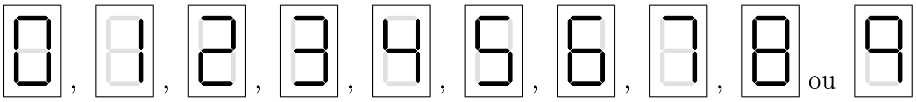
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

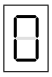
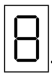
XIX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

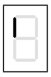
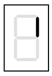
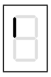
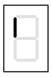
Resolução da prova – 2ª fase – Nível 1

06 de setembro de 2017

Problema 1. No elevador do prédio de José Luiz, existe um visor que indica em qual andar o elevador está. Se estivesse funcionando corretamente, o visor mostraria os números

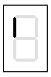
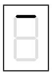
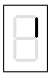
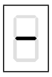
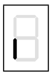
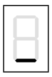
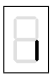


em que  representa o andar térreo e os outros números representam cada um dos 9 andares. Essas possibilidades são obtidas acendendo ou apagando cada um dos 7 segmentos que forma o . Porém, o visor está com defeito e pelo menos um dos 7 segmentos nunca acende.

(a) José Luiz entrou no elevador e observou o símbolo  no visor. A seguir, o elevador moveu-se um andar (não se sabe se subiu ou desceu um andar) e mostrou o símbolo  no visor. O elevador moveu-se um andar por mais duas vezes, mostrando os símbolos  e  em cada uma das vezes. Quais foram os andares pelos quais o elevador passou?

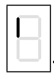
(b) Quais os segmentos do visor que estão com defeito?

Resolução: Para organizar a nossa explicação, vamos nomear cada um dos segmentos do número 8 que compõe o visor do elevador de José Luiz.

- O segmento aceso nesta figura  denominaremos de segmento 1;
- o segmento aceso nesta figura  de segmento 2;
- o segmento aceso nesta figura  de segmento 3;
- o segmento aceso nesta figura  de segmento 4;
- o segmento aceso nesta figura  de segmento 5;
- o segmento aceso nesta figura  de segmento 6;
- e o segmento aceso nesta figura  de segmento 7.

Também diremos que um *segmento está funcionando* quando este segmento liga e desliga corretamente. Além disso, quando dissermos que um *número tem um segmento acesso ou apagado*, estamos nos referindo a representação deste número no visor do elevador do prédio de José Luiz.

Local: PET Matemática – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas – Universidade Federal de Santa Catarina
Telefone: (48) 3721-4595 orm@pet.mtm.ufsc.br www.orm.mtm.ufsc.br

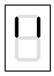
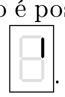
(a) Quando José Luiz entrou no elevador, ele estava em um andar, que foi indicado no visor como sendo o . Vamos começar analisando quais andares não podem ser este.

Note que este andar não pode ser:

1) o andar zero ou térreo, pois sabemos que o segmento 3 está funcionando, já que ele aparece aceso quando o elevador se move para o próximo andar, ou seja, se o andar de entrada de José Luiz fosse o zero, o segmento 3 também deveria estar aceso no visor, e não está;
2) o primeiro andar, pois o número 1 tem o segmento 1 apagado;
3) o segundo andar, pois o número 2 tem o segmento 1 apagado;
4) o terceiro andar, pois o número 3 tem o segmento 1 apagado;
5) o quarto andar, pois sabemos que o segmento 3 está funcionando e, se o andar de entrada de José Luiz fosse o quarto, o segmento 3 também deveria estar aceso no visor;
6) o sétimo andar, pois o número 7 tem o segmento 1 apagado;
7) o oitavo andar, pois sabemos que o segmento 3 está funcionando e, se o andar de entrada de José Luiz fosse o oitavo, o segmento 3 também deveria estar aceso no visor;
8) o nono andar, pois sabemos que o segmento 3 está funcionando e, se o andar de entrada de José Luiz fosse o nono, o segmento 3 também deveria estar aceso no visor.

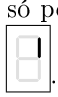
Sendo assim, a nossa conclusão é que os possíveis andares de entrada de José Luiz no elevador são o 5 e o 6.

Vamos analisar agora se o andar de entrada no elevador pode ser o 5.

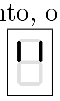
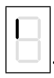
Neste caso, o próximo andar só pode ser 4 ou 6. No entanto, o quarto andar não é possível, pois o segmento 1 está funcionando e, portanto, o visor deveria estar mostrando  em vez de .

O andar 6 também não é possível, já que no número 6 o segmento 3 deve estar apagado e não aceso.

Conclusão 1: O andar de entrada de José Luiz no elevador foi o 6.

Sabendo que ele entrou no elevador no sexto andar, o próximo andar por onde o elevador passou só pode ser o 5 ou o 7. No entanto, o quinto andar não é possível, pois não faria acender o segmento 3 em .

Conclusão 2: O segundo andar que José Luiz passou foi o 7.

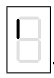
Agora, sabendo que o segundo andar que José Luiz passou foi o 7, o próximo andar que o elevador poderá ir só pode ser o 6 ou o 8. No entanto, o oitavo andar não é possível, pois como o segmento 3 está funcionando o visor deveria estar mostrando  em vez de .

Conclusão 3: O terceiro andar que José Luiz passou foi o 6.

Por fim, sabendo que o terceiro andar que José Luiz passou foi o 6, o próximo andar que o elevador poderá ir só pode ser o 5 ou o 7. No entanto, o sétimo andar não é possível, pois no 7 o segmento 1 não acende.

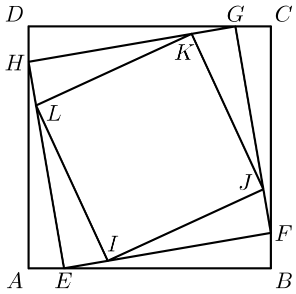
Conclusão 4: O quarto andar que José Luiz passou foi o 5.

Portanto, o elevador passou pelos seguintes andares nesta ordem: $6, 7, 6$ e 5.

(b) Pelo item (a) deste exercício, sabemos que, quando o elevador passou pelo andar 6, o visor mostrou . Logo, os segmentos $2, 4, 5, 6$ e 7 estão com defeito. Os segmentos 1 e 3 estão funcionando, pois, pelo item (a), sabemos que eles acenderam corretamente.

Portanto, os segmentos do visor que estão com defeito são os segmentos $2, 4, 5, 6$ e 7.

Problema 2. Na figura abaixo, o quadrado $ABCD$ tem área 100 cm^2, o quadrado $IJKL$ tem área 50 cm^2 e os triângulos $EBF, FCG, GDH, HAE, IFJ, JGK, KHL$ e LEI têm todos a mesma área. Calcule a área do quadrado $EFGH$.



Resolução: Note que a área de um dos triângulos $EBF, FCG, GDH, HAE, IFJ, JGK, KHL$ ou LEI (que são iguais) pode ser obtida da seguinte maneira: subtraímos a área do quadrado $IJKL$ da área do quadrado $ABCD$, e dividimos este valor por 8. Desta forma, se denotarmos por $A_\triangle$ a área de cada um dos triângulos $EBF, FCG, GDH, HAE, IFJ, JGK, KHL$ ou LEI, temos que

$$A_\triangle = \frac{100-50}{8} = \frac{50}{8} = \frac{25}{4}.$$

Agora, observe que a área do quadrado $EFGH$ pode ser obtida somando a área do quadrado $IJKL$ às áreas dos triângulos KHL, JGK, IFJ e LEI. Ou seja, se denotarmos por $A_\square$ a área do quadrado $EFGH$, temos que

$$A_\square = 50 + \left(4 \times \frac{25}{4}\right) = 50 + 25 = 75.$$

Portanto, a área do quadrado $EFGH$ é 75 cm^2.

Problema 3. Encontre o resto da divisão de $\underbrace{111\cdots111}_{\text{2016 algarismos}}$ por 7.

Resolução: Precisamos calcular o resto da divisão de $\underbrace{111\cdots111}_{\text{2016 algarismos}}$ por 7, como o número $\underbrace{111\cdots111}_{\text{2016 algarismos}}$ é muito grande, vamos analisar o que acontece quando dividimos um número parecido com ele, mas menor, por 7:

- 1 algarismo 1: $1 = 0 \times 7 + 1$;
- 2 algarismos 1: $1 = 1 \times 7 + 4$;
- 3 algarismos 1: $111 = 15 \times 7 + 6$;
- 4 algarismos 1: $1111 = 158 \times 7 + 5$;
- 5 algarismos 1: $11111 = 1587 \times 7 + 2$;
- 6 algarismos 1: $111111 = 15873 \times 7 + 0$, que é uma divisão exata!

Observe que ao continuar os cálculos, os restos vão se repetir:

- 7 algarismos 1: resto 1;
- 8 algarismos 1: resto 4;
- 9 algarismos 1: resto 6;
- 10 algarismos 1: resto 5;
- 11 algarismos 1: resto 2;
- 12 algarismos 1: resto zero.

Ou seja, os restos se repetem a cada 6 algarismos 1. Como 2016 é múltiplo de 6, pois $2016 = 336 \times 6$, temos 336 "blocos" de 6 algarismos 1 e o resto, portanto, é zero.

Problema 4. Carmem comprou 10 vacas e 20 cabras juntamente com ração para alimentar todos estes animais por exatamente 60 dias. Um quilo de ração para cabra custa o mesmo que $\frac{1}{5}$ de um quilo de ração para vaca. Uma vaca come 40 quilos de ração por dia, enquanto uma cabra come 10 quilos de ração por dia. Após alimentar os animais por 10 dias, Carmem vendeu duas vacas e trocou a ração que estas duas vacas comeriam (nos próximos 50 dias) por ração para cabra. Passando-se mais 20 dias, Carmem comprou 30 cabras. A partir desta data, por quantos dias Carmem conseguirá alimentar todas as cabras?

Resolução: Resolução 1: Foram comprados $10 \times 40 \times 60 = 24000$ kg de ração para vacas e $20 \times 10 \times 60 = 12000$ kg de ração para cabras, que seriam suficientes para 60 dias.

A ração de vacas que foi trocada corresponde a $2 \times 40 \times 50 = 4000$ kg. Como a ração de cabras é mais barata e vale um quinto de quilo de ração para vacas, a quantidade de ração de cabras correspondente é $4000 \times 5 = 20000$ kg de ração a mais para as cabras.

Passando-se mais 20 dias, foram compradas 30 cabras, o que significa que nos próximos 30 dias (que completaria os 60 dias de ração suficiente), há 50 cabras para alimentar; 20 delas já têm ração, e as outras 30 precisam de $30 \times 10 \times 30 = 9000$ kg da ração extra.

Sobram, então, após os 60 dias, $20000 - 9000 = 11000$ kg de ração para alimentar 50 cabras. Como cada cabra come 10 kg por dia, 50 cabras comem $50 \times 10 = 500$ kg por dia.

Assim, tem-se $11000 \div 500 = 22$ dias para alimentar todas as cabras, após os 60 dias iniciais.

Portanto, a partir do dia em que as 30 cabras foram compradas, temos que a ração será suficiente para $30 + 22 = \mathbf{52}$ dias.

Resolução 2 (cálculos feitos a partir de 30 dias): Foram comprados $20 \times 10 \times 60 = 12000$ kg de ração para cabras, que seriam suficientes para 60 dias.

Nos primeiros 30 dias as cabras consomem $20 \times 30 \times 10 = 6000$ kg, e sobram outros 6000 kg.

A ração de vacas que foi trocada corresponde a $2 \times 40 \times 50 = 4000$ kg; como a ração de cabras é mais barata e vale um quinto de quilo de ração para vacas, a quantidade de ração de cabras correspondente é $4000 \times 5 = 20000$ kg de ração a mais para as cabras.

Então, após 30 dias (e 20 cabras), sobram $6000 + 20000 = 26000$ kg de ração para cabras.

A partir daí, é necessário alimentar 50 cabras, que comem $50 \times 10 = 500$ kg de ração por dia. Portanto, temos que a ração será suficiente para $26000 \div 500 = \mathbf{52}$ dias.

Problema 5. Ao final das Olimpíadas, Eliezer analisou o quadro de medalhas de três países, chamados aqui de A, B e C, e constatou as informações a seguir.

(1) Os países A, B e C conquistaram, juntos, 63 medalhas, sendo 21 medalhas de cada tipo.

(2) O número de medalhas de prata do país A é igual ao número de medalhas de prata do país B e também é igual ao número de medalhas de ouro do país B.

(3) O número de medalhas de bronze do país B é igual ao número de medalhas de prata do país C e também é igual à metade do número de medalhas de ouro do país A.

(4) O número de medalhas de bronze do país C é o triplo do seu número de medalhas de ouro.

(5) O país A ganhou 7 medalhas de ouro a mais que o país C.

Qual o número de medalhas de bronze que o país A conquistou?

Resolução: Vamos organizar todas as informações presentes no enunciado em um quadro, mas para isto vamos precisar usar alguns símbolos para denotar as quantidades desconhecidas.

Denote por $\triangle$ o número de medalhas de prata do país A, por $\Box$ o número de medalhas de bronze do país B e por $\heartsuit$ o número de medalhas de ouro do país C. Agora, vamos analisar algumas das informações usando estes símbolos:

- O número de medalhas de prata do país A, que é $\triangle$, é igual ao número de medalhas de prata do país B. Então, número de medalhas de prata do país B também é $\triangle$. Além disso, como o número de medalhas de prata do país A também é igual ao número de medalhas de ouro do país B, temos que o número de medalhas de ouro do país B também é $\triangle$.
- O número de medalhas de bronze do país B, que é $\Box$, é igual ao número de medalhas de prata do país C. Assim, o número de medalhas de prata do país C também é $\Box$. Além disso, como o número de medalhas de bronze do país B também é igual à metade do número de medalhas de ouro do país A, temos que o número de medalhas de ouro do país A será $2 \times \Box$.

- O número de medalhas de bronze do país C é o triplo do seu número de medalhas de ouro. Como o número de medalhas de ouro do país C é $\heartsuit$, então o número de medalhas de bronze do país C é $3 \times \heartsuit$.

Desta forma, temos o seguinte quadro:

País	Ouro	Prata	Bronze	Total de medalhas
A	$2 \times \square$	$\triangle$	?	
B	$\triangle$	$\triangle$	$\square$	
C	$\heartsuit$	$\square$	$3 \times \heartsuit$	
Total de medalhas	21	21	21	63

Perceba que temos uma informação que ainda não foi utilizada, que o país A ganhou 7 medalhas de ouro a mais que o país C. Isto significa que o número de medalhas de ouro do país A, que é igual a $2 \times \square$, é igual ao número de medalhas de ouro do país C, que é $\heartsuit$, mais 7, ou seja:

$$2 \times \square = \heartsuit + 7.$$

Dessa última informação, podemos concluir que o valor de $2 \times \square$ é no mínimo 7, pois o menor valor possível para $\heartsuit$ é zero.

Assim, $\square$ deve ser um número (natural) maior ou igual a 4, pois:

$$2 \times 0 = 0 \neq 7, \quad 2 \times 1 = 2 \neq 7, \quad 2 \times 2 = 4 \neq 7, \quad 2 \times 3 = 6 \neq 7 \quad \text{e} \quad 2 \times 4 = 8 > 7.$$

No entanto, veja que $\square$ não pode ser igual a 4, já que da terceira coluna do quadro acima temos que $\triangle + \triangle + \square = 21$. Logo, se $\square = 4$, então $2 \times \triangle = 17$, o que não ocorre pois 17 é ímpar.

Vamos analisar se é possível termos $\square = 5$. Da terceira coluna do quadro acima temos que $\triangle + \triangle + \square = 21$, e, como estamos supondo que $\square = 5$, temos que $2 \times \triangle = 16$. Sendo assim, $\triangle = 8$.

Vamos colocar todas estas informações no quadro.

País	Ouro	Prata	Bronze	Total de medalhas
A	10	8	?	
B	8	8	5	
C	$\heartsuit$	5	$3 \times \heartsuit$	
Total de medalhas	21	21	21	63

Deste modo, pelas informações da segunda coluna, temos que $10 + 8 + \heartsuit = 21$. Logo, $\heartsuit = 3$ e com isto conseguiremos completar mais algumas informações do quadro.

País	Ouro	Prata	Bronze	Total de medalhas
A	10	8	?	
B	8	8	5	
C	3	5	9	
Total de medalhas	21	21	21	63

Agora, veja que da última coluna do quadro temos que $? + 5 + 9 = 21$, logo $? = 7$. Como as informações encontradas no quadro são compatíveis com todas as informações dadas, temos que o número de medalhas de bronze do país A é 7.

Uma pergunta interessante é se este valor encontrado é único, e é. Já vimos que o menor valor possível para $\square$ é 5, e disto segue que o maior valor possível para $\triangle$ é 8. Se $\triangle$ for qualquer valor entre zero e 7, inclusive zero e 7, então, pela terceira coluna do primeiro quadro, $\square$ deveria ser maior do que 5.

Também temos da quarta coluna do nosso primeiro quadro que o valor máximo para o $\heartsuit$ é 7, já que a soma dos valores de uma coluna deve ser igual a 21. Assim, da equação

$$2 \times \square = \heartsuit + 7$$

temos que $2 \times \square$ é no máximo 14, ou seja, $\square$ é no máximo 7.

Portanto, temos que nos certificar que $\square$ não pode ser igual a 6 ou 7. Vamos analisar cada uma destas possibilidades:

- $\square = 6$: da terceira coluna do primeiro quadro teríamos que $\triangle + \triangle + 6 = 21$, ou seja, $2 \times \triangle = 15$, o que nunca ocorre, pois 15 é ímpar. Portanto, $\square$ não pode ser igual a 6.

- $\square = 7$: da terceira coluna do primeiro quadro teríamos que $\triangle + \triangle + 7 = 21$, ou seja, $2 \times \triangle = 14$ e, portanto, $\triangle = 7$. Agora, usando a segunda coluna do nosso primeiro quadro e os fatos que $\square = 7$ e $\triangle = 7$, concluímos que $\heartsuit = 0$. No entanto, isto contradiz a equação

$$2 \times \square = \heartsuit + 7,$$

  pois teríamos que 14 é igual a 7.

Assim, o único valor possível para $\square$ é 5.
Portanto, o número de medalhas de bronze do país A é 7.