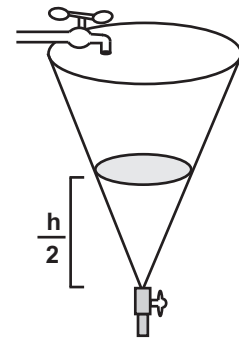


Prova – 2ª fase de 2011  
Nível 3

1. Mostre que os números da forma  $\underbrace{44\dots4}_n \underbrace{22\dots2}_{n+1} 5$  são quadrados perfeitos para  $n \geq 0$ .
2. Qual o menor inteiro positivo  $n$  tal que o número  $\underbrace{201120112011\dots2011}_{n\text{-vezes}}$  é múltiplo de 11?

3. Um tanque na forma de cone inverso tem uma torneira que o enche, com vazão constante, em 1 hora e um ralo no seu vértice que o esvazia, também com vazão constante, em 2 horas. Suponha que o tanque está inicialmente vazio. Ao abrir a torneira e o ralo simultaneamente, qual é o tempo necessário para que o nível da água atinja a metade da altura do cone?

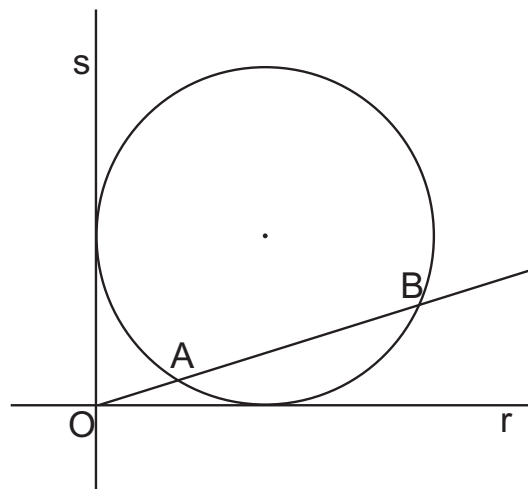


4. Considere a função  $f(x, y) = 1 - \frac{x}{y}$ , para  $x > 0$  e  $y > 0$ . Defina:

$$F_n(x) = \begin{cases} f(x, x) & \text{se } n = 1, \\ f(F_{n-1}(x), x) & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Calcule  $F_{2011}(2)$ .

5. Na figura abaixo, as retas  $s$  e  $r$  são perpendiculares e a circunferência tem raio  $a$  e é tangente às duas retas. Os pontos  $A$  e  $B$  da circunferência são tais que:
  - (i)  $O$ ,  $A$  e  $B$  são colineares;
  - (ii) o ângulo entre as retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $r$  é menor do que  $45^\circ$ ;
  - (iii) a medida de  $OA$  é um terço da medida de  $AB$ .



- a) Calcule  $OA$  em função do raio  $a$  da circunferência.
- b) Calcule a razão entre as distâncias do ponto  $A$  às retas  $r$  e  $s$ .