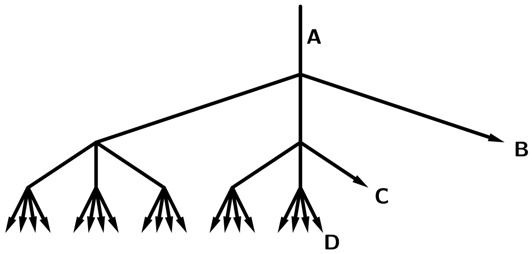
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

XX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

Resolução da prova – 1ª fase – Nível 2

09 de agosto de 2017

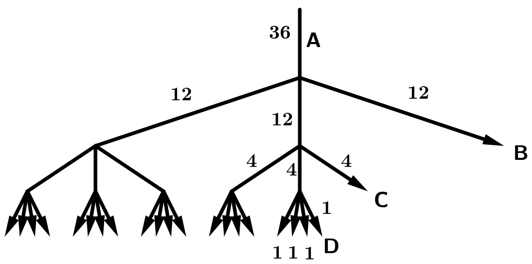
Problema 1. O diagrama abaixo representa uma rede de distribuição de água. As setas representam torneiras. A cada bifurcação de cima para baixo, a água é distribuída igualmente pela tubulação seguinte. Sabendo-se que a vazão no cano A é de 36 litros de água por minuto, qual é a vazão em conjunto das torneiras B, C e D por minuto?



a) 15 b) 8 c) 10 d) 7 e) 17

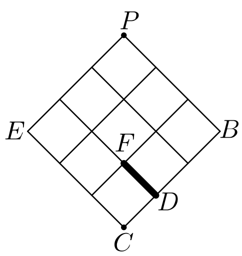
Resolução: Observe que há 3 tubulações conectadas à tubulação A. Logo, como a água é distribuída igualmente pela tubulação seguinte, cada uma destas tubulações receberá 12 litros de água por minuto ($36 \div 3 = 12$). Desta forma, a vazão da torneira B por minuto será de 12 litros. A tubulação que segue abaixo da tubulação A está conectada a outras três tubulações. Logo, cada uma delas receberá 4 litros de água por minuto ($12 \div 3 = 4$), e assim a vazão da torneira C será de 4 litros por minuto. Por fim, a tubulação que segue abaixo da tubulação que está abaixo de A está conectada a outras quatro tubulações. Logo, cada uma delas receberá 1 litro de água por minuto ($4 \div 4 = 1$), e a vazão da torneira D será de 1 litro por minuto.

Portanto, a vazão em conjunto das torneiras B, C e D por minuto é de $12 + 4 + 1 = 17$ litros.



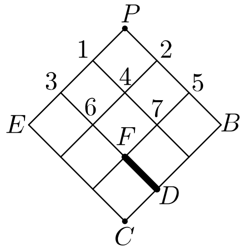
(**Alternativa E**)

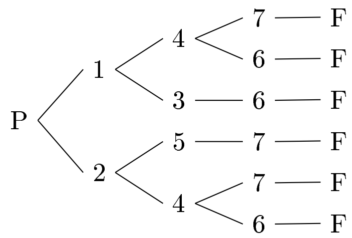
Problema 2. Na figura ao lado, $PBCE$ é um quadrado cujos lados medem 3 metros. Foram traçados segmentos paralelos aos lados de forma que todos os quadrados menores obtidos têm lados de comprimento igual a 1 metro. De quantas maneiras distintas é possível sair do ponto P (partida) e chegar ao ponto C (chegada), percorrendo 6 metros, andando somente sobre os lados dos quadrados e passando pelo segmento $\overline{FD}$?



a) 8 b) 5 c) 6 d) 7 e) 10

Resolução: Para atendermos os requisitos do problema, temos que em qualquer uma das possibilidades o quinto metro percorrido deve ser o segmento $\overline{FD}$ e o sexto metro percorrido deve ser o segmento $\overline{DC}$. Assim, precisamos verificar de quantas maneiras diferentes podemos percorrer os quatro primeiros metros, de modo a terminar no ponto F (para então percorrer os dois metros restantes). Numerando alguns dos vértices como na figura abaixo, temos que os caminhos possíveis de comprimento 4, saindo de P e chegando em F, são indicados como no diagrama a seguir.





Assim, vemos que há um total de 6 possibilidades.

(**Alternativa C**)

Problema 3. Ao chegar do trabalho, Margarida percebeu que um de seus três filhos (Pedro, Jorge e Patrícia) havia quebrado um vaso na sala. Perguntando a eles sobre o ocorrido, cada um respondeu:

- Pedro: "Quem quebrou o vaso fui eu, mamãe";
- Jorge: "Quem quebrou o vaso não fui eu";
- Patrícia: "Quem quebrou o vaso não foi o Pedro".

Sabe-se que apenas um deles quebrou o vaso, e que apenas um deles disse a verdade. Quem quebrou o vaso e quem disse a verdade, respectivamente?

a) Jorge e Patrícia b) Pedro e Pedro c) Pedro e Jorge d) Patrícia e Patrícia e) Patrícia e Jorge

Resolução: Vamos analisar as possibilidades, para identificar qual delas está de acordo com o enunciado. Lembre que de acordo com o enunciado, apenas um deles disse a verdade.

Assumindo que Pedro quebrou o vaso, Pedro e Jorge teriam dito a verdade, e Patrícia teria mentido. Assim, teríamos duas verdades, o que não está de acordo com o enunciado. Por outro lado, assumindo que Patrícia quebrou o vaso, Pedro teria mentido, e Jorge e Patrícia teriam dito a verdade. Mais uma vez teríamos duas verdades, o que não está de acordo com o enunciado.

Finalmente, se Jorge quebrou o vaso, Pedro e Jorge teriam mentido, e apenas Patrícia teria dito a verdade, o que está de acordo com o enunciado. Assim, quem quebrou o vaso foi Jorge, e Patrícia disse a verdade.

(**Alternativa A**)

Problema 4. Paulinho deseja organizar um churrasco em família. No entanto, por uma questão de espaço, decidiu convidar apenas 4 dos seus 7 primos para participar deste churrasco. Ocorre que Abelardo e Bernardo, primos de Paulinho, só podem ir ao churrasco se forem juntos. De quantas maneiras diferentes Paulinho poderá escolher seus convidados?

a) 12 b) 14 c) 15 d) 18 e) 30

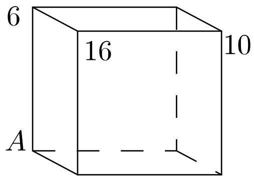
Resolução: Vamos chamar os primos de Paulinho de A, B, C, D, E, F e G, e vamos supor que os primos que só podem ir ao churrasco se forem juntos são A e B (Abelardo e Bernardo). Temos então dois casos a considerar:

- Caso 1: A e B são convidados. Neste caso, temos que chamar mais dois convidados entre os demais, para completar o total de 4 pessoas. Fazendo uma contagem, temos 10 possibilidades, que são: C e D; C e E; C e F; C e G; D e E; D e F; D e G; E e F; E e G; F e G.
- Caso 2: A e B não são convidados. Neste caso, temos que chamar todos os convidados entre os demais. Fazendo uma contagem, encontramos 5 possibilidades: C, D, E e F; C, D, E e G; C, D, F e G; C, E, F e G; D, E, F e G.

Dessa forma, o número total de possibilidades é 15.

(**Alternativa C**)

Problema 5. Os vértices do cubo abaixo são numerados com os números pares de 2 a 16. A soma dos quatro números nos vértices de cada face é a mesma para todas as faces. Os números 6, 16 e 10 já foram atribuídos a alguns vértices, como mostra a figura. Qual é o número indicado no vértice A?



a) 2 b) 4 c) 8 d) 12 e) 14

Resolução: A soma dos oito primeiros números pares é $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72$. Dessa forma, se somarmos os valores dos vértices de duas faces opostas, estaremos somando todos os oito possíveis valores, e essa soma deverá ser igual a 72.

Como a soma é a mesma em cada face, podemos concluir que a soma dos valores dos vértices de uma face é $72 \div 2 = 36$. Por este raciocínio, o quarto número da face do topo é $36 - (6 + 10 + 16) = 36 - 32 = 4$.

Desta forma, ainda sobram os números 2, 8, 12 e 14 para serem atribuídos aos outros vértices. Na face frontal já temos $16 + 10 = 26$, o que significa que os dois números que faltam somam 10. Logo, a única possibilidade são os números 8 e 2. Temos então duas formas de atribuir os números 8 e 2 aos dois vértices restantes da face frontal: 8 à esquerda e 2 à direita ou 2 à esquerda e 8 à direita.

Se o 8 está no vértice da esquerda e o 2 no vértice da direita, a soma dos três números da face lateral direita é $4 + 10 + 2 = 16$, deste modo para completar 36 falta somar 20, número que não está disponível. Então, esta forma de atribuir os números aos vértices não está de acordo com o enunciado.

Concluímos, assim, que o 8 está no vértice da direita, e o 2 no vértice da esquerda. E assim, a soma dos vértices da face lateral esquerda é $6 + 16 + 2 + A$. Como essa soma deve ser igual a 36, em A só pode estar o número 12.

(**Alternativa D**)

Problema 6. Dois números inteiros positivos a e b, com $a < b$, são ditos *primos de segundo grau* se $b^2 - a^2$ é um número primo. A soma de dois números primos de segundo grau é sempre um número:

a) par b) ímpar e múltiplo de 5 c) múltiplo de 17 d) primo e) múltiplo de 3

Resolução: Tome dois números inteiros positivos a e b quaisquer, com $a < b$, e que sejam primos de segundo grau. Logo, $b^2 - a^2$ é um número primo. Agora veja que

$$b^2 - a^2 = (b + a)(b - a).$$

Portanto, $b+a$ e $b-a$ dividem $b^2 - a^2$. Como $b^2 - a^2$ é um número primo os únicos divisores positivos de $b^2 - a^2$ são 1 e o próprio $b^2 - a^2$.

Por fim, observe que como a e b são dois números inteiros positivos tais que $a < b$, $b - a$ deve ser menor que $b + a$. Logo, $b - a = 1$ e $b + a = b^2 - a^2$, ou seja, a soma de dois números primos de segundo grau é sempre um número primo.

(**Alternativa D**)

Problema 7. Considere três números naturais distintos, maiores do que 5 e menores do que 15. Sabe-se que apenas um deles é primo e que a soma dos três também é um número primo. Além disso, a diferença entre o maior destes números e o do meio é igual ao dobro da diferença entre o número do meio e o menor. O produto destes três números é:

a) 1848 b) 1056 c) 420 d) 1820 e) 784

Resolução: Tome a, b e c os três números naturais distintos e suponhamos que

$$5 < a < b < c < 15.$$

O problema nos diz que

$$c - b = 2(b - a). \tag{1}$$

Agora veja que de (1) segue que

$$a + 2b + c - b = a + 2b + 2(b - a) \Rightarrow a + b + c = 4b - a.$$

Denote por S a soma $a+b+c$, então temos que

$$S = 4b - a.$$

Como S é primo pelo enunciado do problema, então a deve ser ímpar, pois $4 \cdot b$ é par (se a fosse par S seria par, mas o único número natural par é 2).

Agora olhando novamente para (1) vemos que

$$-a+b+c-b = -a+b+2(b-a) \Rightarrow c-a = 3b-3a \Rightarrow c-a = 3(b-a).$$

Deste modo, $c-a$ deve ser um múltiplo de 3.

Por outro lado, do fato de a ser ímpar e $S = a+b+c$ ser primo (e portanto ímpar, pois $S > 2$), concluímos que que $b+c$ deve ser par. Então há então duas possibilidades:

i) b e c são ímpares;

ii) b e c são pares.

Se (i) ocorre, então a, b e c são ímpares. Por outro lado, os ímpares maiores que 5 e menores que 15 são: $7, 9, 11$ e 13.

Veja que qualquer que seja a escolha de três desses números sempre dois deles serão primos, o que não satisfaz o enunciado do problema. Logo, (i) não ocorre.

No caso (ii) temos que b e c são pares. Então a é o primo, pois b e c são maiores que 5. Os números primos que são maiores do que 5 e menores do que 15 são: $7, 11$ e 13. O número a não pode ser 13, pois só há um par maior do que 13 e menor do que 15 (lembre-se que estamos supondo que $5 < a < b < c < 15$). Então $a = 7$ ou $a = 11$.

Se $a = 7$, as possibilidades para b e c são $8, 10, 12$ e 14 (com $b < c$). A única possibilidade para c de modo que $c - a$ será um múltiplo de 3 seria $c = 10$. Deste modo, teríamos que $a = 7$, $c = 10$ e de, por exemplo, $c - a = 3(b-a)$ segue que

$$10 - 7 = 3(b-7) \Rightarrow b - 7 = 1 \Rightarrow b = 8.$$

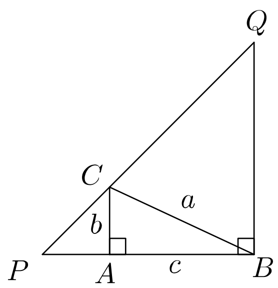
E, nesse caso, $a+b+c = 7+8+10 = 25$, que não é primo.

Resta-nos $a = 11$. Nesse caso, teremos $b = 12$ e $c = 14$. De fato, $S = a+b+c = 11+12+14 = 37$, que é primo. Então,

$$a \cdot b \cdot c = 1848.$$

(**Alternativa A**)

Problema 8. Na figura abaixo, PQB é um triângulo retângulo isósceles e para cada ponto C do segmento $\overline{PQ}$, diferente de P e Q, constrói-se um triângulo retângulo ABC, com hipotenusa a e catetos b e c.



Dentre todos os possíveis triângulos retângulos ABC há um que tem o menor perímetro. As medidas dos lados deste triângulo satisfazem:

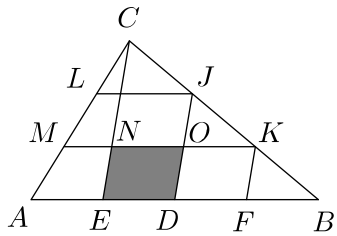
a) $a > b + c$ b) $b > c$ c) $c > b$ d) $b = c$ e) $b > a + c$

Resolução: Como PQB é um triângulo isósceles e retângulo em B, temos que $\widehat{P} = 45^o$. Então, como CA é perpendicular a PB, teremos que $A\widehat{C}P = 45^o$, ou seja, o triângulo PAC também é retângulo isósceles com $PA = AC = b$. Portanto, qualquer que seja o triângulo ABC do problema, a soma $CA + AB = b + c$ de seus catetos é igual a PB (ou seja, é constante). Assim, o triângulo ABC de perímetro mínimo será aquele de hipotenusa mínima. Essa hipotenusa $a = BC$ será mínima quando BC for perpendicular a PQ.

Nesse caso, como $A\widehat{C}P = 45^o$, teremos $A\widehat{C}B = 45^o$, e portanto, $A\widehat{B}C = 45^o$, ou seja, o triângulo ABC será retângulo isósceles com $b = c$.

(Alternativa D)

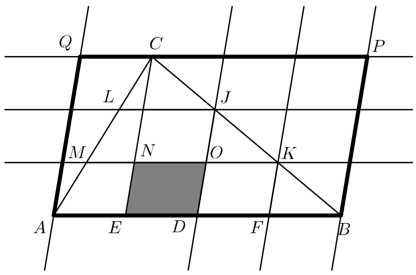
Problema 9. A área do triângulo ABC da figura abaixo é igual a 36 cm^2. Divide-se o lado $\overline{AB}$ em quatro partes iguais e os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, em três partes iguais. Então, traçam-se os segmentos $\overline{CE}, \overline{JD}, \overline{KF}, \overline{JL}$ e $\overline{KM}$.



A área do quadrilátero sombreado $EDON$ é igual a:

a) 8 cm^2 b) 10 cm^2 c) 6 cm^2 d) 9 cm^2 e) 4 cm^2

Resolução: Traçando-se por C uma paralela a AB e por A e B paralelas a CE obtemos um paralelogramo $ABPQ$. Prolongando-se os demais segmentos subdividimos esse paralelogramo em 12 paralelogramos congruentes:

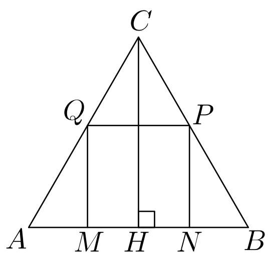


A área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo $ABPQ$. Assim, $A_{ABPQ} = 2 \times 36 = 72\text{cm}^2$. Portanto,

$$A_{EDON} = \frac{1}{12} \times A_{ABPQ} = \frac{72}{12} = 6 \text{ cm}^2.$$

(Alternativa C)

Problema 10. Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero e $MNPQ$ é um quadrado.



Neste caso, a única expressão verdadeira é:

a) $AQ = CQ$ b) $BP > CP$ c) $MN = \dfrac{AB}{2}$ d) $CQ > AQ$ e) $MQ = \dfrac{CH}{2}$

Resolução: Note que PQ é paralelo a AB, pois $MNPQ$ é um quadrado. Então $P\widehat{Q}C = Q\widehat{P}C = C\widehat{A}B = C\widehat{B}A = 60°$. Portanto, o triângulo QPC é equilátero. Então $CQ = QP$.

Além disso, $QP = QM$, pois $MNPQ$ é um quadrado. Por outro lado, $AQ > QM$, pois AQ é a hipotenusa do triângulo retângulo AMQ. Assim temos: $AQ > QM = QP = CQ$, ou, como $BP = AQ$ e $CP = CQ$, $BP > CP$.

(Alternativa B)