

Prova – 2ª fase de 2012
Nível 2

1. Sejam a, b e c três números distintos. Mostre que, para todo número x ,

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

2. Uma jarra de um litro está cheia com uma mistura de $\frac{1}{3}$ de suco e $\frac{2}{3}$ de água. Após ser bebida certa quantidade desta mistura, completa-se com suco puro, obtendo-se uma mistura com partes iguais de água e suco. Qual a quantidade que foi bebida?
3. Encontre três frações, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ com a, b, c, d, e, f inteiros positivos, iguais respectivamente a $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}$, tais que $a + b = c + d = e + f = s$ e esta soma s é a mínima possível.
4. Em um tabuleiro 2012×2012 , João coloca fichas de quatro tipos, A, B, C e D, da seguinte maneira:

	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	...				
Linha 1	A	B	C	D	A	B	C	...
Linha 2	B	C	D	A	B	C	D	...
Linha 3	C	D	A	B	C	D	A	
⋮	D	A	B	C	D	A	B	
⋮	A	B	C	D	A	B	C	
⋮	B	C	D	A	B	C	D	
⋮	C	D	A	B	C	D	A	
⋮	⋮	⋮						⋮

A seguir se i e j são dois números inteiros positivos (menores ou iguais a 2012) tais que i, j e 2012 possuem um divisor comum maior que 1, João retira a ficha que está na casa de linha i e coluna j . Quantas fichas do tipo A restaram no tabuleiro de João?

Observação: $2012 = 2 \times 2 \times 503$, e 503 é um número primo.

5. Um polígono em forma de cruz (Figura 1) é rotacionado em torno de seu centro de um ângulo de 45° , resultando na Figura 2 abaixo. Calcule o perímetro em negrito da figura 2.

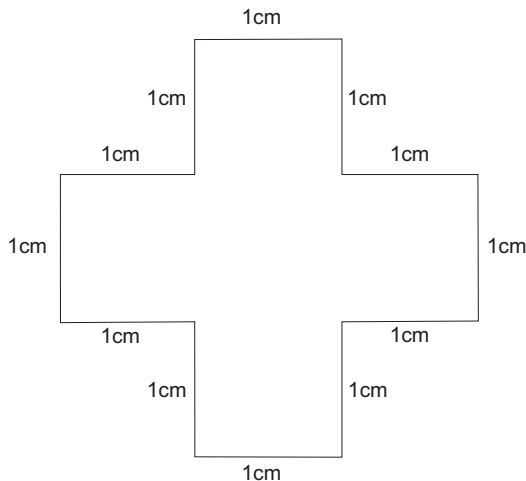


Figura 1

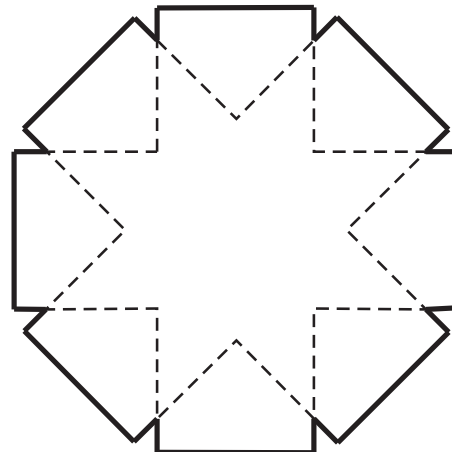


Figura 2