UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

XX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

Prova – 1ª fase – Nível 3

08 de agosto de 2017

Problema 1. Ao chegar do trabalho, Margarida percebeu que um de seus três filhos (Pedro, Jorge e Patrícia) havia quebrado um vaso na sala. Perguntando a eles sobre o ocorrido, cada um respondeu:

- Pedro: "Quem quebrou o vaso fui eu, mamãe";
- Jorge: "Quem quebrou o vaso não fui eu";
- Patrícia: "Quem quebrou o vaso não foi o Pedro".

Sabe-se que apenas um deles quebrou o vaso, e que apenas um deles disse a verdade. Quem quebrou o vaso e quem disse a verdade, respectivamente?

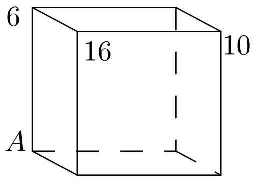
a) Jorge e Patrícia b) Pedro e Pedro c) Pedro e Jorge d) Patrícia e Patrícia e) Patrícia e Jorge

Problema 2. Paulinho deseja organizar um churrasco em família. No entanto, por uma questão de espaço, decidiu convidar apenas 4 dos seus 7 primos para participar deste churrasco. Ocorre que Abelardo e Bernardo, primos de Paulinho, só podem ir ao churrasco se forem juntos. De quantas maneiras diferentes Paulinho poderá escolher seus convidados?

a) 12 b) 14 c) 15 d) 18 e) 30

Problema 3. Os vértices do cubo abaixo são numerados com os números pares de 2 a 16. A soma dos quatro números nos vértices de cada face é a mesma para todas as faces. Os números $6, 16$ e 10 já foram atribuídos a alguns vértices, como mostra a figura. Qual é o número indicado no vértice A?

a) 2 b) 4 c) 8 d) 12 e) 14



Problema 4. Em um restaurante, existem três tipos de alimentos conforme o quadro abaixo:

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Cenoura	Carne	Arroz
Alface	Frango	Feijão
Rúcula	Peixe	Macarrão
Tomate		Batata
Beterraba		

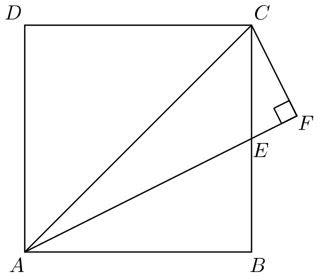
Neste restaurante, em uma refeição, devem ser escolhidos no mínimo três alimentos do tipo 1, de zero a dois alimentos do tipo 2 e pelo menos um alimento do tipo 3, de acordo com as seguintes regras:

- o arroz deve ser acompanhado do feijão;
- o arroz e o macarrão não podem ser escolhidos juntos.

Nessas condições, a quantidade total de refeições diferentes que podem ser montadas é:

a) 560 b) 1120 c) 1008 d) 60 e) 1232

Problema 5. Na figura abaixo, o quadrado $ABCD$ tem lado unitário, E é o ponto médio do lado $\overline{CB}$ e o ângulo em F é reto.



A área do triângulo ACF é igual a:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{20}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{2}{5}$

Problema 6. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ uma função que satisfaz $f(0) = 1$ e, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f(m+n) = f(m) - f(n) + 1.$$

O valor de $f(2017)$ é:

a) 2017 b) 1 c) 0 d) -1 e) -2017

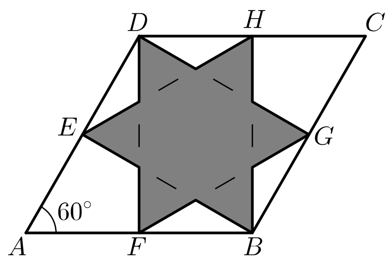
Problema 7. Para todos os números naturais n maiores ou iguais a 1, os números reais da forma

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

são:

a) todos racionais e alguns não são inteiros. b) todos inteiros. c) todos irracionais.
d) alguns racionais e outros irracionais. e) todos racionais e alguns são negativos.

Problema 8. Considere um losango $ABCD$ de lado unitário, com ângulo interno em A de $60°$. Sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados $\overline{DA}, \overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CD}$ respectivamente, conforme a figura abaixo. Qual é a razão entre a área sombreada e a área do losango $ABCD$?



a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{5}$

Problema 9. Em um planeta esférico de raio r quilômetros, Vera e José decidem viajar a partir de um mesmo ponto na linha do equador. Vera viaja r quilômetros para o norte, seguidos de r quilômetros para o leste. José viaja r quilômetros para o leste, seguidos de r quilômetros para o norte. Se José desloca-se novamente para o leste, quantos quilômetros faltam para José alcançar Vera?

a) $r(1 - \text{sen}(1))$ b) $r(1 - \cos(1))$ c) 0 d) $r((2\pi + 1)\cos(1) - 1)$ e) $r((2\pi + 1)\,\text{sen}(1) - 1)$

Problema 10. Seja A o conjunto de todos os números naturais com três algarismos e considere a função $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(abc) = (ac)^b$; por exemplo, $f(321) = (31)^2 = 961$. Para quantos elementos $x \in A$ tem-se que $f(x) = x$?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5