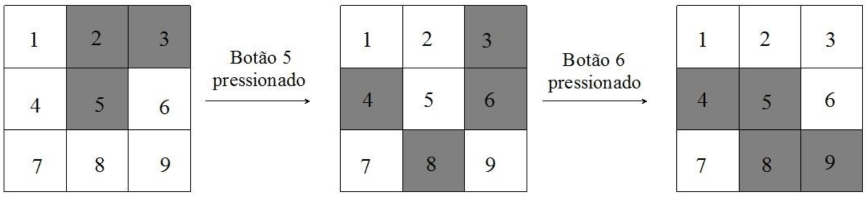
Resolução – 2ª fase – 2015
Nível 2

Problema 1. O jogo das luzes é composto por um tabuleiro 3×3 com nove botões numerados de 1 a 9 que podem estar acesos ou apagados. O único movimento permitido no jogo é apertar um botão aceso. Toda vez que um movimento é realizado, o botão que foi apertado apaga e os botões que possuem algum lado comum com o botão apertado se invertem, isto é, os acesos se apagam e os apagados se acendem. Por exemplo, na figura abaixo (em que os botões acesos são os que estão sombreados) foram efetuados dois movimentos:



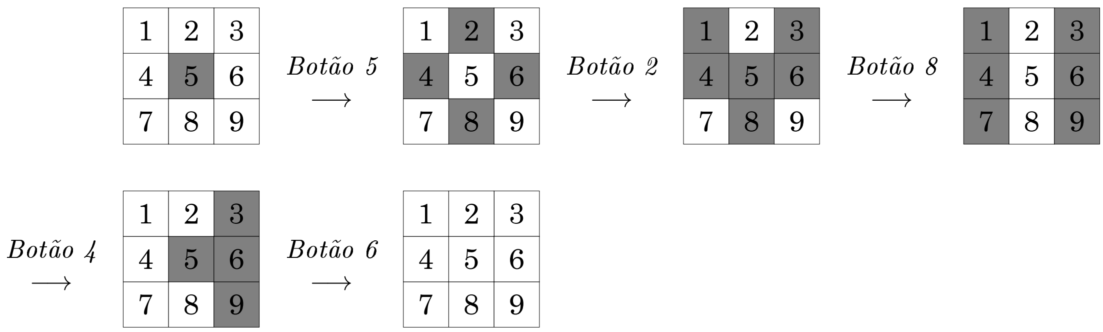
O jogo termina quando todos os botões são apagados.

a) Partindo de um tabuleiro em que apenas o botão 5 está aceso, encontre uma sequência de movimentos para terminar o jogo.

b) Mostre que é possível terminar o jogo partindo de qualquer tabuleiro em que apenas um botão está aceso.

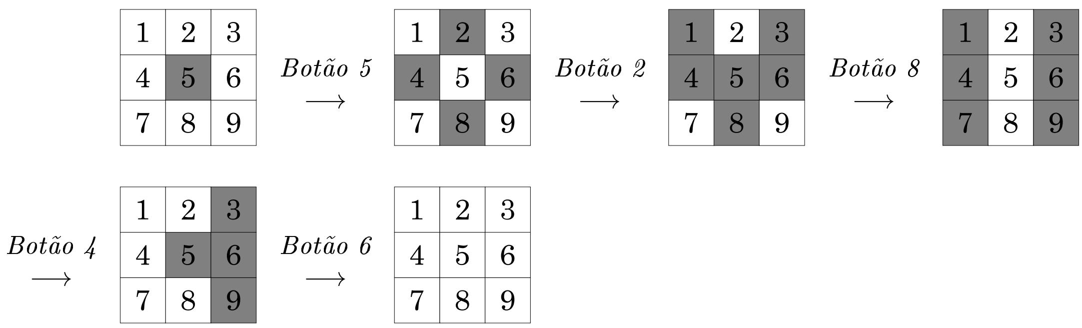
Resolução:

a) Uma forma de terminar o jogo é apertar os seguintes botões, nesta mesma sequência: 5, 2, 8, 4 e 6.

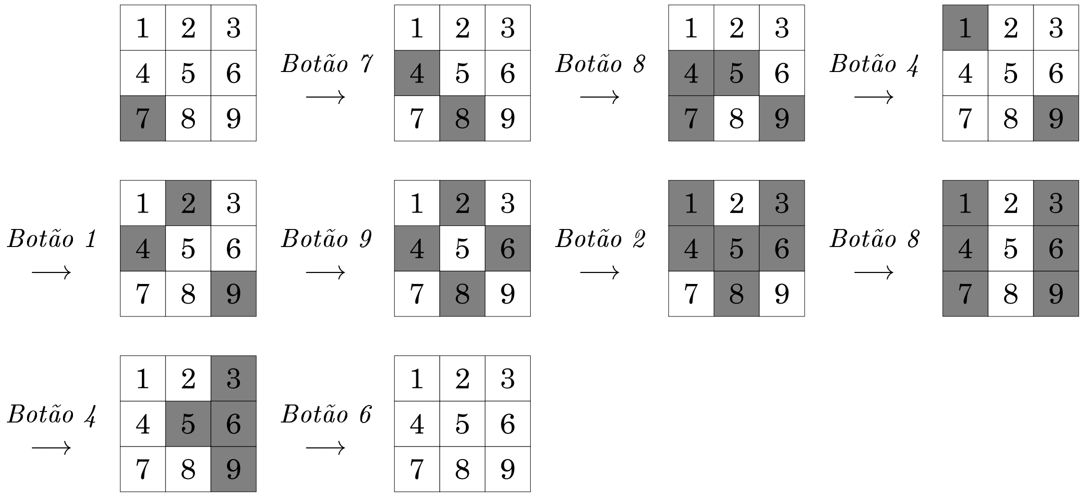


b) Observe que pela simetria do tabuleiro precisamos analisar somente 3 casos:

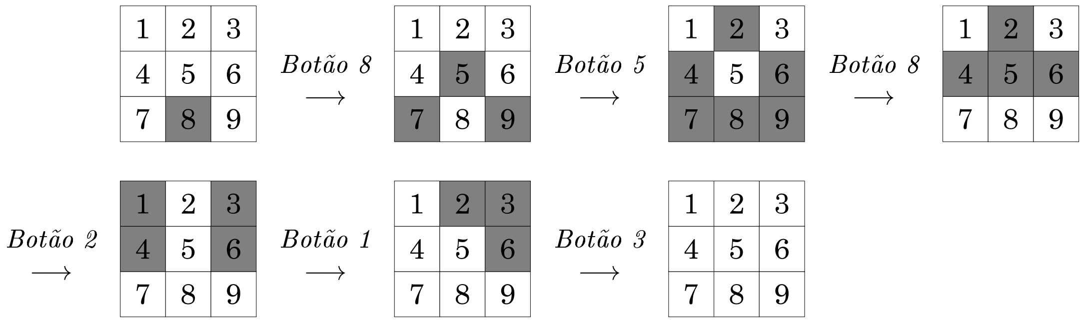
- **Caso 1:** Botão 5 aceso. Neste caso podemos apertar a sequência de botões do item anterior.



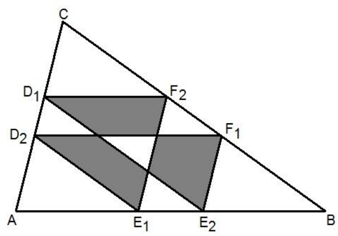
- **Caso 2:** Botão 7 aceso (que é a mesma análise de quando os botões acesos são o $1, 3$ ou 9). Neste caso, apertamos nesta ordem, os botões $7, 8, 4, 1, 9, 2, 8, 4$ e 6.



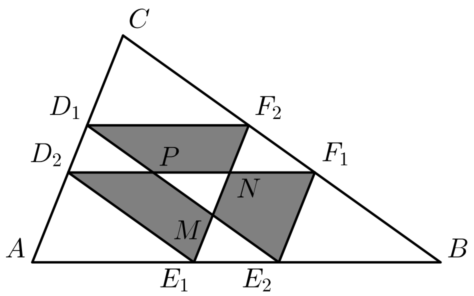
- **Caso 3:** Botão 8 aceso (que é a mesma análise de quando os botões acesos são o 2, 4 ou 6). Neste caso, apertamos os botões $8, 5, 8, 2, 1$ e 3.



Problema 2. Na figura ao lado, ABC é um triângulo de área 25 cm^2. Sabe-se que os segmentos AD_2 e CD_1 possuem o dobro do comprimento do segmento D_1D_2. Da mesma forma, $CF_2 = BF_1 = 2 \cdot F_1F_2$ e $AE_1 = BE_2 = 2 \cdot E_1E_2$. Com isso, cada segmento desenhado na figura que está no interior do triângulo ABC é paralelo a algum dos lados do triângulo ABC (por exemplo, D_1E_2 é paralelo a BC). Calcule a área sombreada.



Resolução:



Note que $AE_2F_1D_2$, $AE_1F_2D_1$ e $D_1E_2F_1C$ são paralelogramos. Assim, $AD_2 = E_2F_1 = D_1C$. Além disso, $AE_1 = D_1F_2$ e os ângulos: $\angle D_2AE_1$, $\angle F_1E_2B$ e $\angle CD_1F_2$ são congruentes.
Portanto, os três triângulos "médios"$\triangle AE_1D_2$, $\triangle E_2BF_1$ e $\triangle D_1F_2C$, são congruentes entre si. Como suas dimensões (lados) são iguais a $\frac{2}{5}$ dos respectivos lados do $\triangle ABC$, cada uma de suas áreas é igual a $(\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$ da área do $\triangle ABC$.
Agora, do fato de $D_2E_1MD_1$, $E_1E_2PD_2$, $D_2NF_2D_1$ e $E_1E_2F_1N$ serem paralelogramos, concluímos que os triângulos $\triangle E_1E_2M$, $\triangle NF_1F_2$ e $\triangle D_2PD_1$ (triângulos menores) são congruentes entre si e como seus lados são iguais a $\frac{1}{5}$ dos respectivos lados do $\triangle ABC$, cada uma de suas áreas é igual a $(\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25}$ da área do $\triangle ABC$.
Finalmente, como D_2D_1 é igual a $\frac{1}{3}$ de D_2C, então $D_2P = \frac{1}{3}D_2F_1 = NF_1 = PN$. Analogamente vê-se que $MN = \frac{1}{3}E_1F_2 = E_1M = NF_2$. Portanto, o triângulo $\triangle MNP$ é congruente aos triângulos "menores" citados anteriormente.

Então, a área hachurada AH é igual a:

$$AH = A_{\triangle ABC} - (3A_{\triangle AE_1D_2} + 4A_{\triangle E_1E_2M}) = 25 - (3 \cdot \frac{4}{25} \cdot 25 + 4 \cdot \frac{1}{25} \cdot 25) = 25 - (12 + 4) = 9\ cm^2.$$

Problema 3. Considere os números de três algarismos não nulos xyz, yzx e zxy. Mostre que a soma

$$S = xyz + yzx + zxy$$

é sempre um múltiplo de 37.
Observação: Note que, no número abc, a é o algarismo das centenas, b é o algarismo das dezenas e c é o algarismo das unidades.

Resolução: Dado um número de 3 algarismos, da forma abc, note que $abc = 100a + 10b + c$. Usando este fato para os números xyz, yzx e zxy obtemos que

$$\begin{aligned} S &= xyz + yzx + zxy \\ &= 100x + 10y + z + 100y + 10z + x + 100z + 10x + y \\ &= 111x + 111y + 111z \\ &= 111 \cdot (x + y + z) \\ &= 37 \cdot 3 \cdot (x + y + z). \end{aligned}$$

Logo, S é múltiplo de 37.

Problema 4. A pedido de sua mãe, Ayrton deve ir ao mercado para comprar apenas produtos de limpeza, cujos preços são descritos na tabela abaixo:

Produto A	Produto B	Produto C	Produto D	Produto E	Produto F
R$ 1,30	R$ 3,80	R$ 5,90	R$ 7,10	R$ 8,90	R$ 12,90

A mãe lhe deu R$ 20,00 e pediu para ele comprar pelo menos três produtos, com nenhum repetido. Como recompensa, ela dará ao Ayrton o menor valor entre o troco e 10% do valor gasto nos produtos de limpeza. Por exemplo, se ele comprar R$ 15,00 em produtos, ele ganhará R$ 1,50 de recompensa. Se comprar R$ 19,00 em produtos, ganhará R$ 1,00.
Que produtos da tabela acima Ayrton deve comprar para ganhar a maior recompensa possível?

Resolução: Vamos chamar de g o valor gasto. Então, a recompensa de Ayrton será o menor valor entre $\frac{g}{10}$ e $20 - g$. Note que a recompensa seria a maior possível caso $\frac{g}{10} = 20 - g$, isto é,

$$\frac{g}{10} = 20 - g \Leftrightarrow \frac{g}{10} + g = 20 \Leftrightarrow \frac{11g}{10} = 20 \Leftrightarrow g = \frac{200}{11} = 18,\overline{18}.$$

Ou seja, para que a recompensa de Ayrton seja a maior possível é necessário que o valor total gasto seja o mais próximo possível de R$ 18,18, para mais ou para menos. Porém, os produtos da tabela todos têm preços que são múltiplos de 10 centavos. Então pensemos em dois casos:

- Caso o valor gasto seja R$ 18,20, ele ficaria com o troco de R$ 1,80, pois

$$20,00 - 18,20 = 1,80 < 1,82 = \frac{18,20}{10}.$$

- Caso o valor gasto seja R$ 18,10, ele ficaria R$ 1,81 pois

$$\frac{18,10}{10} = 1,81 < 1,90 = 20,00 - 18,10.$$

Portanto, Ayrton deve fazer uma compra no valor de R$ 18,10, a qual é obtida comprando uma unidade dos produtos A, B, C e D, afim de obter o máximo valor de recompensa.

Problema 5.

a) Mostre que, para qualquer número natural n, os números n e n^5 têm o mesmo algarismo das unidades.

b) Determine o algarismo das unidades do número

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 2013^5 + 2014^5 + 2015^5.$$

Resolução:

a) Primeiramente vamos mostrar que se n é um número natural qualquer, então n e n^5 possuem o mesmo algarismo das unidades. Para isto, vamos mostrar que $10 \mid (n^5 - n)$ (lê-se: 10 divide $n^5 - n$), para tal vamos mostrar que $2 \mid (n^5 - n)$ e $5 \mid (n^5 - n)$. Observe que

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1).$$

Logo $n^5 - n$ é um número par (pois n ou $n+1$ é par) e, portanto, $2 \mid (n^5 - n)$. Assim, resta-nos mostrar que $5 \mid (n^5 - n)$. Pelo algoritmo da divisão euclidiana sabemos que existem únicos números naturais q e r de modo que

$$n = 5q + r, \text{ com } 0 \leq r \leq 4.$$

Assim, precisamos analisar 5 casos:

- **Caso 1:** Se $r = 0$, então $n = 5q$, donde segue que $n^5 - n$ é um múltiplo de 5.
- **Caso 2:** Se $r = 1$, então $n = 5q + 1$, donde segue que $n^5 - n$ é um múltiplo de 5, já que $n - 1 = 5q$.
- **Caso 3:** Se $r = 2$, então $n = 5q + 2$, donde segue que $n^5 - n$ é um múltiplo de 5, já que

$$n^2 + 1 = (5q+2)^2 + 1 = 25q^2 + 20q + 5 = 5 \cdot (5q^2 + 4q + 1).$$

- **Caso 4:** Se $r = 3$, então $n = 5q + 3$, donde segue que $n^5 - n$ é um múltiplo de 5, já que

$$n^2 + 1 = (5q+3)^2 + 1 = 25q^2 + 30q + 10 = 5 \cdot (5q^2 + 6q + 2).$$

- **Caso 5:** Se $r = 4$, então $n = 5q + 4$, donde segue que $n^5 - n$ é um múltiplo de 5, já que

$$n + 1 = 5q + 5 = 5 \cdot (q + 1).$$

Portanto, concluímos que $5 \mid (n^5 - n)$.

b) Agora, já que todo número natural n possui o mesmo algarismo das unidades de n^5, temos que o algarismo das unidades de $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 2013^5 + 2014^5 + 2015^5$ é o mesmo que o algarismo das unidades de $1 + 2 + 3 + \cdots + 2013 + 2014 + 2015$ e como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2013 + 2014 + 2015 = \frac{(1 + 2015) \cdot 2015}{2} = 1008 \cdot 2015,$$

e assim, como $8 \cdot 5 = 40$, o algarismos das unidades será zero.