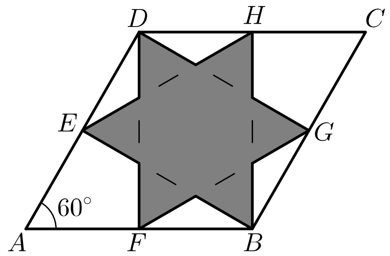
$$\begin{aligned}
\sqrt{5}(a_{n+1} - a_{n-1}) &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1\right] - \\
&- \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1\right] \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} - 1\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} - 1\right] \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\
&= \sqrt{5}a_n,
\end{aligned}
$$

logo $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, isto é, cada termo da sequência é a soma dos dois termos anteriores. Como $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$ são inteiros, temos que os termos a_n são todos inteiros. (Esta sequência é conhecida como *sequência de Fibonacci*).

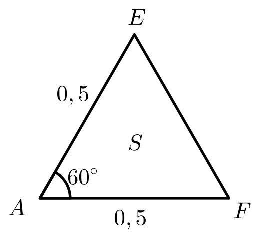
(**Alternativa B**)

Problema 8. Considere um losango $ABCD$ de lado unitário, com ângulo interno em A de 60°. Sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados $\overline{DA}, \overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CD}$ respectivamente, conforme a figura abaixo. Qual é a razão entre a área sombreada e a área do losango $ABCD$?



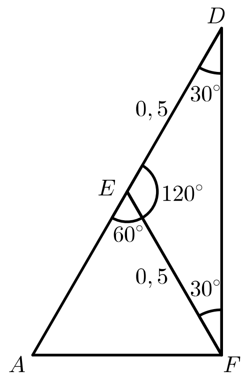
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{5}$

Resolução: Como os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{AF}$ têm comprimento 0,5 e como o ângulo em A mede 60°, logo o triângulo AEF é equilátero. Chamemos sua área de S.



Agora vamos analisar o triângulo DEF. Como os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ têm comprimento 0,5, logo o triângulo DEF é isósceles e os ângulos $E\widehat{D}F$ e $E\widehat{F}D$ têm a mesma medida. Mais ainda, como AEF é equilátero, logo o ângulo $A\widehat{E}F$ mede 60° e, deste modo, o ângulo $D\widehat{E}F$ mede 120°. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, assim obtemos que

$$E\widehat{D}F = 30° = E\widehat{F}D.$$



Como $ABCD$ é um losango, logo os ângulos internos em vértices consecutivos são suplementares, ou seja, como $B\widehat{A}D = 60°$ obtemos que

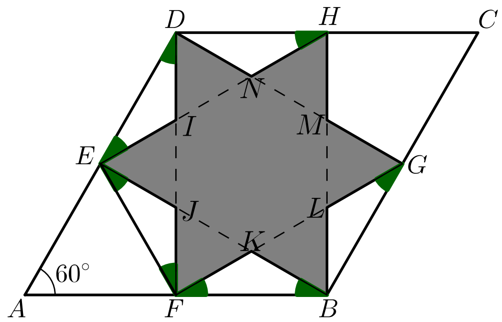
$$A\widehat{B}C = 120° = A\widehat{D}C \qquad \text{e} \qquad B\widehat{C}D = 60° = B\widehat{A}D.$$

No triângulo DEH, temos que os lados $\overline{DE}$ e $\overline{DH}$ têm comprimento 0,5 e que o ângulo em D mede 120°, logo o triângulo DEH é isósceles e os ângulos da base medem

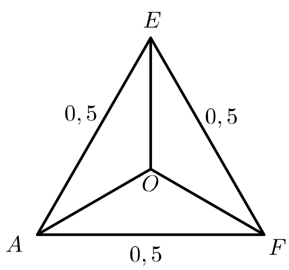
$$D\widehat{E}H = D\widehat{H}E = 30°.$$

Analogamente, temos que os triângulos BEF e BFG são isósceles com lados de comprimento 0,5 e ângulos da base medindo

$$F\widehat{E}B = F\widehat{B}E = 30° = B\widehat{F}G = B\widehat{G}F.$$



Deste modo, obtemos que os triângulos DEI, EFJ e BFK são isósceles com bases de comprimento 0,5 e ângulos internos adjacentes medindo 30°. Segue que, esses triângulos são congruentes e, portanto, têm a mesma área. Mais ainda, esses triângulos juntos formam um triângulo equilátero com lados de comprimento 0,5, e deste modo a soma das suas áreas é igual S. De fato, considerando o incentro O (ponto de intersecção das bissetrizes) do triângulo AEF, obtemos três triângulos isósceles com base de comprimento 0,5 e ângulos adjacentes medindo 30°.



Analogamente, temos que o triângulo CGH é equilátero com lados de comprimento 0,5, assim sua área é S. Mais ainda, de modo análogo ao mostrado anteriormente, os triângulos BGL, GHM e DHN são isósceles com bases de comprimento 0,5 e ângulos adjacentes as bases medindo 30°, deste modo a soma das áreas desses triângulos também é S.

Deste modo, a área da região branca da figura do enunciado é igual a $4S$.

Como os triângulos ABD e AEF são equiláteros e o comprimento de $\overline{AB}$ é o dobro do comprimento de $\overline{AF}$, logo a área do triângulo ABD é o quádruplo da área do triângulo AEF, ou seja,

$$A_{ABD} = 4S.$$

Assim, a área do losango $ABCD$ é $8S$ e, logo, a área da região hachurada é $4S$. Portanto a razão r entre a área hachurada e a área do losango é

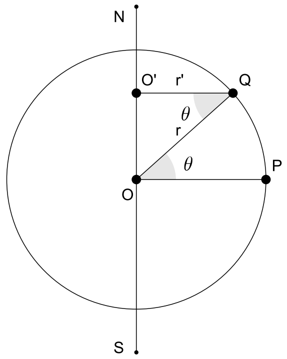
$$r = \frac{4S}{8S} = \frac{1}{2}.$$

(**Alternativa D**)

Problema 9. Em um planeta esférico de raio r quilômetros, Vera e José decidem viajar a partir de um mesmo ponto na linha do equador. Vera viaja r quilômetros para o norte, seguidos de r quilômetros para o leste. José viaja r quilômetros para o leste, seguidos de r quilômetros para o norte. Se José desloca-se novamente para o leste, quantos quilômetros faltam para José alcançar Vera?

a) $r(1 - \text{sen}(1))$ b) $r(1 - \cos(1))$ c) 0 d) $r((2\pi + 1)\cos(1) - 1)$ e) $r((2\pi + 1)\,\text{sen}(1) - 1)$

Resolução: Denotemos o centro do planeta por O, e por P o ponto no equador a partir do qual Vera e José se deslocam. Na figura abaixo, o diâmetro do círculo que contém P representa o equador.



Ao deslocarem-se para o norte, Vera e José irão para um paralelo norte do planeta, indicado na figura acima pela corda paralela ao equador que contém O' e Q. Determinaremos primeiro o raio r' deste paralelo, dado pelo comprimento $O'Q$. Usando trigonometria no triângulo retângulo $O'QO$, que tem hipotenusa de comprimento r (o raio do planeta) temos que

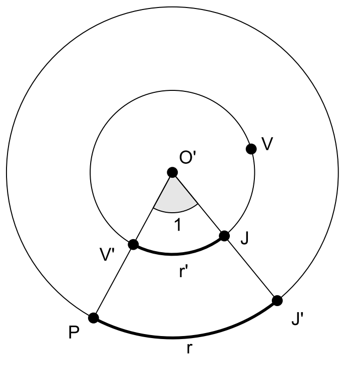
$$r' = r\cos(\theta),$$

em que θ é a medida do ângulo $O'\hat{Q}O$. Agora, os ângulos $O'\hat{Q}O$ e QOP são congruentes, pois são alternos internos, logo possuem mesma medida θ.

Lembrando que o comprimento de um arco de círculo é igual ao produto da medida do raio pela medida do ângulo que compreende o arco, e observando que o raio do planeta é r e o arco PQ tem comprimento r (pois esta é a distância que Vera e José percorrem para o norte), chegamos em

$$r = r \cdot \theta,$$

e portanto que θ é igual a 1 radiano.



A figura acima ilustra a situação vista de cima: Vera e José saem de P; Vera segue para o norte, chegando em A' e depois vai para leste, até A; enquanto isso, Bento desloca-se para o leste, até B', e em seguida vai para o norte, chegando em B.

Observe que o ângulo central dos arcos PB' e $A'B$ é o mesmo, e mede 1 radiano pela mesma razão apresentada acima: é um ângulo que compreende um arco de comprimento r (a saber, PB') em um círculo com raio de comprimento r. Assim, é possível calcular o comprimento do arco $A'B$: o raio do paralelo norte em questão é r' com ângulo central de 1 radiano, logo o arco $A'B$ tem comprimento

$$r' \cdot 1 = r' = r\cos(1),$$

que é menor do que r uma vez que $0 < \cos(1) < 1$.

Disso segue que a distância que falta para José percorrer no sentido leste para alcançar Vera é igual ao comprimento do arco BA. Finalmente, como o comprimento do arco $A'A$ é igual a r, chegamos à distância desejada:

$$r - r\cos(1) = r(1 - \cos(1)) \text{ km}.$$

(**Alternativa B**)

Problema 10. Seja A o conjunto de todos os números naturais com três algarismos e considere a função $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(abc) = (ac)^b$; por exemplo, $f(321) = (31)^2 = 961$. Para quantos elementos $x \in A$ tem-se que $f(x) = x$?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolução: Seja x um número de 3 algarismos qualquer, digamos

$$x = abc = 100a + 10b + c,$$

e suponha que $f(x) = x$. Então,

$$(10a + c)^b = (ac)^b = f(x) = x = 100a + 10b + c.$$

Como x tem três algarismos, sabemos que $a \geq 1$. Uma vez que

$$10 \leq 10a + c \leq 99,$$

De $(10a + c)^b = x$ tiramos que $b > 1$, pois para $b = 0$ ou $b = 1$ temos que $(10a + c)^b$ tem apenas um ou dois algarismos e x tem três algarismos. Similarmente, para $b = 3$ ou mais, $(10a + c)^b$ tem quatro ou mais algarismos. Assim, podemos concluir que $b = 2$, e portanto

$$x = (10a + c)^2 = 100a^2 + 20a \cdot c + c^2.$$

Igualando, temos

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 100a^2 + 20a \cdot c + c^2 \\ 100a + 20 + c &= 100a^2 + 20a \cdot c + c^2 && (\text{ pois } b = 2) \\ 20 + c - 20a \cdot c - c^2 &= 100a^2 - 100a = 100(a^2 - a). \end{aligned}$$

Sabemos que $a^2 \geq a$ pois $a \geq 1$; então a última equação mostra que $c \neq 0$, pois caso $c = 0$ teríamos

$$20 = 100(a^2 - a),$$

o que é impossível pois $100(a^2 - a) = 0$ (no caso em que $a^2 - a = 0$) ou $100(a^2 - a) \geq 100$ (no caso em que $a^2 - a \neq 0$).

Novamente de $a^2 \geq a$, temos $100a^2 - 100a \geq 0$, e portanto que $20 + c - 20a \cdot c - c^2 \geq 0$, ou seja,

$$20 + c \geq 20a \cdot c + c^2. \tag{1}$$

Como $c \neq 0$, temos $c \geq 1$; na verdade, temos que $c = 1$, pois caso $c \geq 2$ temos que $20 + c \leq 29$, ao passo que $20a \cdot c + c^2 \geq 20a \cdot c \geq 20c \geq 40$, o que nos daria

$$29 \geq 20 + c \geq 20a \cdot c + c^2 \geq 40,$$

claramente absurdo. Substituindo $b = 2$ e $c = 1$, ficamos com

$$\begin{aligned} 100a + 20 + 1 &= 100a^2 + 20a \cdot 1 + 1^2 \\ 100a^2 - 80a - 20 &= 0 \\ 5a^2 - 4a - 1 &= 0, \end{aligned}$$

cuja única raiz positiva é $a = 1$. Portanto, existe apenas um x como no enunciado, com $a = 1, b = 2, c = 1$:

$$x = 121.$$

(**Alternativa A**)