UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

XIX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA

2ª fase – Nível 3

24 de Setembro de 2016

Problema 1. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem:

(i) $f(x) \cdot \left[f(x) + 1 - x^2\right] = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) se houver x_1 e x_2 com $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$ ou $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$, então existirá x_3, entre x_1 e x_2, tal que $f(x_3) = 0$.

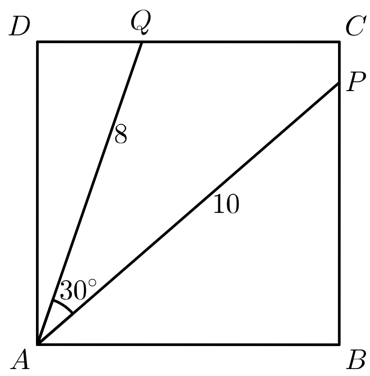
Problema 2. Um número de quatro algarismos $abcd$ é denominado *bidivisível* quando $abcd$ é múltiplo dos números ab e cd. Quantos números de quatro algarismos bidivisíveis existem?

Observação. Na notação $abcd$, a, b, c e d são algarismos. Por exemplo, se $abcd$ é o número 1020, então $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 0$, $ab = 10$ e $cd = 20$.

Problema 3. Determine a quantidade de triplas ordenadas (x, y, z) de números inteiros positivos tais que $x \cdot y \cdot z = 2016$.

Observação. Em triplas ordenadas, a ordem dos termos é relevante. Por exemplo, $(2016, 1, 1) \neq (1, 1, 2016)$.

Problema 4. Sejam $ABCD$ um quadrado e P e Q pontos nos lados BC e CD, respectivamente, tais que $AP = 10, AQ = 8$ e $P\hat{A}Q = 30°$. Calcule o comprimento de AB.



Problema 5. Mostre que se $n = a \cdot b$, com $a, b \in \mathbb{N}^*$, então

$$(a!)^b \cdot (b!)^a \leqslant n!$$

e que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = n$ ou $b = n$.

Observação. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.