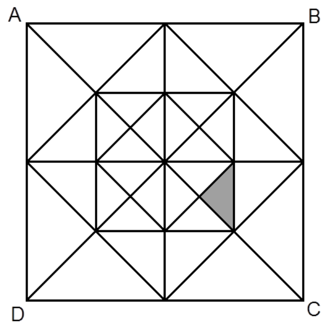
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XVIII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

Resolução – 2ª fase – 2015
Nível 1

Problema 1. Na figura, a área do triângulo sombreado é igual a 1 unidade de área. Determine a área do quadrado $ABCD$.



Resolução: Quatro triângulos sombreados formam um pequeno quadrado com 4 $u.a.$ No quadrado $ABCD$ há 16 destes quadrados pequenos; logo a área do quadrado $ABCD$ é $16 \times 4 = 64$ $u.a.$

Solução Alternativa:

Há 64 triângulos sombreados no quadrado $ABCD$, o que resulta em uma área de 64 $u.a.$

Problema 2. No planeta Gatox existem gatos de cada uma das três cores: verde, azul e vermelho. Os gatos verdes possuem 3 patas, os azuis possuem 4 patas e os vermelhos possuem 5 patas.
Jucavo mora em Gatox e cuida de gatos das três cores. Dos gatos que Jucavo cuida, o número de gatos verdes dividido por 3 é igual ao número de gatos azuis dividido por 4, que também é igual ao número de gatos vermelhos dividido por 5. Um certo dia, Jucavo contou as patas dos seus gatos e obteve um total de 300 patas.
Quantos gatos de cada cor são cuidados por Jucavo?

Resolução: O número de gatos verdes é múltiplo de 3; o número de gatos azuis é múltiplo de 4, e o número de gatos vermelhos é múltiplo de 5. Também observe que os quocientes da divisão destes números por 3, 4 e 5, respectivamente, são iguais, o que significa que devem ser "produzidos" pelo mesmo fator, que será divisor de 300; além disso, a soma destes números é 300.
Vamos montar um quadro para descobrir o quociente e com isso resolver o problema.

Fator ou quociente comum (q)	Número de gatos verdes (A)	Número de gatos azuis (B)	Número de gatos vermelhos (C)	Soma das patas $3A+4B+5C=300$
1	3	4	5	$3\times 3+4\times 4+5\times 5=50$
2	6	8	10	$3\times 6+4\times 8+5\times 10=100$
3	9	12	15	$3\times 9+4\times 12+5\times 15=150$
4	12	16	20	$3\times 12+4\times 16+5\times 20=200$
5	15	20	25	$3\times 15+4\times 20+5\times 25=250$
6	18	24	30	$3\times 18+4\times 24+5\times 30=300$

Portanto, há 18 gatos verdes, 24 gatos azuis e 30 gatos vermelhos.

Solução Alternativa:

A busca pelos números pode ser feita via número de patas: o número de gatos verdes é múltiplo de 3, e como cada gato verde tem 3 patas, o número de patas verdes é múltiplo de $3\times 3=9$. Também pelo mesmo argumento, o número de patas azuis é múltiplo de $4\times 4=16$ e o número de patas vermelhas é múltiplo de $5\times 5=25$. Como a soma destes "primeiros múltiplos" é $9+16+25=50$ e $300=6\times 50$, devemos ter $6\times(9+16+25)=6\times 50$ e $54+96+150=300$. Assim, $54\div 3=18$ gatos verdes, $96\div 4=24$ gatos azuis e $150\div 5=30$ gatos vermelhos.

Problema 3. Dizemos que um número é *curioso* se é formado por três algarismos diferentes e a soma destes algarismos é 15. Por exemplo, 582 é curioso, mas 744 e 813 não são curiosos. Quantos números curiosos existem?

Resolução: Vamos fazer uma análise por casos, lembrando que 096 e 078 não são números de três algarismos, ou seja, não podemos ter o zero na "casa" das centenas.

- Quando no número aparece o algarismo 9:

  $9+0+6$, resultando nos números $906, 960, 609$ e 690 (4 números);
  $9+1+5$, resultando nos números $915, 951, 519, 591, 159$ e 195 (6 números);
  $9+2+4$, resultando nos números $924, 942, 429, 492, 249$ e 294 (6 números).

  Total: 16 números.

  Observe que se temos os algarismos 9 e 3 no número, então $9+3=12$ e como o número deve ser curioso temos que a soma de seus algarismos é 15, logo o outro algarismo deve ser 3. Mas, neste caso teríamos dois algarismos repetidos, o que não é permitido. Assim, em um número curioso não podemos ter os algarismos 9 e 3.

- Quando no número aparece o algarismo 8:

  $8+0+7$, resultando nos números: $807, 870, 708$ e 780 (4 números);
  $8+1+6$, resultando nos números $816, 861, 618, 681, 168$ e 186 (6 números);
  $8+2+5$, resultando nos números $825, 852, 528, 582, 258$ e 285 (6 números);
  $8+3+4$, resultando nos números $834, 843, 438, 483, 348$ e 384 (6 números).

  Total: 22 números.

- Quando no número aparece o algarismo 7:

  $7+2+6$, resultando nos números $726, 762, 627, 672, 267$ e 276 (6 números);
  $7+3+5$, resultando nos números $735, 753, 537, 573, 357$ e 375 (6 números).

  Total: 12 números.

  Observe que a soma $7+0+8$ já foi contada anteriormente. Além disso, se temos os algarismos 7 e 1 no número, então $7+1=8$ e como o número deve ser curioso temos que a soma de seus algarismos é 15, logo o outro algarismo deve ser 7. Mas, neste caso teríamos dois algarismos repetidos, o que não é permitido. Assim, em um número curioso não podemos ter os algarismos 7 e 1. Por um raciocínio análogo, mostra-se que em um número curioso não podemos ter os algarismos 7 e 4.

- Quando no número aparece o algarismo 6:

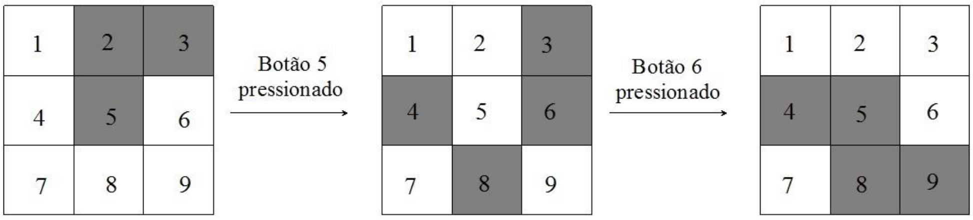
  $6+5+4$, resultando nos números $654, 645, 546, 564, 456$ e 465 (6 números).

  Total: 6 números.

  Observe que as soma $6+0+9, 6+1+8, 6+2+7$ já foram contadas anteriormente. Além disso, se temos os algarismos 6 e 3 no número, então $6+3=9$ e como o número deve ser curioso temos que a soma de seus algarismos é 15, logo o outro algarismo deve ser 6. Mas, neste caso teríamos dois algarismos repetidos, o que não é permitido. Assim, em um número curioso não podemos ter os algarismos 6 e 3.

Por fim, observe que os números em que aparecem os algarismos $5, 4, 3, 2, 1$ e 0 já foram contados.
Portanto, existem $16+22+12+6=56$ números curiosos.

Problema 4. O jogo das luzes é composto por um tabuleiro 3×3 com nove botões numerados de 1 a 9 que podem estar acesos ou apagados. O único movimento permitido no jogo é apertar um botão aceso. Toda vez que um movimento é realizado, o botão que foi apertado apaga e os botões que possuem algum lado comum com o botão apertado se invertem, isto é, os acesos se apagam e os apagados se acendem. Por exemplo, na figura abaixo (em que os botões acesos são os que estão sombreados) foram efetuados dois movimentos:



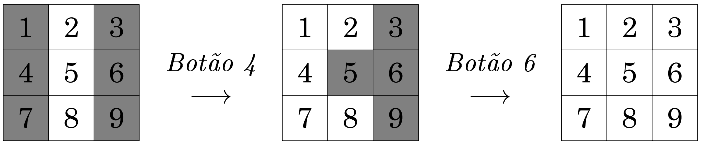
O jogo termina quando todos os botões são apagados.

(a) Partindo de um tabuleiro em que apenas os botões 1, 3, 4, 6, 7 e 9 estão acesos, encontre uma sequência de movimentos para terminar o jogo.

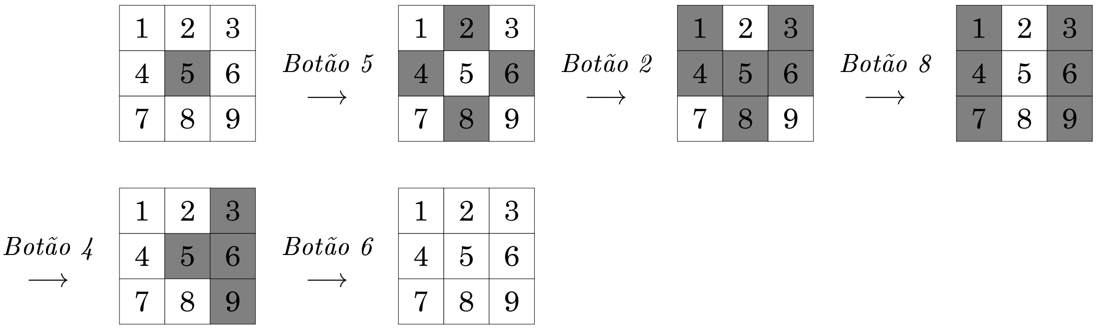
(b) Descreva como terminar o jogo partindo-se de um tabuleiro em que apenas o botão 5 está aceso.

Resolução:

(a) Aperte os seguintes botões em sequência: 4 e 6.



(b) Aperte os seguintes botões em sequência: $5, 2, 8, 4$ e 6.



Problema 5. Luísa criou uma maneira de construir sequências de números naturais. A regra é a seguinte:

(1) o primeiro termo é um número natural maior do que 1;

(2) o segundo termo é igual ao primeiro termo somado ao quociente da divisão dele por 2;

(3) o terceiro termo é igual ao segundo termo somado ao quociente da divisão dele por 2, e assim por diante.

Por exemplo, uma sequência construída desta forma é $2, 3, 4, 6, 9, \ldots$.

(a) Qual o oitavo termo da sequência do exemplo acima?

(b) Se Luísa escrever uma sequência de números seguindo estas regras, de modo que 49 é um termo, então qual é o termo anterior ao 49?

Resolução:

(a) Sabemos que a sequência até o quinto termo é $2, 3, 4, 6$ e 9. Para calcular o oitavo termo precisamos antes calcular o sexto e o sétimo termos:

- 6° termo: como $9 = 2 \times 4 + 1$ e $9 + 4 = 13$, então o sexto termo é 13;
- 7° termo: $13 = 2 \times 6 + 1$ e $13 + 6 = 19$, então o sétimo termo é 19;
- 8° termo: $19 = 2 \times 9 + 1$ e $19 + 9 = 28$, então o oitavo termo é 28.

(b) Se 49 é um termo, ele é a soma do termo anterior mais o quociente deste termo anterior por 2; isto significa que 49 está "próximo" de três metades do termo anterior. Como $49 = 3 \times 16 + 1$, tomamos o 16 como o quociente do termo anterior por 2, ou seja, o termo anterior é 32 ou 33; mas como 49 é ímpar ele não pode ser a soma de dois pares. Assim, o termo anterior será 33 $(33 + 16 = 49)$.