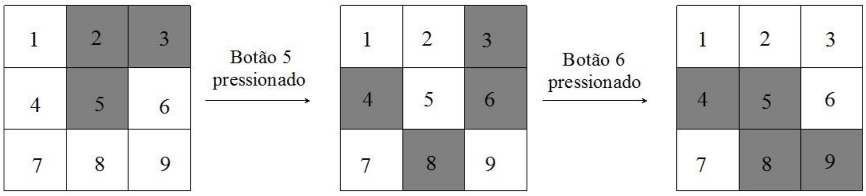
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XVIII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

Resolução – 2ª fase – 2015
Nível 3

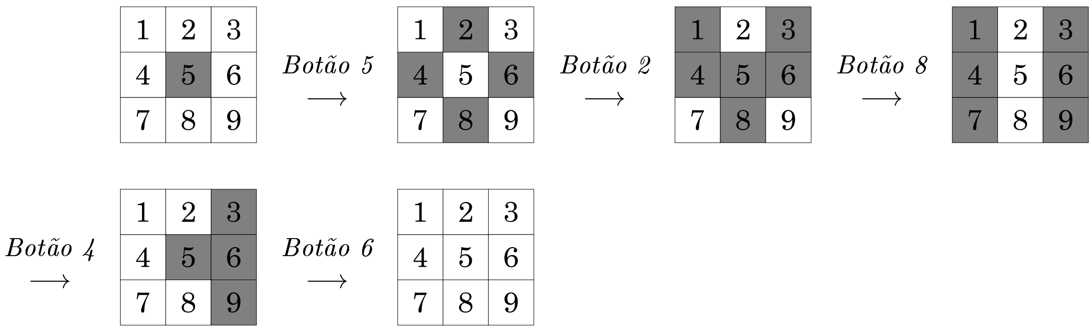
Problema 1. O jogo das luzes é composto por um tabuleiro 3×3 com nove botões numerados de 1 a 9 que podem estar acesos ou apagados. O único movimento permitido no jogo é apertar um botão aceso. Toda vez que um movimento é realizado, o botão que foi apertado apaga e os botões que possuem algum lado comum com o botão apertado se invertem, isto é, os acesos se apagam e os apagados se acendem. Por exemplo, na figura abaixo (em que os botões acesos são os que estão sombreados) foram efetuados dois movimentos:



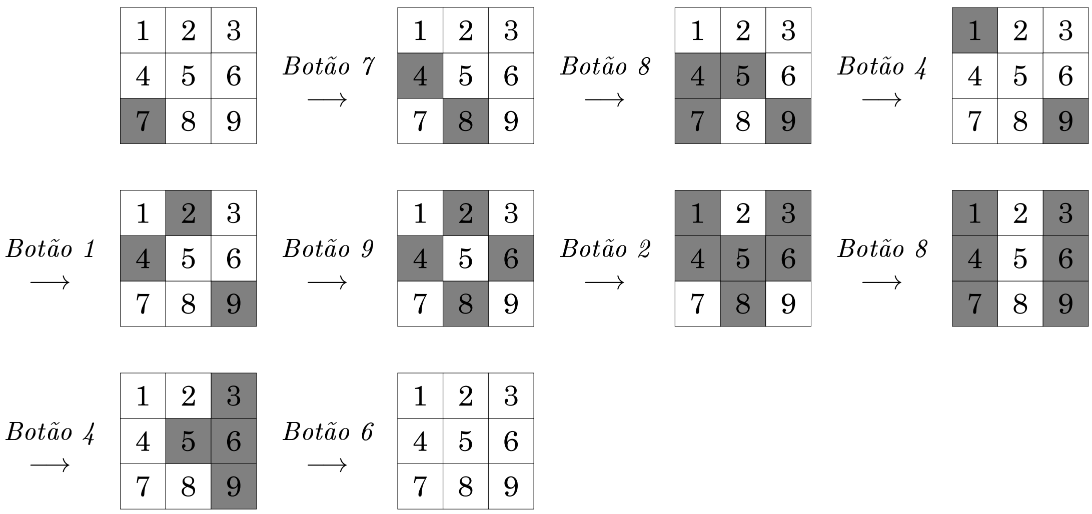
O jogo termina quando todos os botões são apagados. Mostre que é possível terminar o jogo partindo de qualquer configuração do tabuleiro em que apenas um botão está aceso.

Resolução: Observe que pela simetria do tabuleiro precisamos analisar somente 3 casos:

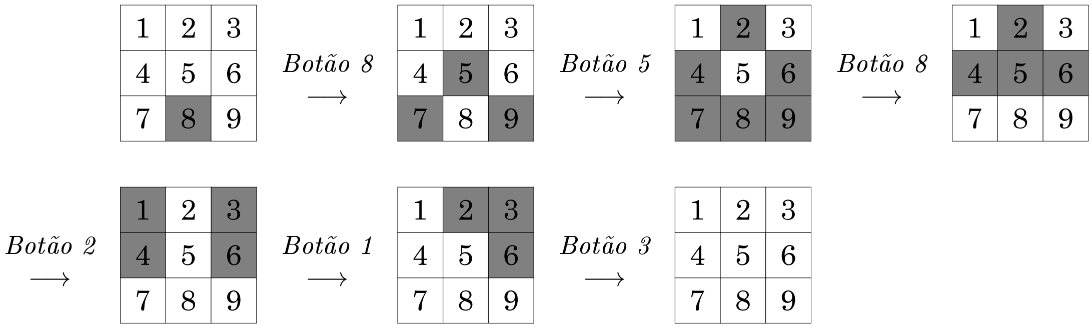
- **Caso 1:** Botão 5 aceso. Neste caso podemos apertar os seguintes botões, nesta mesma sequência: 5, 2, 8, 4 e 6.



- **Caso 2:** Botão 7 aceso (que é a mesma análise de quando os botões acesos são o $1, 3$ ou 9). Neste caso, apertamos nesta ordem, os botões $7, 8, 4, 1, 9, 2, 8, 4$ e 6.



- **Caso 3:** Botão 8 aceso (que é a mesma análise de quando os botões acesos são o 2, 4 ou 6). Neste caso, apertamos os botões $8, 5, 8, 2, 1$ e 3.



Problema 2. Determine o algarismo das unidades do número $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 2013^5 + 2014^5 + 2015^5$.

Resolução: Note que para quaisquer números naturais n e m temos que

$$n^5 + m^5 = (n+m)(n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4). \tag{1}$$

Agora considere as somas $(1^5 + 2014^5), (2^5 + 2013^5), \ldots, (1007^5 + 1008^5)$ e observe que, de (1), todas elas são múltiplas de 2015, já que $1 + 2014 = 2015, 2 + 2013 = 2015, \ldots, 1007 + 1008 = 2015$ e, portanto, todas são múltiplas de 5.

Agora, se $n+m = 2015$, então um dos números n e m deve ser par e o outro deve ser ímpar. Vamos analisar cada um dos possíveis casos.

- **Caso 1:** n é par e m é ímpar.

  Se n é par, então $n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3$ também será par e como m é ímpar, m^4 será ímpar. Logo, $n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4$ é ímpar, donde segue que o produto $(n+m)(n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4)$ é ímpar e, portanto, o algarismo das unidades de $n^5 + m^5$ é 5.

- **Caso 2:** n é ímpar e m é par.

  Se m é par, então $-n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4$ também será par e como n é ímpar, n^4 será ímpar. Logo, $n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4$ é ímpar, donde segue que o produto $(n+m)(n^4 - n^3m + n^2m^2 - nm^3 + m^4)$ é ímpar e, portanto, o algarismo das unidades de $n^5 + m^5$ é 5.

Por fim, observe que temos $\dfrac{2014}{2} = 1007$ pares de somas do tipo n^5+m^5 em $1^5+2^5+3^5+\cdots+2013^5+2014^5$, então $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 2013^5 + 2014^5$ tem algarismo das unidades igual a 5 e, portanto,

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 2013^5 + 2014^5 + 2015^5$$

tem algarismo das unidades igual a 0.

Problema 3. Se x é um número real, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 4,12 \rfloor = 4$, $\lfloor -3,5 \rfloor = -4$ e $\lfloor 10 \rfloor = 10$. Considere a função f, definida para todo número inteiro $n \geq 1$, dada por

$$f(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

(a) Mostre que, para todo inteiro $k \geq 0$, o número $3k + 2$ não pertence ao conjunto imagem de f.

(b) Mostre que, se m e n são números inteiros maiores que 0 tais que $f(m) = f(n)$, então $m = n$.

Resolução:

(a) Seja n um número inteiro maior ou igual a 1 qualquer, então pelo algoritmo da divisão euclidiana sabemos que existe um único número inteiro k de modo que $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$. Observe que o fato de n ser um número inteiro maior ou igual a 1 implica em k ser um número inteiro maior ou igual a zero. Agora vamos analisar as duas possibilidades:

  - **Caso 1:** Se $n = 2k$, então

$$f(n) = f(2k) = 2k + \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = 2k + k = 3k.$$

- **Caso 2:** Se $n = 2k+1$, então

$$f(n) = f(2k+1) = 2k+1+\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = 2k+1+\left\lfloor k+\frac{1}{2} \right\rfloor = 2k+1+k = 3k+1.$$

Logo, para todo inteiro $k \geq 0$, o número $3k+2$ não pertence ao conjunto imagem de f.

(b) Sejam m e n números inteiros maiores que 0 tais que $f(m) = f(n)$. Precisamos mostrar que $m = n$.

Sabemos do algoritmo da divisão euclidiana que existem únicos números inteiros q e r de modo que:

(a) $m = 2q$ ou $m = 2q+1$ e
(b) $n = 2r$ ou $n = 2r+1$.

Agora vamos analisar cada uma destas possibilidades:

- **Caso 1:** Se $m = 2q$ e $n = 2r$, então temos que

$$f(n) = f(m) \Rightarrow 2q + \left\lfloor \frac{2q}{2} \right\rfloor = 2r + \left\lfloor \frac{2r}{2} \right\rfloor \Rightarrow 2q+q = 2r+r \Rightarrow 3q = 3r \Rightarrow q = r \Rightarrow m = n.$$

- **Caso 2:** Se $m = 2q$ e $n = 2r+1$, então temos que

$$\begin{aligned} f(n) = f(m) \quad &\Rightarrow \quad 2q + \left\lfloor \frac{2q}{2} \right\rfloor = 2r+1+\left\lfloor \frac{2r+1}{2} \right\rfloor \Rightarrow 2q+q = 2r+1+r \\ &\Rightarrow \quad 3q = 3r+1 \Rightarrow 3(q-r) = 1, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois 3 não divide 1.

Portanto, se $m = 2q$ e $n = 2r+1$, então não é possível que $f(m)$ seja igual a $f(n)$.

- **Caso 3:** Se $m = 2q+1$ e $n = 2r$, note que a conclusão será a mesma que no caso 2.
- **Caso 4:** Se $m = 2q+1$ e $n = 2r+1$, então temos que

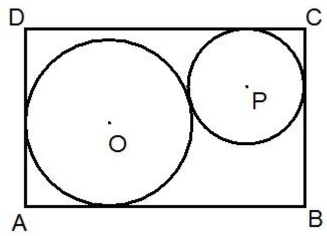
$$\begin{aligned} f(n) = f(m) \quad &\Rightarrow \quad 2q+1+\left\lfloor \frac{2q+1}{2} \right\rfloor = 2r+1+\left\lfloor \frac{2r+1}{2} \right\rfloor \Rightarrow 2q+1+q = 2r+1+r \\ &\Rightarrow \quad 3q+1 = 3r+1 \Rightarrow q = r \Rightarrow m = n. \end{aligned}$$

Portanto, se m e n são números inteiros maiores que 0 tais que $f(m) = f(n)$, então $m = n$.

Problema 4. Um retângulo $ABCD$ é denominado *bicircular* se existem duas circunferências de centro O e P, contidas nesse retângulo, satisfazendo as seguintes condições:

(i) A circunferência de centro O é tangente aos lados AB e AD do retângulo.
(ii) A circunferência de centro P é tangente aos lados BC e CD do retângulo.
(iii) As duas circunferências são tangentes entre si.

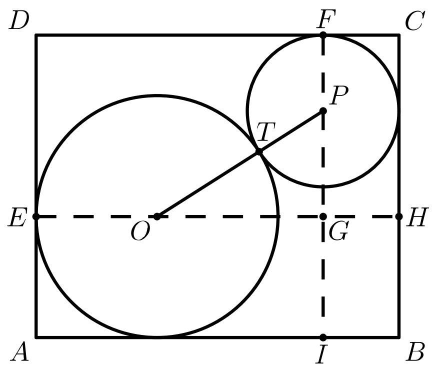
Um exemplo de retângulo bicircular é mostrado na figura abaixo.



(a) Mostre que, para uma retângulo bicircular dado, a soma dos raios de duas circunferências satisfazendo as condições acima é constante, independente da escolha das circunferências.
(b) Nas condições do enunciado, mostre que se os pontos A, O, P e C forem colineares, então $ABCD$ é um quadrado.

Resolução:

(a) Sejam $AB = a$, $BC = b$, R o raio da circunferência de centro O e r o raio da circunferência de centro P. Observe que os pontos O, P e T (ponto de tangência das duas circunferências) são colineares. Além disso, $OT = R$ e $PT = r$.



Se E é o ponto de tangência da circunferência de centro O com o lado AD, e se F é o ponto de tangência da circunferência de centro P com o lado CD, então a reta OE é perpendicular ao lado AD e a reta FP é perpendicular ao lado CD. Assim, essas duas retas são perpendiculares entre si cruzando-se no ponto G.

Agora note que

$$OG = EH - OE - GH = a - R - r = a - (R + r),$$

e

$$PG = FI - FP - GI = b - r - R = b - (R + r).$$

Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo $\triangle OGP$, temos:

$$OP^2 = OG^2 + PG^2 \Rightarrow (R + r)^2 = [a - (R + r)]^2 + [b - (R + r)]^2.$$

Resolvendo esta equação em $R + r$ obtemos:

$$R + r = (a + b) \pm \sqrt{2ab},$$

que depende somente de a e b e, portanto, é constante.

Observação: $R + r = (a + b) + \sqrt{2ab}$ não é uma solução possível, já que este valor é maior que o tamanho da diagonal do retângulo.

(b) Se A, O, P e C são colineares, então temos que $P\widehat{O}G = C\widehat{A}B$. Assim,

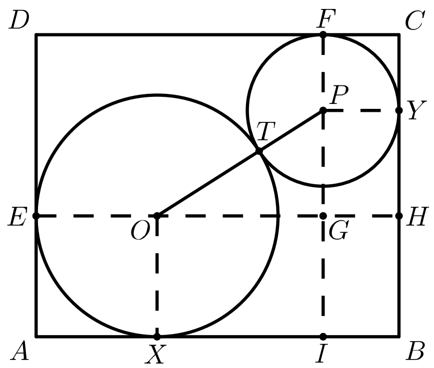
$$\frac{PG}{OG} = \frac{BC}{AB} = \frac{b}{a},$$

ou seja, $\dfrac{b - S}{a - S} = \dfrac{b}{a}$, onde $S = R + r$. Isso nos dá

$$ab - aS = ab - bS,$$

ou seja, $a = b$. Logo, $ABCD$ é um quadrado.

Solução alternativa para o item (b):



Note que $AEOX$ e $PFCY$ são quadrados, logo os ângulos $O\hat{A}X$ e $C\hat{P}Y$ medem $45°$. Como A, O, P e C são colineares, segue que $P\hat{O}G$ também mede $45°$. Assim, AC é a diagonal de um retângulo que forma com a base um ângulo de $45°$, portanto $1 = \text{tg}(45°) = \dfrac{\text{BC}}{\text{AB}}$, donde segue que $AB = BC$ e, portanto, $ABCD$ é um quadrado.

Problema 5. Sejam n e k números naturais, com $k \leq n$, e seja X um conjunto com n elementos. Escolhendo aleatoriamente dois subconjuntos A e B de X, calcule a probabilidade de a intersecção entre A e B possuir k elementos.

Resolução: Observe que há 2^n possibilidades de escolha para o conjunto A, assim como para a escolha do conjunto B. Logo, há $2^n \cdot 2^n = 4^n$ possibilidades de escolha para o par (A, B).

Contemos, agora, quantas destas escolhas satisfazem a condição que o número de elementos de A intersecção B é k.

Há $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher k elementos de X. Fixe uma dessas escolhas. O número de formas de escolher (A, B) de modo que a intersecção entre eles seja exatamente essa escolha fixada é 3^{n-k}. De fato, para os k elementos fixados, obrigatoriamente todos devem pertencer a A e B. Para os outros $n-k$ elementos de X, para que tais elementos não estejam na intersecção de A e B, devemos ter que cada um desses elementos:

i) pertence a A e não pertence a B ou,

ii) não pertence a A e pertence a B ou,

iii) não pertence a A e não pertence a B.

Portanto, para cada um dos $n-k$ elementos de X que não pertencem a intersecção de A e B temos três possibilidades, resultando num total de 3^{n-k} possibilidades.

Por fim, concluímos que o número de escolhas tais que o número de elementos da intersecção de A e B é k é $\binom{n}{k} \cdot 3^{n-k}$. Lembrando que a probabilidade de um evento A ocorrer é dada pela razão entre o números de casos favoráveis a A e o número total de casos, temos que a probabilidade pedida é

$$\frac{\binom{n}{k} \cdot 3^{n-k}}{4^n}.$$