

Prova – 2ª fase de 2012
Nível 3

1. a) Verifique que, para todo número real $y > 0$, $y + \frac{1}{y} \geq 2$.
 b) Utilizando o resultado anterior, verifique que, para $x > 1$, $\frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x - 2}} \geq 2$.
2. Dados um ponto F e uma reta d , chama-se de parábola o conjunto dos pontos equidistantes de F e d (Figura 1).

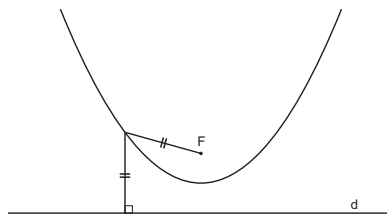


Figura 1

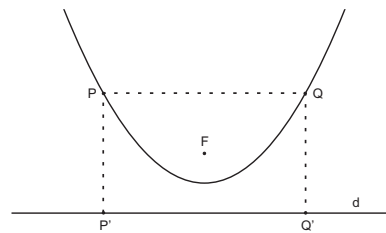


Figura 2

Na figura 2, P e Q são pontos da parábola e P' e Q' pontos da reta d tais que a reta PQ é paralela a d , as retas PP' e QQ' são perpendiculares a d e P' , F e Q são colineares. Sabendo que a distância de F a d é igual a 1cm, calcule a área do retângulo $PP'Q'Q$.

3. Em uma festa há 2012 pessoas que se dividem em 503 famílias, cada uma composta por um homem, uma mulher e duas crianças. Na festa, há 503 mesas com quatro cadeiras em cada mesa. Em um certo momento, todos os presentes sentaram aleatoriamente nas cadeiras e verificou-se que, em cada mesa, havia um homem, uma mulher e duas crianças (não necessariamente da mesma família). Qual a probabilidade de que cada mesa esteja composta por membros da mesma família?
4. Verifique que, para todo número natural não nulo n , existe um número natural N da forma $N = 111 \dots 1000 \dots 0$, tal que n é um divisor de N .
5. Uma cruz (Figura 1) é rotacionada em torno do seu centro de um ângulo de 45° e uma circunferência é circunscrita ao polígono obtido (Figura 2). Calcule a área da região sombreada na figura 2.

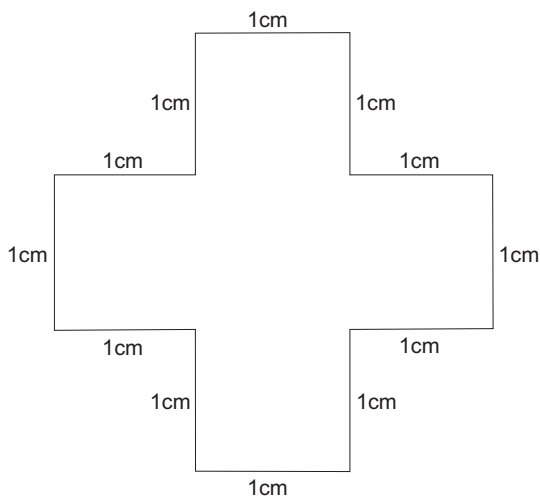


Figura 1

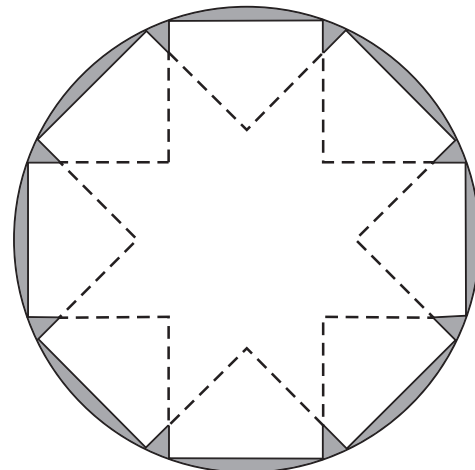


Figura 2