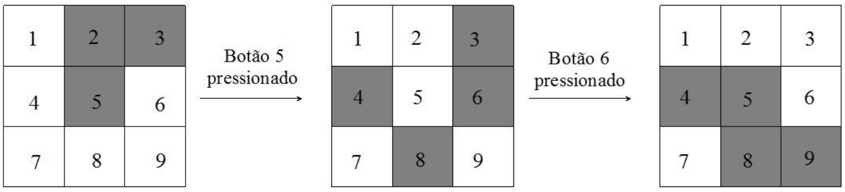
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XVIII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Prova – 2 ª fase de 2015
Nível 3

Problema 1. O jogo das luzes é composto por um tabuleiro 3×3 com nove botões numerados de 1 a 9 que podem estar acesos ou apagados. O único movimento permitido no jogo é apertar um botão aceso. Toda vez que um movimento é realizado, o botão que foi apertado apaga e os botões que possuem algum lado comum com o botão apertado se invertem, isto é, os acesos se apagam e os apagados se acendem. Por exemplo, na figura abaixo (em que os botões acesos são os que estão sombreados) foram efetuados dois movimentos:



O jogo termina quando todos os botões são apagados. Mostre que é possível terminar o jogo partindo de qualquer configuração do tabuleiro em que apenas um botão está aceso.

Problema 2. Determine o algarismo das unidades do número $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 2013^5 + 2014^5 + 2015^5$.

Problema 3. Se x é um número real, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 4,12 \rfloor = 4$, $\lfloor -3,5 \rfloor = -4$ e $\lfloor 10 \rfloor = 10$. Considere a função f, definida para todo número inteiro $n \geq 1$, dada por

$$f(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

(a) Mostre que, para todo inteiro $k \geq 0$, o número $3k + 2$ não pertence ao conjunto imagem de f.

(b) Mostre que, se m e n são números inteiros maiores que 0 tais que $f(m) = f(n)$, então $m = n$.

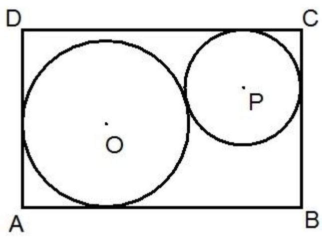
Problema 4. Um retângulo $ABCD$ é denominado *bicircular* se existem duas circunferências de centro O e P, contidas nesse retângulo, satisfazendo as seguintes condições:

(i) A circunferência de centro O é tangente aos lados AB e AD do retângulo.

(ii) A circunferência de centro P é tangente aos lados BC e CD do retângulo.

(iii) As duas circunferências são tangentes entre si.

Um exemplo de retângulo bicircular é mostrado na figura abaixo.



(a) Mostre que, para uma retângulo bicircular dado, a soma dos raios de duas circunferências satisfazendo as condições acima é constante, independente da escolha das circunferências.

(b) Nas condições do enunciado, mostre que se os pontos A, O, P e C forem colineares, então $ABCD$ é um quadrado.

Problema 5. Sejam n e k números naturais, com $k \leq n$, e seja X um conjunto com n elementos. Escolhendo aleatoriamente dois subconjuntos A e B de X, calcule a probabilidade de a intersecção entre A e B possuir k elementos.