UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova 2ª fase de 2012
Nível 3

Questão 1

(a) $y > 0$.

Então:

$$y + \frac{1}{y} \geq 2 \;\Leftrightarrow\; y^2 + 1 \geq 2y \;\Leftrightarrow\; y^2 - 2y + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (y-1)^2 \geq 0.$$

Outra solução:

De $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, para $a, b \geq 0$, temos:

$$\frac{y + \frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{y \cdot \frac{1}{y}} = 1 \;\Rightarrow\; y + \frac{1}{y} \geq 2.$$

(b) $x > 1$.

Então, fazendo $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} > 0$, temos de (a):

$$2 \leq y + \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}} = \frac{x+2+x-1}{\sqrt{(x+2)(x-1)}} = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}}.$$

Outra solução:

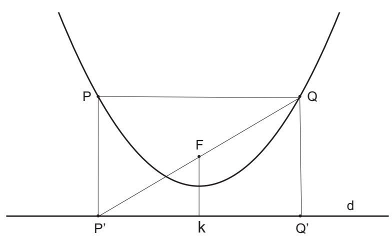
$$x > 1 \;\Rightarrow\; x^2 + x - 2 > 0.$$

Então:

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}} \geq 2 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 + 4x + 1 \geq 4x^2 + 4x - 8 \;\Leftrightarrow\; 1 \geq -8.$$

Questão 2

$PP'Q'P$ é um retângulo. Então $P'\widehat{P}Q = 90°$ e $PP' = QQ'$. P e Q estão na parábola. Então, $PF = PP' = QQ' = QF$. Portanto, F é um ponto da hipotenusa do triângulo QPP' (retângulo) tal que $FP = FQ$.



Logo, F é o ponto médio de QP' (de outra forma, o triângulo PFQ é isósceles; a perpendicular por F a PQ cruza este segmento em seu ponto médio; a altura de um triângulo isósceles relativa à sua base, coincide com a mediana; pelo teorema da base média para triângulos, F é o ponto médio de QP'). Segue-se que $PF = PP' = FP'$, ou seja, o triângulo PFP' é equilátero. Como $PP' = 2FK = 2$, então $P'K = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Portanto a área do retângulo $PP'Q'Q$ será igual a $2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ cm^2$.

Resposta: A área do retângulo $PP'Q'Q$ é $4\sqrt{3}\ cm^2$.

Observação: Uma outra maneira de concluir que o ponto F é o ponto médio do segmento $P'Q$ seria usar a simetria da figura em relação à reta FK (que é o eixo da parábola). O simétrico de $P'Q$ é PQ', e esses dois segmentos, que são diagonais do retângulo, passam por F. Logo, F é ponto médio de $P'Q$ e de PQ'.

Questão 3

Devemos inicialmente calcular quantas são as situações em que há, em cada mesa, um casal e duas crianças (não necessariamente a mesma família). Esse será o nosso "espaço amostral".

Para calcular isso, podemos pensar que as mesas foram enumeradas, e então devemos calcular primeiro quantas são as possibilidades de se distribuir os 503 homens, um em cada mesa. Há 503 possibilidades para a primeira mesa, 502 para a segunda etc. Portanto há $503!$ maneiras de se distribuir os homens, um em cada mesa. O mesmo ocorre com as mulheres. Resta distribuir as 1006 criahnças pelas mesas. Há dois lugares vagos em cada mesa, ou seja, no total há 1006 cadeiras vagas. Portanto deveríamos ter $1006!$ maneiras de distribuir as crianças. Porém, <u>em cada mesa</u>, estamos contando em dobro as distribuições AB e BA.

Na mesa 1, podemos ter as crianças AB e também BA. Na mesa 2, teremos CD e também DC. E assim sucessivamente. Na mesa 503 teremos XY e também YX. Assim, há na verdade $\dfrac{1006!}{\underbrace{2 \times 2 \times ... \times 2}_{503}} = \dfrac{1006!}{2^{503}}$, maneiras de distribuir as crinças pelas mesas.

Agora vamos calcular de quantas maneiras podemos distribuir as 503 famílias pelas 503 mesas. Isso é simplesmente igual a $503!$.

Portanto a probabilidade de que em cada mesa estejam sentados todos os membros da mesma família será igual a:

$$P = \frac{503!}{503! \cdot \dfrac{1006!}{2^{503}}} = \frac{2^{503}}{503! \cdot 1006!}.$$

Resposta: A probabilidade é igual a $\dfrac{2^{503}}{503! \cdot 1006!}$.

Questão 4

Seja n um número natural não nulo. Considere os n números:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \\ m_2 &= 11 \\ m_3 &= 111 \\ &\vdots \\ m_n &= \underbrace{11\ldots1}_{n} \end{aligned}$$

Há duas possibilidades:

1. Um destes números é múltiplo de n (e o problema está resolvido);
2. Todos aqueles n números deixam resto diferente de zero da divisão por n.

Como temos n restos e $n-1$ possibilidades de resto não nulo na divisão por n, existem dois números da lista acima que deixam o mesmo resto na divisão por n. Sejam m_i e m_j, $j > i$, esses números.

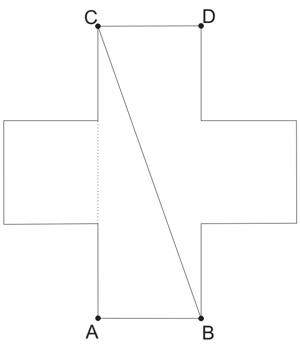
Então, de

$$\begin{aligned} m_i &= q_i n + r \text{ e} \\ m_j &= q_j n + r, \text{ obtemos:} \\ m_i - m_j &= (q_i - q_j)n, \text{ ou seja,} \\ m_i - m_j &= \underbrace{1\ldots1}_{j-i}\underbrace{0\ldots0}_{i} \text{ é multiplo de } n \end{aligned}$$

(E o problema está resolvido)

Questão 5

A área da região sombreada será igual à área do círculo menos a área da figura em branco formada pela cruz sobreposta com a cruz rotacionada.

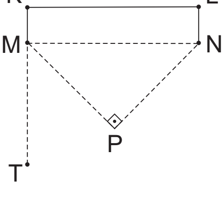


O diâmetro do círculo é igual à diagonal de um retângulo de lados 3 por 1 ($ABCD$ na figura ao lado). Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado ao $\triangle ABC$, temos $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow BC = \sqrt{10}$.

Logo, o raio R do círculo é igual a: $R = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Portanto, a área do círculo é igual a: $A_C = \pi R^2 = \pi \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}\pi cm^2$.

A área da figura em branco é igual a área da cruz (igual a soma das áreas de 5 quadrados de lado $1cm$), $A_{cruz} = 5cm^2$, mais quatro vezes a área da figura abaixo, à esquerda:



Note que o $\triangle MNP$ é retângulo e isósceles com hipotenusa $1cm$. Portanto,

$MP^2 + NP^2 = 2MP^2 = 1 \Rightarrow MP = \dfrac{\sqrt{2}}{2}cm = MT$

(KT é um lado da cruz).

Então, o lado KM do retângulo $KLNM$ é igual a:

$$KM = KT - MT = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} cm$$

Assim, a área do polígono $KMPNL$ é igual a:

$$A_P = KM \times KL + \frac{MP \cdot NP}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \times 1 + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4-2\sqrt{2}+1}{4} = \frac{5-2\sqrt{2}}{4} cm^2$$

Portanto, a área da figura sombreada será:

$$A_S = A_C - (A_{CRUZ} + 4 \times A_P) = \frac{5}{2}\pi - (5 + 5 - 2\sqrt{2}) = \left(\frac{5}{2}\pi - 10 + 2\sqrt{2}\right) cm^2$$

Resposta: A área da região sombreada é igual a $\left(\frac{5}{2}\pi - 10 + 2\sqrt{2}\right) cm^2$.