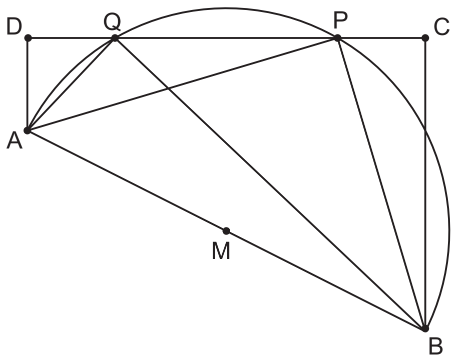
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XVI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Prova – 2 ª fase de 2013
Nível 3

Problema 1
Joãozinho escreve o algarismo 1 em um papel, joga um dado e, segundo o número do dado, escreve a mesma quantidade de zeros após o algarismo 1 já escrito. Em seguida, escreve outro 1, joga novamente o dado e novamente escreve o número de zeros. Por fim, escreve outro 1. Por exemplo, se o resultado das jogadas é 2 e 5, então o número escrito é 1001000001. Mostre que a soma de todos os possíveis números obtidos dessa forma é múltipla de 36.

Problema 2
Seja $ABCD$ um trapézio retângulo com $\hat{C} = \hat{D} = 90°$. A circunferência com centro no ponto médio M de $\overline{AB}$ e passando por A intersecta $\overline{CD}$ nos pontos Q e P, conforme figura abaixo. Mostre que a soma das áreas dos triângulos ABQ e ABP é igual à área do trapézio $ABCD$.



Problema 3
Em um período de 12 horas, quantas vezes podemos inverter as posições dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio de modo que a nova configuração represente uma hora consistente? Por exemplo, na hora 2:30, <u>não</u> podemos inverter a posição dos ponteiros, pois ao colocar o ponteiro das horas no 6, necessariamente o ponteiro dos minutos deveria estar no 12, e não entre 2 e 3.

Problema 4
Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ uma função que satisfaz $f\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{f(n)}$, para qualquer $n \in \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

a) Mostre que $f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Considere a sequência de Fibonacci: $F_1 = 1, F_2 = 2$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 1$.

Mostre que se $f(1) = 2$, então $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ vezes}})(1) = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

Problema 5
Mostre que, para todo $n \geq 2$,

$$\underbrace{2013^{2013^{2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}}}}_{n \text{ vezes}} - 1$$

é múltiplo de 7.