

XX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

2ª fase – Nível 3

23 de setembro de 2017

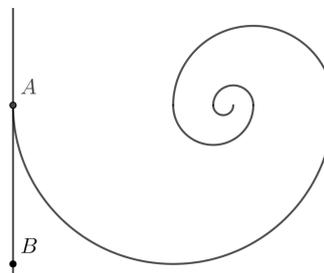
Problema 1. Seja f uma função que a todo número natural n associa o resto da divisão de n por 7. Por exemplo, $f(40) = 5$ pois o resto da divisão de 40 por 7 é igual a 5. Se x é um número natural e $f(x) = 3$, calcule

$$f(x + 2017^{2017}).$$

Problema 2. Determine todos os números naturais de dois algarismos, ab , em que a é o algarismo das dezenas e b é o algarismos das unidades, tais que exista um número natural n maior do que 1 que satisfaça:

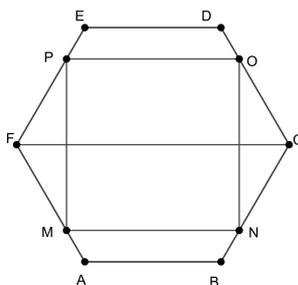
$$a^n + b^n = n \cdot (a + b).$$

Problema 3. Sejam A e B pontos no plano tais que o segmento \overline{AB} tem comprimento r . Uma partícula desloca-se no plano a partir do ponto A , percorrendo semicírculos de centros colineares com A , a uma taxa de um semicírculo por minuto, de modo que a reta que passa pelos ponto A e B é tangente ao círculo que contém o primeiro semicírculo, de raio r , e cada semicírculo subsequente tem raio igual à metade do raio do semicírculo anterior, como na figura ao lado.



Se uma segunda partícula sai de B no mesmo instante em que a primeira sai de A , deslocando-se em linha reta com velocidade constante, e se encontra com a primeira após n minutos, qual a distância total percorrida pela segunda partícula após estes n minutos?

Problema 4. Calcule a área do quadrado $MNOP$ inscrito no hexágono regular $ABCDEF$ de lado medindo l , sabendo-se que os lados \overline{MN} e \overline{OP} do quadrado são paralelos aos lados \overline{AB} e \overline{DE} do hexágono.



Problema 5. Três botões luminosos, numerados por 1, 2 e 3, se acendem ou se apagam conforme são pressionados. O primeiro botão está aceso e os outros dois estão apagados. Abel, Bia e Cadu retiram, um de cada vez e nesta ordem, sem reposição, uma bola de dentro de uma caixa que contém cinco bolas, numeradas de 1 a 5.

- Se o número retirado por Abel for primo, Abel pressiona os botões 1 e 2 (se o número não for primo, Abel não faz nada);
- Se o número retirado por Bia for par, Bia pressiona os botões 1 e 3 (se o número não for par, Bia não faz nada);
- Se o número retirado por Cadu for ímpar, Cadu pressiona os botões 2 e 3 (se o número não for ímpar, Cadu não faz nada).

Após este processo, qual a probabilidade das três luzes terminarem acesas?