UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

XIX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA

Resolução – 2ª fase – Nível 3

30 de novembro de 2016

Problema 1: Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem:

1. $f(x) \cdot \left[f(x) + 1 - x^2\right] = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. se houver x_1 e x_2 com $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$ ou $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$, então existirá x_3, entre x_1 e x_2, tal que $f(x_3) = 0$.

Resolução: Seja $f(x) = y$. A condição (i) nos diz que

$$y \cdot [y + 1 - x^2] = x^2, \text{ ou } y^2 + (1 - x^2)y - x^2 = 0,$$

então

$$y = \frac{-(1-x^2) \pm \sqrt{(1-x^2)^2 + 4x^2}}{2} = \frac{-(1-x^2) \pm \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}{2} = \frac{-(1-x^2) \pm (1+x^2)}{2}$$

Logo, $y = -1$ ou $y = x^2$.
Portanto, $f(x) = x^2$ ou $f(x) = -1$ para cada x.
Há uma infinidade de soluções satisfazendo as duas igualdades acima. Por exemplo, a função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1, -\infty < x \leq 1 \\ x^2, x > 1 \end{cases}$$

Porém, essa função não satisfaz (ii). As únicas que satisfarão (i) e (ii) são, portanto:

$$f(x) = x^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = -1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ x^2, x \geq 0 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 0 \\ -1, x > 0 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ -1, x \neq 0 \end{cases}$$

Problema 2. Um número de quatro algarismos $abcd$ é denominado *bidivisível* quando $abcd$ é múltiplo dos números ab e cd. Quantos números de quatro algarismos bidivisíveis existem?

Observação. Na notação $abcd$, a, b, c e d são algarismos. Por exemplo, se $abcd$ é o número 1020, então $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 0$, $ab = 10$ e $cd = 20$.

Resolução: Da hipótese do enunciado, sabemos que existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$abcd = m \cdot ab \qquad \text{e} \qquad abcd = n \cdot cd.$$

Ora, mas isto nos diz que tanto ab quanto cd dividem $abcd$, ou em notação, $ab \mid abcd$ (lê-se ab divide $abcd$) e $cd \mid abcd$. Ainda podemos reescrever $abcd$ em sua representação polinomial na base 10, obtendo

$$abcd = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d.$$

Em particular, $abcd = ab \cdot 10^2 + cd$. Logo, temos que

$$ab \mid ab \cdot 10^2 + cd \qquad \text{e} \qquad cd \mid ab \cdot 10^2 + cd. \tag{1}$$

Porém, já que $ab \mid ab$ (logo, $ab \mid ab \cdot 10^2$) e $cd \mid cd$, de (1) segue que

$$ab \mid cd \qquad \text{e} \qquad cd \mid ab \cdot 10^2. \tag{2}$$

Do primeiro termo de (2), temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$ab \cdot k = cd. \tag{3}$$

Substituindo o resultado (3) no segundo termo de (2), obtemos

$$ab \cdot k \mid ab \cdot 10^2 \Rightarrow k \mid 10^2,$$

ou seja, temos que k é um divisor de 100, ou ainda, $k \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$. Lembre que ab e cd são números de dois algarismos, ou seja, $ab, cd \in \mathbb{G} = \{10, 11, \ldots, 98, 99\}$. Assim, de (3) temos que

$$9 < ab \cdot k < 100, \tag{4}$$

já que $9 < cd < 100$. Vamos agora analisar os valores de k. Primeiramente, veja que k não pode ser 100, pois teríamos $ab \cdot k > 100$, para qualquer $ab \in \mathbb{G}$, contradizendo o resultado (4). Com o mesmo raciocínio, temos que k não pode assumir os valores 50, 25, 20 e 10, ou seja, o maior valor possível para k é 5.

Entretanto, veja que se $k = 5$, ab não poderá assumir qualquer valor de $\mathbb{G}$. Se trocarmos o valor de k em (4) por 5, obtemos

$$ab \cdot 5 < 100 \Rightarrow ab < 20,$$

ou seja, $ab \in \{10, 11, \ldots, 18, 19\}$. Ora, mas neste caso se $k < 5$, ainda estaríamos respeitando a condição (4). Assim, no caso em que $ab \in \{10, 11, \ldots, 18, 19\}$, teremos $4 \cdot 10 = 40$ números bidivisíveis (4 possibilidades para k: 1, 2, 4 ou 5 e, 10 possibilidades para ab: 10, 11, 12, 13, 14 15, 16, 17, 18 ou 19).

Usando a mesma estratégia anterior, obtemos que se $k \leq 4$ então $ab < 25$. Porém, como já contamos o números bidivisíveis no intervalo $\{10, 11, \ldots, 18, 19\}$, consideramos apenas o intervalo $\{20, 21, 22, 23, 24\}$. E assim, como temos 3 possibilidades para k (1, 2 ou 4) e 5 para ab (20, 21, 22, 23 ou 24), no caso em que $ab \in \{20, 21, 22, 23, 24\}$, teremos $3 \cdot 5 = 15$ números bidivisíveis.

Da mesma forma, se $k \leq 2$ então $ab < 50$. Logo, no intervalo $\{25, 26, \ldots, 48, 49\}$, teremos $2 \cdot 25 = 50$ números bidivisíveis.

Por fim, se $k \leq 1$ (ou seja, $k = 1$) então $ab < 100$. Logo, no intervalo $\{50, 51, \ldots, 98, 99\}$, teremos $1 \cdot 50 = 50$ números bidivisíveis.

Portanto, existem $40 + 15 + 50 + 50 = 155$ números bidivisíveis de quatro algarismos.

Problema 3: Determine a quantidade de triplas ordenadas (x, y, z) de números inteiros positivos tais que $x \cdot y \cdot z = 2016$.

Ideia geral: Inicialmente note que $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.
Seja (x, y, z) uma triplica. Então $xyz = 2016$ e

$$\begin{aligned} x &= 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 7^{\gamma_1} \\ y &= 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 7^{\gamma_2} \\ z &= 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 7^{\gamma_3} \end{aligned}$$

com

$$\begin{array}{lcl} 0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 5 & \text{e} & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5 \\ 0 \leq \beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq 2 & \text{e} & \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2 \\ 0 \leq \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leq 1 & \text{e} & \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \end{array}$$

Portanto, devemos calcular os números das partições (ordenadas) de $5, 2$ e 1 em números não negativos. Vejamos o caso $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5$. Note que $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 4$ é uma das soluções e que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 4$ e $\alpha_3 = 1$ é outra.

Resolução 1: Fixando os sinais de $+$ e denotando cada valor de α_i por $\diamond$. Queremos, por exemplo, no caso $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 4$, a seguinte configuração:

$$\diamond + + \diamond \diamond \diamond \diamond$$

Então, o que queremos calcular é o número de permutações de 7 elementos ($5 \diamond$ e $2 +$) com repetição de 5 (os $\diamond$)e 2 (os $+$). Isso é dado por

$$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = 21.$$

Para $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2$ teremos

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6, \text{ e}$$

para $\gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 = 1$ temos

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3.$$

Resposta: Portanto teremos $21 \cdot 6 \cdot 3 = 378$ triplas.

Resolução 2: Escrevemos as partições de 5 em ordem não crescente e consderemos as possíveis permutações:

Partição (de 5)	Permutações
5, 0, 0	3
4, 1, 0	6
3, 2, 0	6
3, 1, 1	3
2, 2, 1	3
Total	21

Idem para as partições de 2:

Partição (de 5)	Permutações
2, 0, 0	3
1, 1, 0	3
Total	6

e de 1:

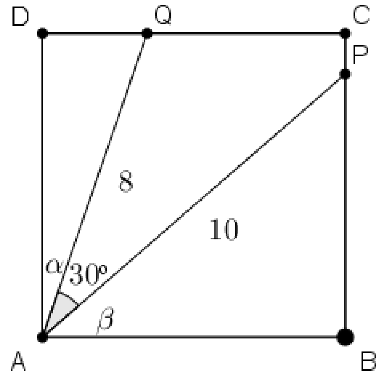
Partição (de 5)	Permutações
1, 0, 0	3
Total	3

Assim, teremos $21 \cdot 6 \cdot 3 = 378$ triplas.

Resposta: 378 triplas.

Problema 4: Sejam $ABCD$ um quadrado e P e Q pontos nos lados BC e CD, respectivamente, tais que $AP = 10, AQ = 8$ e $P\hat{A}Q = 30°$. Calcule o comprimento de AB.

Resolução 1: Sejam P' e C' os pontos resultantes da rotação de $90°$ (sentido anti-horário) dos pontos P e C, respectivamente, em torno do ponto A. Então a reta $P'C'$ coincide com a reta CD (e B é levado em D):



Então $AP' = AP = 10$ e $P'\hat{A}Q = 60°$.

Seja $QE \perp AP'$ com E em AP'. Então , como $P'\hat{A}Q = 60°$, temos que $AE = \dfrac{AQ}{2} = 4$. Logo, $EP' = 6$. Segue do Teorema de Pitágoras aplicado ao $\triangle AQE$, que

$$QE^2 = AQ^2 - AE^2 = 8^2 - 4^2 = (8-4)(8+4) = 4 \cdot 12 = 48$$

Logo, $QE = 4\sqrt{3}$.

Portanto, a área de $\triangle PQ'A$ é igual a:

$$A_{\triangle P'QA} = \frac{AP' \cdot QE}{2} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao $\triangle P'QE$ temos:

$$P'Q^2 = EP'^2 - QE^2 = 6^2 + 48 = 84 \Rightarrow P'Q = 2\sqrt{21}.$$

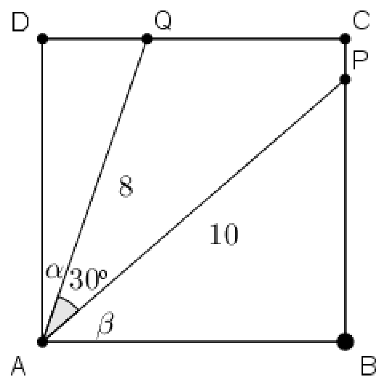
Usando o valor calculado da área do $\triangle P'QA$, temos

$$20\sqrt{3} = A_{\triangle P'QA} = \frac{P'Q \cdot AD}{2} = \frac{2\sqrt{21} \cdot AD}{2} = AD\sqrt{21}.$$

Logo,

$$AD = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{20 \cdot 3\sqrt{7}}{21} = \frac{20\sqrt{7}}{7} = AB.$$

Resolução 2: Sejam $D\hat{A}Q = \alpha$ e$P\hat{A}B = \beta$ e seja $AB = l$, o lado do quadrado $ABCD$.



Então

$$cos\alpha = \frac{l}{8}, cos\beta = \frac{l}{10} \text{ e } \alpha + \beta = 60°.$$

Segue que

$$cos(\alpha+\beta) = cos60° = \frac{1}{2} = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao $\triangle P'QE$ temos:

$$P'Q^2 = EP'^2 - QE^2 = 6^2 + 48 = 84 \Rightarrow P'Q = 2\sqrt{21}.$$

Usando o valor calculado da área do $\triangle P'QA$, temos

$$20\sqrt{3} = A_{\triangle P'QA} = \frac{P'Q \cdot AD}{2} = \frac{2\sqrt{21} \cdot AD}{2} = AD\sqrt{21}.$$

Logo,

$$AD = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{20 \cdot 3\sqrt{7}}{21} = \frac{20\sqrt{7}}{7} = AB.$$

Problema 5. Mostre que se $n = a \cdot b$, com $a, b \in \mathbb{N}^*$, então

$$(a!)^b \cdot (b!)^a \leqslant n!$$

e que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = n$ ou $b = n$.

Observação: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Resolução: Vamos escrever $n!$ da seguinte maneira:

$$n! = \underbrace{[1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (a-1) \cdot a]}_{parcela\ 1} \cdot \underbrace{[(a+1)(a+2)\cdots(2a-1)(2a)]}_{parcela\ 2} \cdots \underbrace{[((b-1)a+1)((b-1)a+2)\cdots((b-a)a+a-1)(ba)]}_{parcela\ b}.$$

Note que cada ima dessas parcelas é o produto do a fartores, e ainda que a parcela m, $1 \leq m \leq b$, pode ser escrita como:

$$\underbrace{[(ma-(a-1))]}_{termo\ 1} \cdot \underbrace{(ma-(a-2))}_{termo\ 2} \cdots \underbrace{(ma-1)}_{termo\ a-1} \cdot \underbrace{(ma)}_{termo\ a}$$

O k-ésimo termo, $1 \leq k \leq a$, da parcela m satisfaz

$$ma - (a-k) \geq ma - m(a-k) = mk \quad (*)$$

Portanto,

$$n! \geq (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 1 \cdot a) \cdot (2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot a) \cdots ((b-1) \cdot 1) \cdots (b-1) \cdot a) \cdot (b \cdot 1 \cdots b \cdot a) = (a!)^b \cdot (b!).$$

Agora note que a igualdade vale em $(*)$ se, e somente se, $m = 1$ ou $k = a$, ou seja, quando m ou k não podem assumir mais de um valor.

Logo, a igualdade na desigualdade pedida ocorre se, e somente se, $a = n$ ou $b = n$.