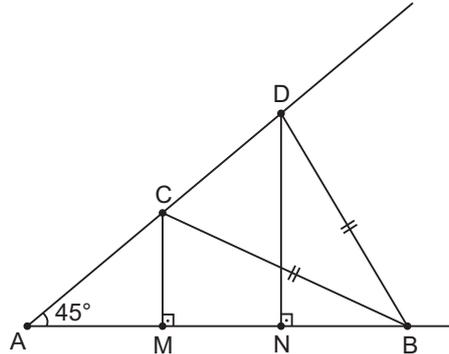


Prova – 2ª fase de 2013
Nível 2

Problema 1

Na figura abaixo, $\hat{A} = 45^\circ$, $BC = BD$, e os segmentos \overline{CM} e \overline{DN} são perpendiculares a \overline{AB} . Mostre que $AM = BN$.



Problema 2

Um trem encontra a linha bloqueada por um acidente, uma hora após sua partida, o que o detém por meia hora. Depois disso, ele parte viajando a três quartos da velocidade anterior e chega ao seu destino com três horas e meia de atraso. Se o acidente tivesse ocorrido 90km mais adiante, o atraso seria de apenas três horas. Qual é o comprimento do trajeto que o trem percorre?

Problema 3

Joãozinho escreve o algarismo 1 em um papel, joga um dado e, segundo o número do dado, escreve a mesma quantidade de zeros após o algarismo 1 já escrito. Em seguida, escreve outro 1, joga novamente o dado e novamente escreve o número de zeros. Por fim, escreve outro 1. Por exemplo, se o resultado das jogadas é 2 e 5, então o número escrito é 1001000001. Mostre que a soma de todos os possíveis números obtidos dessa forma é múltipla de 36.

Problema 4

Pedrinho possui muitas bolinhas de diversas cores. Pedrinho deve montar grupos com três bolinhas de acordo com as seguintes regras:

- (i) Há pelo menos um grupo e, em todo grupo, as três bolinhas têm cores diferentes.
- (ii) Para qualquer cor de bolinha presente em algum grupo, existe um outro grupo que não contém bolinhas dessa cor.
- (iii) Para cada duas cores de bolinhas dentre todas as cores utilizadas nos grupos, existe um único grupo que contém bolinhas dessas duas cores.

Qual é o número mínimo de cores necessário para Pedrinho montar os grupos?

Problema 5

Determine o número de conjuntos não vazios A satisfazendo:

- (i) A é subconjunto de $\{1, 2, 3, \dots, 2013\}$;
- (ii) se $n \in A$ e $2n < 2013$, então $2n \in A$;
- (iii) se $n \in A$ e n é par, então $\frac{n}{2} \in A$.