UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

XIX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

Resolução da prova – 2ª fase – Nível 2

06 de setembro de 2017

Problema 1. Encontre o resto da divisão de $\underbrace{111\cdots111}_{2016 \text{ algarismos}}$ por 7.

Resolução: A divisão por 7 permite apenas sete restos: 0 (divisão exata), 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Efetuando a divisão do número dado (pelo algoritmo), em algum dos passos da divisão um dos possíveis restos irá se repetir e então teremos um padrão de repetição dos restos. Note que:

$$\begin{array}{l|l}
111111\ldots1 & 7 \\ \cline{2-2}
41 & 15873 \\
\ \ 61 & \\
\ \ \ \ 51 & \\
\ \ \ \ \ \ 21 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 0\ldots &
\end{array}$$

Portanto, o número 111.111 é múltiplo de 7. Como o número dado é composto apenas pelos algarismos 1's colocados lado a lado, basta ver agora quantos "blocos" de seis algarismos 1 temos no número dado. Para isso dividimos 2016 por 6, já que existem 2016 algarismos 1 no número dado. Fazendo a divisão obtemos como quociente 336 e resto zero. Logo, o número $\underbrace{111...111}_{2016\ algarismos}$ é múltiplo de 7.

Resposta: O resto da divisão de $\underbrace{111...111}_{2016\ algarismos}$ por 7 é zero.

Problema 2. Ao final das Olimpíadas, Eliezer analisou o quadro de medalhas de três países, chamados aqui de A, B e C, e constatou as informações a seguir.

(1) Os países A, B e C conquistaram, juntos, 63 medalhas, sendo 21 medalhas de cada tipo.

(2) O número de medalhas de prata do país A é igual ao número de medalhas de prata do país B e também é igual ao número de medalhas de ouro do país B.

(3) O número de medalhas de bronze do país B é igual ao número de medalhas de prata do país C e também é igual à metade do número de medalhas de ouro do país A.

(4) O número de medalhas de bronze do país C é o triplo do seu número de medalhas de ouro.

(5) O país A ganhou 7 medalhas de ouro a mais que o país C.

Qual o número de medalhas de bronze que o país A conquistou?

Resolução: Denotando por O_X o número de medalhas de ouro do país X (X sendo A, B ou C), por P_X o número de medalhas de prata do país X e por B_X o número de medalhas de bronze do país X, os dados do problema permitem montar um sistema de 9 equações com 9 incógnitas:

De (1) temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} O_A + O_B + O_C = 21 \\ P_A + P_B + P_C = 21 \\ B_A + B_B + B_C = 21 \end{cases} . \tag{1}$$

De (2) temos que

$$P_A = P_B = O_B. \tag{2}$$

De (3) segue que

$$B_B = P_C = \frac{O_A}{2}. \tag{3}$$

Da informação (4) temos que

$$B_C = 3 \cdot O_C \tag{4}$$

e (5) nos diz que

$$O_A = O_C + 7. \tag{5}$$

Então, da segunda equação do sistema (1) e de (2) temos que

$$2 \cdot O_B + P_C = 21. \tag{6}$$

De (6) e (3), temos:

$$2 \cdot O_B + \frac{O_A}{2} = 21. \tag{7}$$

Da primeira equação do sistema (1) e (5) temos:

$$2 \cdot O_A + O_B = 28. \tag{8}$$

De (7) e (8) obtemos:

$$O_B = 8 \ \text{ e } \ O_A = 10. \tag{9}$$

De (2) e (9) obtemos:

$$P_A = 8 \ \text{ e } \ P_B = 8. \tag{10}$$

De (3) e (9) obtemos:

$$B_B = 5 \ \text{ e } \ P_C = 5. \tag{11}$$

De (10) e (9) obtemos:

$$O_C = 3. \tag{12}$$

De (4) e (12) obtemos:

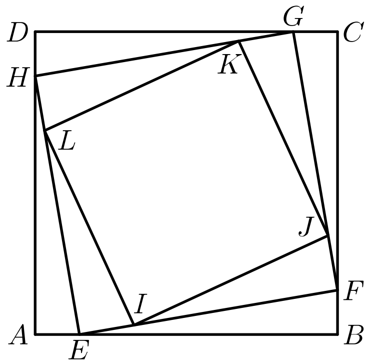
$$B_C = 9. \tag{13}$$

E finalmente, de (13) e (11) obtemos:

$$B_A = 7.$$

Resposta: O país A conquistou 7 medalhas de bronze.

Problema 3. Na figura abaixo, os quadriláteros $ABCD$, $EFGH$ e $IJKL$ são quadrados. Sabendo que $ABCD$ tem área 100 cm^2, $IJKL$ tem área 50 cm^2 e os triângulos EBF, FCG, GDH, HAE, IFJ, JGK, KHL e LEI têm todos a mesma área, calcule a medida do segmento KG.



Resolução: Temos que $A_{ABCD} = 100 \text{ cm}^2 = 1 \text{ dm}^2$. Logo, $AB = 1$ dm e também $A_{IJKL} = 50 \text{ cm}^2 = \dfrac{1}{2} \text{ dm}^2$, portanto $LI = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dm.

A área da cada um dos 8 triângulos de mesma área é igual a

$$A_{\triangle} = (A_{ABCD} - A_{IJKL}) \cdot \frac{1}{8} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \text{ dm}^2$$

e a área do quadrado $EFGH$ é igual a

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\triangle} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Como $EFGH$ é um quadrado, então $A_{EFGH} = EF \cdot GH = GH^2 = \frac{3}{4}$, portanto $GH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dm.

Note agora que os triângulos IFJ, JGK, KHL e LEI são congruentes (têm hipotenusas congruentes, lado do quadrado $IJKL$ e ângulos congruentes).

Então, sendo $KG = x$, teremos $HL = KG = x$ e $HK = HG - x = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$.

Portanto,

$$A_{\triangle} = \frac{HL \cdot HK}{2} = \frac{x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x - x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow 8x^2 - 4\sqrt{3}x + 1 = 0,$$

o que nos dá

$$x = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48 - 32}}{16} = \frac{4\sqrt{3} \pm 4}{16} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3} - 1}{4} \\ \\ \dfrac{\sqrt{3} + 1}{4} \end{cases}.$$

Como $KG < HK$, tomamos

$$KG = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \text{ dm} = \frac{5(\sqrt{3} - 1)}{2} \text{ cm}.$$

Resposta: KG mede $\frac{\sqrt{3} - 1}{4}$ dm ou $\frac{5(\sqrt{3} - 1)}{2}$ cm.

Problema 4. No planeta *Lobetuf*, os times de futebol são formados por quatro *lobetufenses*. Um grupo de 12 *lobetufenses* pretende formar três times de futebol. Três *lobetufenses* são goleiros e devem ficar em times separados. Outros três *lobetufenses* jogam muito bem e também devem ficar em times separados. De quantas formas é possível organizar os três times?

Resolução: Sejam G_1, G_2 e G_3 os goleiros. Iremos denominar cada time pelo seu respectivo goleiro, ou seja, nos referiremos ao times G_1, G_2 e G_3.
Vamos agora contar o número de maneiras que os três jogadores muito bons podem se distribuir pelos três times.

- 3 possibilidades para o time G_1.
- 2 possibilidades para o time G_2, visto que um jogador muito bom já foi escolhido para o time G_1.
- 1 possibilidade para o time G_3, visto que um jogador muito bom já foi escolhido para o time G_1 e outro para o time G_2.

Portanto, há $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras distintas de se escolher os jogadores muito bons.

Uma vez escolhidos os goleiros e jogadores muitos bons, perceba que nos restam contar os demais jogadores. Os 6 jogadores restantes podem se distribuir pelos 3 times da seguinte maneira:

- 6 possibilidades para uma posição e 5 possibilidades para a outra no time G_1.

Note que, seriam $6 \cdot 5 = 30$ possibilidades, mas ocorre que se o jogador A fica na primeira posição e o jogador B na segunda, é o mesmo que B na primeira e A na segunda. Portanto, há de fato $\frac{30}{2} = 15$ possibilidades de distribuição para o time G_1.

- 4 possibilidades para uma posição e 3 possibilidades para a outra no time G_2.

Totalizando, para o time G_2, $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ possibilidades. Ao prosseguirmos com o mesmo argumento, iremos concluir que existe apenas uma única possibilidade para o time G_3.

No total, há

$$6 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 540$$

formas de organizar os três times.

Resposta: É possível organizar os três times de 540 maneiras.

Problema 5. Mostre que 2016 não pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois números primos.

Resolução: Suponhamos que 2016 possa ser escrito como a soma dos quadrados de dois números primos, ou seja, suponha que existem números primos p e q , tais que

$$2016 = p^2 + q^2.$$

Veja que da equação acima segue que um dos primos, por exemplo p, não pode ser igual a 2, pois caso contrário

$$2016 = 2^2 + q^2 \Rightarrow q^2 = 2012,$$

e disto segue que q é par, o que não é possível porque só existe um número primo par, a saber 2.

Portanto, p e q são primos ímpares e seus quadrados só podem terminar em 1 ($1^2 = 1$ e $9^2 = 81$), 5 ($5^2 = 25$) e 9 ($3^2 = 9$ e $7^2 = 49$).

A única possibilidade para que a soma $p^2 + q^2$ dê 2016 (final 6), seria com p^2 final 1 e q^2 final 5. Porém, o quadrado de um primo com final 5 ocorre somente se esse primo for 5.

Dessa forma, suponha sem perda de generalidade que $q = 5$, então $2016 = p^2 + 25$, logo $p^2 = 1991 = 11 \cdot 181$, no entanto $11 \cdot 181$ não é um quadrado perfeito.

Logo, 2016 **NÃO** pode ser escrito como soma dos quadrados de dois primos.