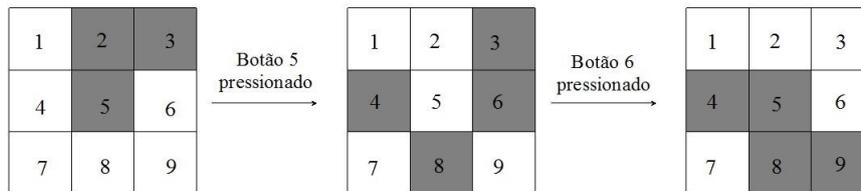


**Prova – 2<sup>a</sup> fase de 2015**  
**Nível 2**

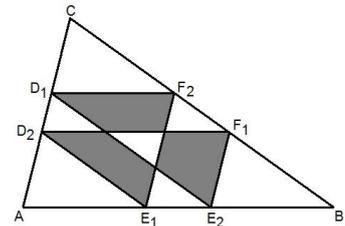
**Problema 1.** O jogo das luzes é composto por um tabuleiro  $3 \times 3$  com nove botões numerados de 1 a 9 que podem estar acesos ou apagados. O único movimento permitido no jogo é apertar um botão aceso. Toda vez que um movimento é realizado, o botão que foi apertado apaga e os botões que possuem algum lado comum com o botão apertado se invertem, isto é, os acesos se apagam e os apagados se acendem. Por exemplo, na figura abaixo (em que os botões acesos são os que estão sombreados) foram efetuados dois movimentos:



O jogo termina quando todos os botões são apagados.

- Partindo de um tabuleiro em que apenas o botão 5 está aceso, encontre uma sequência de movimentos para terminar o jogo.
- Mostre que é possível terminar o jogo partindo de qualquer tabuleiro em que apenas um botão está aceso.

**Problema 2.** Na figura ao lado,  $ABC$  é um triângulo de área  $25\text{cm}^2$ . Sabe-se que os segmentos  $AD_2$  e  $CD_1$  possuem o dobro do comprimento do segmento  $D_1D_2$ . Da mesma forma,  $CF_2 = BF_1 = 2 \cdot F_1F_2$  e  $AE_1 = BE_2 = 2 \cdot E_1E_2$ . Com isso, cada segmento desenhado na figura que está no interior do triângulo  $ABC$  é paralelo a algum dos lados do triângulo  $ABC$  (por exemplo,  $D_1E_2$  é paralelo a  $BC$ ). Calcule a área sombreada.



**Problema 3.** Considere os números de três algarismos não nulos  $xyz$ ,  $yzx$  e  $zxy$ . Mostre que a soma

$$S = xyz + yzx + zxy$$

é sempre um múltiplo de 37.

*Observação:* Note que, no número  $abc$ ,  $a$  é o algarismo das centenas,  $b$  é o algarismo das dezenas e  $c$  é o algarismo das unidades.

**Problema 4.** A pedido de sua mãe, Ayrton deve ir ao mercado para comprar apenas produtos de limpeza, cujos preços são descritos na tabela abaixo:

Produto A	Produto B	Produto C	Produto D	Produto E	Produto F
R\$ 1,30	R\$ 3,80	R\$ 5,90	R\$ 7,10	R\$ 8,90	R\$ 12,90

A mãe lhe deu R\$ 20,00 e pediu para ele comprar pelo menos três produtos, com nenhum repetido. Como recompensa, ela dará ao Ayrton o menor valor entre o troco e 10% do valor gasto nos produtos de limpeza.

Por exemplo, se ele comprar R\$ 15,00 em produtos, ele ganhará R\$ 1,50 de recompensa. Se comprar R\$ 19,00 em produtos, ganhará R\$ 1,00.

Que produtos da tabela acima Ayrton deve comprar para ganhar a maior recompensa possível?

**Problema 5.**

- Mostre que, para qualquer número natural  $n$ , os números  $n$  e  $n^5$  têm o mesmo algarismo das unidades.
- Determine o algarismo das unidades do número

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 2013^5 + 2014^5 + 2015^5.$$