Gabarito da Prova 2ª fase de 2012
Nível 2

Questão 1

Somando as três frações obteremos o denominador $(c-a)(c-b)(b-a)$, e o numerador será igual a:

$$(b-a)(x-a)(x-b)-(c-a)(x-a)(x-c)+(c-b)(x-b)(x-c)=$$

$$=(b-a)[x^2-(b+a)x+ab]-(c-a)[x^2-(c+a)x+ac]+(c-b)[x^2-(c+b)x+bc]=$$

$$=[(b-a)-(c-a)+(c-b)]x^2+[-(b^2-a^2)+(c^2-a^2)-(c^2-b^2)]x+(b-a)ab-(c-a)ac+(c-b)bc=$$

$$=(b-a)ab-(c-a)ac+(c-b)bc=$$

$$=ab^2-a^2b-ac^2+a^2c+(c-b)bc=$$

$$=a(b^2-c^2)+a^2(c-b)+bc(c-b)=$$

$$=-a(c+b)(c-b)+a^2(c-b)+bc(c-b)=$$

$$=(c-b)[-a(c+b)+a^2+bc]=(c-b)[a(a-c)+b(c-a)]=$$

$$=(c-b)(c-a)(b-a).$$

Resposta: O numerador é igual ao denominador, e portanto a soma das três frações é igual a 1 para todo x.

Questão 2

Seja x o volume em litros da mistura bebida. Sobra na jarra um volume igual a $(1-x)$ litros da mistura composta por $\left(\dfrac{1-x}{3}\right)$ litros de suco e $\dfrac{2}{3}(1-x)$ litros de água.

Ao adicionarmos um volume de x litros de suco puro (para tornar a encher a jarra) obteremos uma mistura composta por um volume $\left(\dfrac{1-x}{3}+x\right)$ litros de suco puro e $\dfrac{2}{3}(1-x)$ litros de água. Essas duas partes devem ser iguais, e portanto:

$$\frac{1-x}{3}+x=\frac{2(1-x)}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{4}l.$$

Resposta: A quantidade (volume) da mistura que foi bebida é igual a $\dfrac{1}{4}$ litros.

Questão 3

Queremos encontrar frações $\dfrac{x}{2x}$, $\dfrac{3y}{5y}$ e $\dfrac{5z}{7z}$ tais que $x+2x=3y+5y=5z+7z$, ou $3x=8y=12z=s$, e tal que s seja a menor possível.

Então, basta achar o MMC de 3, 8 e 12, que é 24. Portanto, $x = \dfrac{24}{3} = 8$, $y = \dfrac{24}{8} = 3$ e $z = \dfrac{24}{12} = 2$, e as frações são $\dfrac{8}{16}$, $\dfrac{9}{15}$ e $\dfrac{10}{14}$.

Resposta: As frações são $\dfrac{8}{16}$, $\dfrac{9}{15}$ e $\dfrac{10}{14}$.

Questão 4

Note, do tabuleiro olhando as " Diagonais " da esquerda para a direita e de baixo para cima, que as fichas A estão em $(1,1)$ $(1+1=2)$, na " Diagonal " $(5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5)$ (soma 6), etc. Portanto, quando $i+j$ for dividido por 4 deixará resto 2, ou seja, se $i+j \equiv 2\ (mod\ \ 4)$ teremos ficha do tipo A na casa (i,j).

As fichas do tipo B obedecerão $i+j \equiv 3\ (mod\ \ 4)$, ou seja, dividindo $i+j$ por 4 teremos resto 3. As fichas do tipo C satisfarão $i+j \equiv 0\ (mod\ \ 4)$, ou seja, $i+j$ múltiplo de 4, e as fichas do tipo D satisfarão $i+j \equiv 1\ (mod\ \ 4)$, ou seja, dividimos $i+j$ por 4 teremos resto 1.

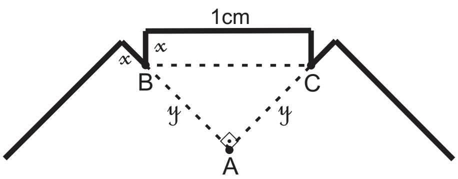
Como $2012 = 2^2 \times 503$, para que i, j e 2012 tenham um divisor comum maior do que 1, deveremos ter:
(a) i e j par; ou
(b) (i,j) sendo $(503,503)$, $(503,1006)$, $(503,1509)$, $(503,2012)$, $(1006,503)$, $(1006,1509)$, $(1509,503)$, $(1509,1006)$, $(1509,1509)$, $(1509,2012)$, $(2012,503)$ e $(2012,1509)$.

Como em cada linha há 503 fichas de cada tipo e, portanto teremos $2012 \times 503 = 2^2 \times 503^2$ fichas de cada tipo no tabuleiro. No caso (a) haverá metade dessa quantidade de fichas do tipo A que serão retiradas, ou seja, 2×503^2. No caso (b), apenas $(503,503)$ e $(1509,1509)$ são do tipo A, de acordo com a caracterização dessas fichas feita acima. Portanto, serão retiradas $2 \times 503^2 + 2$ fichas do tipo A, restando:
$2^2 \times 503^2 - (2 \times 503^2 + 2) = 2 \times 503^2 - 2 = 2 \cdot (503^2 - 1) = 2 \cdot (503-1)(503+1) = 2 \cdot 502 \cdot 504$ fichas do tipo A.

Resposta: Restarão $2 \times 502 \times 504$ fichas do tipo A no tabuleiro.

Questão 5

Desenhando uma parte da Figura 2 temos:



O $\triangle ABC$ é retângulo em A, pois da rotação de $90°$ temos $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 45°$. Portanto, $AB = AC = y$. Então $2y^2 = 1$ ou $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $x = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

O perímetro será $16x + 8$, ou $16\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + 8 = 24 - 8\sqrt{2}$.

Resposta: O perímetro é igual a $24 - 8\sqrt{2}$ cm.