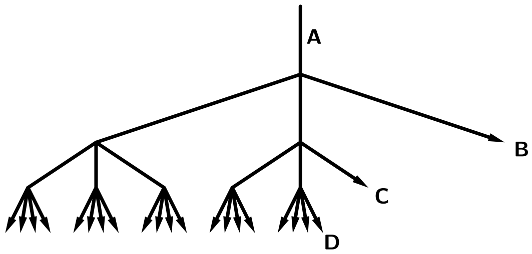
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

XX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

Resolução da prova – 1ª fase – Nível 1

09 de agosto de 2017

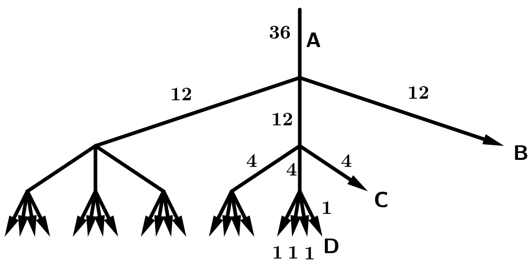
Problema 1. O diagrama abaixo representa uma rede de distribuição de água. As setas representam torneiras. A cada bifurcação de cima para baixo, a água é distribuída igualmente pela tubulação seguinte. Sabendo-se que a vazão no cano A é de 36 litros de água por minuto, qual é a vazão em conjunto das torneiras B, C e D por minuto?



a) 15 b) 8 c) 10 d) 7 e) 17

Resolução: Observe que há 3 tubulações conectadas à tubulação A. Logo, como a água é distribuída igualmente pela tubulação seguinte, cada uma destas tubulações receberá 12 litros de água por minuto ($36 \div 3 = 12$). Desta forma, a vazão da torneira B por minuto será de 12 litros. A tubulação que segue abaixo da tubulação A está conectada a outras três tubulações. Logo, cada uma delas receberá 4 litros de água por minuto ($12 \div 3 = 4$), e assim a vazão da torneira C será de 4 litros por minuto. Por fim, a tubulação que segue abaixo da tubulação que está abaixo de A está conectada a outras quatro tubulações. Logo, cada uma delas receberá 1 litro de água por minuto ($4 \div 4 = 1$), e a vazão da torneira D será de 1 litro por minuto.

Portanto, a vazão em conjunto das torneiras B, C e D por minuto é de $12 + 4 + 1 = 17$ litros.



(**Alternativa E**)

Problema 2. Jucavo propõe o seguinte desafio: "Eu vou pensar em um número. A seguir, darei três dicas e você terá que dizer qual foi o número em que eu pensei". Você aceita o desafio. Jucavo, então, pensa em um número e fornece as seguintes dicas:

- o número que eu pensei é um múltiplo de 7;
- quando eu subtraio 17 do número que eu pensei o resultado obtido é um múltiplo de 4;
- o número que eu pensei é um número natural entre 2000 e 2017.

Assinale a alternativa que corresponde ao número que Jucavo pensou.

a) 2005 b) 2009 c) 2002 d) 2016 e) 2003

Resolução: Primeiramente, vamos identificar todos os múltiplos de 7 entre 2000 e 2017. São eles: 2002, 2009 e 2016. Agora, basta verificar quais deste números satisfazem a segunda condição mencionada por Jucavo: "quando eu subtraio 17 do número que eu pensei o resultado obtido é um múltiplo de 4". Veja que:

- $2002 - 17 = 1985 = 4 \times 496 + 1$, ou seja, 1985 não é múltiplo de 4;
- $2009 - 17 = 1992 = 4 \times 498$, ou seja, 1992 é múltiplo de 4;
- $2016 - 17 = 1999 = 4 \times 499 + 3$, ou seja, 1999 não é múltiplo de 4.

Portanto, Jucavo pensou no número 2009.

(**Alternativa B**)

Problema 3. Luísa, Grasiele e Rodrigo dividem uma caixa de bombons de forma igualitária. Cada um deles recebe $\frac{1}{3}$ do total de bombons da caixa. Rodrigo, muito gentil, decide dar para cada uma delas $\frac{1}{4}$ dos bombons que recebeu. Sabendo-se que Rodrigo ficou com seis bombons, quantos bombons havia inicialmente na caixa?

a) 36 b) 30 c) 60 d) 18 e) 24

Resolução: Dos bombons que recebeu, Rodrigo deu para as meninas duas "partes" de um quarto: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Assim, Rodrigo deu a metade dos bombons que recebeu. Se ele ficou com 6 bombons, então recebeu 12 bombons ($6 \times 2 = 12$). Como a divisão inicial foi igualitária, havia na caixa $12 \times 3 = 36$ bombons.

(**Alternativa A**)

Problema 4. A área de um retângulo é 30 cm^2 e as medidas de seus lados são números naturais. Qual das medidas a seguir pode ser o perímetro desse retângulo?

a) 60 cm b) 62 cm c) 32 cm d) 28 cm e) 20 cm

Resolução: Sabemos que a área de um retângulo é dada pelo produto das medidas de sua base e de sua altura. Como este produto é $30 = 2 \times 3 \times 5$, e as medidas dos lados são números naturais, temos as seguintes possibilidades:

- $30 = 2 \times 15$: lados com medidas 2 cm e 15 cm, logo o perímetro é $2 + 2 + 15 + 15 = 34$ cm;
- $30 = 3 \times 10$: lados com medidas 3 cm e 10 cm, logo o perímetro é $3 + 3 + 10 + 10 = 26$ cm;
- $30 = 5 \times 6$: lados com medidas 5 cm e 6 cm, logo o perímetro é $5 + 5 + 6 + 6 = 22$ cm;
- $30 = 1 \times 30$: lados com medidas 1 cm e 30 cm, logo o perímetro é $1 + 1 + 30 + 30 = 62$ cm.

Portanto, dentre os valores apresentados nas alternativas, o único que pode ser o perímetro do retângulo mencionado é 62 cm.

(**Alternativa B**)

Problema 5. Ao chegar do trabalho, Margarida percebeu que um de seus três filhos (Pedro, Jorge e Patrícia) havia quebrado um vaso na sala. Perguntando a eles sobre o ocorrido, cada um respondeu:

- Pedro: "Quem quebrou o vaso fui eu, mamãe";
- Jorge: "Quem quebrou o vaso não fui eu";
- Patrícia: "Quem quebrou o vaso não foi o Pedro".

Sabe-se que apenas um deles quebrou o vaso, e que apenas um deles disse a verdade. Quem quebrou o vaso e quem disse a verdade, respectivamente?

a) Jorge e Patrícia b) Pedro e Pedro c) Pedro e Jorge d) Patrícia e Patrícia e) Patrícia e Jorge

Resolução: Vamos analisar as possibilidades, para identificar qual delas está de acordo com o enunciado. Lembre que de acordo com o enunciado, apenas um deles disse a verdade.

Assumindo que Pedro quebrou o vaso, Pedro e Jorge teriam dito a verdade, e Patrícia teria mentido. Assim, teríamos duas verdades, o que não está de acordo com o enunciado. Por outro lado, assumindo que Patrícia quebrou o vaso, Pedro teria mentido, e Jorge e Patrícia teriam dito a verdade. Mais uma vez teríamos duas verdades, o que não está de acordo com o enunciado.

Finalmente, se Jorge quebrou o vaso, Pedro e Jorge teriam mentido, e apenas Patrícia teria dito a verdade, o que está de acordo com o enunciado. Assim, quem quebrou o vaso foi Jorge, e Patrícia disse a verdade.

(**Alternativa A**)

Problema 6. Paulinho deseja organizar um churrasco em família. No entanto, por uma questão de espaço, decidiu convidar apenas 4 dos seus 7 primos para participar deste churrasco. Ocorre que Abelardo e Bernardo, primos de Paulinho, só podem ir ao churrasco se forem juntos. De quantas maneiras diferentes Paulinho poderá escolher seus convidados?

a) 12 b) 14 c) 15 d) 18 e) 30

Resolução: Vamos chamar os primos de Paulinho de A, B, C, D, E, F e G, e vamos supor que os primos que só podem ir ao churrasco se forem juntos são A e B (Abelardo e Bernardo). Temos então dois casos a considerar:

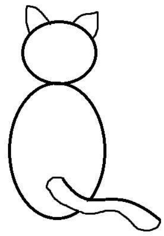
- Caso 1: A e B são convidados. Neste caso, temos que chamar mais dois convidados entre os demais, para completar o total de 4 pessoas. Fazendo uma contagem, temos 10 possibilidades, que são: C e D; C e E; C e F; C e G; D e E; D e F; D e G; E e F; E e G; F e G.
- Caso 2: A e B não são convidados. Neste caso, temos que chamar todos os convidados entre os demais. Fazendo uma contagem, encontramos 5 possibilidades: C, D, E e F; C, D, E e G; C, D, F e G; C, E, F e G; D, E, F e G.

Dessa forma, o número total de possibilidades é 15.

(**Alternativa C**)

Problema 7. Nicole quer colorir o gato da figura ao lado de acordo com as seguintes regras:

- as duas orelhas devem ser pintadas da mesma cor;
- regiões vizinhas do gato (por exemplo, o rabo e o corpo) não podem ser pintadas da mesma cor;
- o rabo deve ser pintado com a mesma cor das orelhas.



Sabendo que Nicole tem cinco lápis de cores diferentes para colorir o gato, de quantas maneiras diferentes ela pode pintá-lo seguindo as instruções acima?

a) 20 b) 5 c) 120 d) 12 e) 60

Resolução: Observe que o gato é formado por quatro regiões: orelhas, cabeça, corpo e rabo. Escolhida uma cor para a cabeça, temos quatro opções para a cor do corpo, pois regiões vizinhas não podem ser pintadas da mesma cor. Ademais, sobram três opções de cores para o rabo e as orelhas, pois como a cor das orelhas e do rabo deve ser a mesma, não pode ser igual à cor da cabeça e nem à cor do corpo.

Por exemplo, suponha que os lápis de Nicole tivessem as cores azul, verde, vermelho, amarelo e cinza. Se a cabeça for azul, o corpo pode ser verde, vermelho, amarelo ou cinza. Escolhendo verde para o corpo, as orelhas e rabo podem ser vermelho, amarelo ou cinza.

Assim, escolhida a cor de uma região, há $4 \times 3 = 12$ possibilidades de pintar o gato. Como a primeira cor pode ser escolhida dentre as cinco cores, há $5 \times 12 = 60$ maneiras de pintar o gato seguindo as instruções.

(**Alternativa E**)

Problema 8. Um desafio de Matemática, contendo 20 questões, é proposto na turma de Vanessa. Para cada questão respondida corretamente, o aluno ganha 5 pontos; se ele erra a questão, perde 2 pontos; questões em branco não são pontuadas. Sabendo-se que Vanessa deixou um quinto das questões em branco e obteve 38 pontos no desafio, quantas questões Vanessa errou?

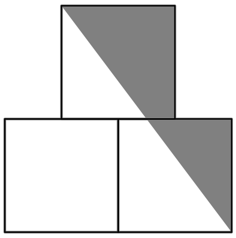
a) 3 b) 4 c) 6 d) 7 e) 8

Resolução: Pelo enunciado, Vanessa deixou um quinto das questões em branco, ou seja, 4 questões ($20 \times \frac{1}{5} = 4$). Dessa forma, respondeu 16 questões ($20 - 4 = 16$). Precisamos descobrir agora quantas ela errou, sabendo que fez um total de 38 pontos. Para isso, basta testar cada uma das possibilidades: 16 acertos e 0 erros; 15 acertos e 1 erro; 14 acertos e 2 erros; 13 acertos e 3 erros; e assim sucessivamente.

Verificando cada possibilidade, vemos que a única que está de acordo com o enunciado é 10 acertos (50 pontos) e 6 erros (-12 pontos), pois nesse caso a pontuação total é 38 pontos.

(**Alternativa C**)

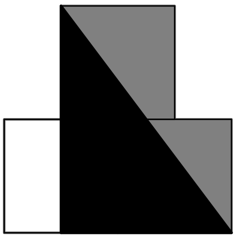
Problema 9. Na figura abaixo, há três quadrados de lado de comprimento igual a 1 cm. Observe que o centro do quadrado de cima está alinhado com o lado comum dos dois quadrados de baixo.



Qual é a área da região branca?

a) $\frac{1}{2}$ cm^2 b) 1 cm^2 c) $\frac{2}{3}$ cm^2 d) 2 cm^2 e) $\frac{3}{2}$ cm^2

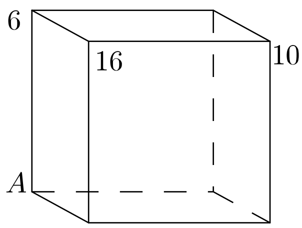
Resolução: Prolongando o lado esquerdo do quadrado superior até a base do quadrado que está abaixo dele, vemos que a região em branco acima será a união de um triângulo e um retângulo, como mostrado na figura abaixo.



A base do triângulo em preto na figura acima mede $1,0+0,5=1,5$ cm, e sua altura mede 2 cm, logo a sua área é igual a $\frac{1,5\times 2}{2}=1,5$ cm^2. Ademais, o retângulo em branco da figura tem lados de medida 1 cm e 0,5 cm, logo a sua área é igual a $1\times 0,5=0,5$ cm^2. Assim, a área da região branca da figura do enunciado é igual a $1,5+0,5=2$ cm^2.

(**Alternativa D**)

Problema 10. Os vértices do cubo abaixo são numerados com os números pares de 2 a 16. A soma dos quatro números nos vértices de cada face é a mesma para todas as faces. Os números 6, 16 e 10 já foram atribuídos a alguns vértices, como mostra a figura. Qual é o número indicado no vértice A?



Qual é o número indicado no vértice A?

a) 2 b) 4 c) 8 d) 12 e) 14

Resolução: A soma dos oito primeiros números pares é $2+4+6+8+10+12+14+16=72$. Dessa forma, se somarmos os valores dos vértices de duas faces opostas, estaremos somando todos os oito possíveis valores, e essa soma deverá ser igual a 72.

Como a soma é a mesma em cada face, podemos concluir que a soma dos valores dos vértices de uma face é $72 \div 2 = 36$. Por este raciocínio, o quarto número da face do topo é $36 - (6 + 10 + 16) = 36 - 32 = 4$.

Desta forma, ainda sobram os números 2, 8, 12 e 14 para serem atribuídos aos outros vértices. Na face frontal já temos $16 + 10 = 26$, o que significa que os dois números que faltam somam 10. Logo, a única possibilidade são os números 8 e 2. Temos então duas formas de atribuir os números 8 e 2 aos dois vértices restantes da face frontal: 8 à esquerda e 2 à direita ou 2 à esquerda e 8 à direita.

Se o 8 está no vértice da esquerda e o 2 no vértice da direita, a soma dos três números da face lateral direita é $4 + 10 + 2 = 16$, deste modo para completar 36 falta somar 20, número que não está disponível. Então, esta forma de atribuir os números aos vértices não está de acordo com o enunciado.

Concluímos, assim, que o 8 está no vértice da direita, e o 2 no vértice da esquerda. E assim, a soma dos vértices da face lateral esquerda é $6 + 16 + 2 + A$. Como essa soma deve ser igual a 36, em A só pode estar o número 12.

(**Alternativa D**)