UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XIV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova 2ª fase de 2011
Nível 3

---

1. Se $n = 0$ então o número é $25 = 5^2$. Para $n \geq 1$ temos:

   $44...422...25 = 4 \cdot 10^{2n+1} + 4 \cdot 10^{2n} + ... + 4 \cdot 10^{n+2} + 2 \cdot 10^{n+1} + ... + 2 \cdot 10 + 5 =$

   $4(10^{2n+1} + 10^{2n} + ... + 10^{n+2}) + 2(10^{n+1} + ... + 10) + 5 =$

   $4 \cdot \dfrac{10^{2n+2} - 10^{n+2}}{9} + 2 \cdot \dfrac{10^{n+2} - 10}{9} + 5 =$

   $\dfrac{4}{9}10^{2n+2} - \dfrac{4}{9}10^{n+2} + \dfrac{2}{9}10^{n+2} - \dfrac{20}{9} + 5 =$

   $\dfrac{4}{9}10^{2n+2} - \dfrac{2}{9}10^{n+2} + \dfrac{25}{9} = \dfrac{1}{9}(4 \cdot 10^{2n+2} - 2 \cdot 10^{n+2} + 25) =$

   $\dfrac{1}{9}(4 \cdot 10^{2n+2} - 2 \cdot 10 \cdot 10^{n+1} + 25) =$

   $\dfrac{1}{9}(2 \cdot 10^{n+1} - 5)^2 = \left(\dfrac{2 \cdot 10^{n+1} - 5}{3}\right)^2$

2. O número 2011 não é múltiplo de 11, pois pelo critério de divisibilidade por 11, a diferença entre a soma dos algarismos da dezena e do milhar, e a soma dos algarismos da unidade e da centena não é múltiplo de 11:

   $$2011 : (2 + 1) - (1 + 0) = 2$$

   Para um número como $\underbrace{201120112011...2011}_{n-vezes}$, aquela diferença será $3n - n = 2n$. O menor inteiro positivo que torna esse número um múltiplo de 11 é o próprio 11.

3. Como a vazão da torneira é o dobro da vazão do ralo se, em um certo intervalo de tempo, a torneira coloca um volume V de água no tanque e o ralo escoa um volume $\frac{V}{2}$. Assim, com a torneira e o ralo abertos, o tanque será totalmente cheio no dobro do tempo que seria com a torneira aberta e o ralo fechado, ou seja, em 2 horas.

   O Volume da água correspondente à metade da altura é igual a $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$ do volume do tanque.

   Assim, para que o nível da água atinja a metade da altura do cone, o tempo necessário será $\dfrac{1}{8} \cdot 2$ h $= \dfrac{1}{4}$h $= 15$ min.

4. Calculando alguns termos da sequência $F_n(2)$

   $$F_1(2) = f(2, 2) = 1 - \frac{2}{2} = 0$$

   $$F_2(2) = f(F_1(2), 2) = 1 - \frac{0}{2} = 1$$

$$F_3(2) = f(F_2(2), 2) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$F_4(2) = f(F_3(2), 2) = 1 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

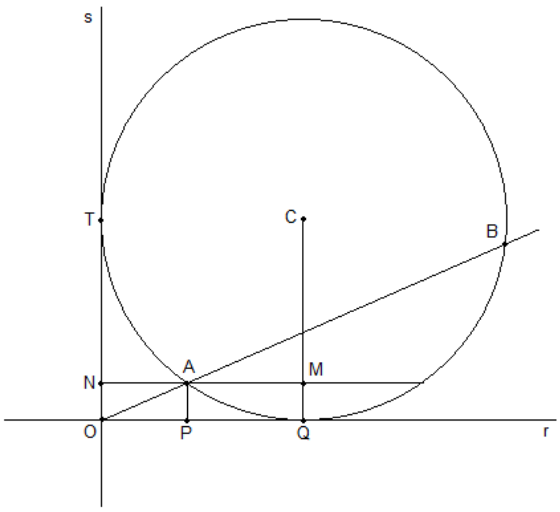
$$\vdots$$

$F_n(2) = f(F_{n-1}(2), 2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - ...(-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n-2}}$, o que pode ser demonstrado por indução.

Assim,

$$\begin{aligned}
F_{2011}(2) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - ...(-1)^{2011} \times \frac{1}{2^{2009}} \\
&= \frac{1 - (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2^{2009})}}{1 - (-\frac{1}{2})} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{2^{2010}}}{1 + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{2^{2010} - 1}{2^{2010}}}{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2^{2010} - 1}{3 \times 2^{2009}}
\end{aligned}$$

5. a) Sejam T e Q os pontos de tangência da circunferência com as retas s e r respectivamente.



Por potência do ponto O em relação à circunferência temos:

$$a^2 = OT^2 = OA.OB = OA(OA + AB) = OA(OA + 3OA) = 4OA^2$$

Então $a = OT = 2OA$ ou $OA = \frac{a}{2}$

b) Sejam P e N os pés das perpendiculares por A às retas r e s respectivamente. Queremos achar

$$\frac{AP}{AN}$$

No triangulo retângulo

$$\triangle APO$$

temos, pelo Teorema de Pitágoras:

$$OA^2 = AP^2 + AN^2$$

ou,

$$AP^2 + AN^2 = \frac{a^2}{4}$$

Sejam C o centro da circunferência e M o ponto de intersecção de $\overline{CQ}$ com a reta AN
No triângulo retângulo

$$\triangle CMA$$

temos:

$$AC^2 = CM^2 + AM^2$$

ou

$$a^2 = (CQ - MQ)^2 + (MN - AN)^2$$

ou

$$a^2 = (a{-}AP)^2{+}(a{-}AN)^2 = 2a^2{-}2a(AP{+}AN){+}AP^2{+}AN^2 = 2a^2{-}2a(AP{+}AN){+}\frac{a^2}{4}$$

Então:

$$2a(AP + AN) = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow AP + AN = \frac{5a}{8} \quad (1)$$

Agora

$$\frac{25a^2}{64} = (AP{+}AN)^2 = AP^2{+}AN^2{+}2.AP.AN = \frac{a^2}{4}{+}2.AP.AN = AP.APN = \frac{9a^2}{128} \quad (2)$$

De (1) e (2) temos a equação de segundo grau:

$$\lambda^2 - \frac{5a}{8}\lambda + \frac{9a^2}{128} = 0$$

cujas raízes são AP e AN. Mas

$$\lambda = \frac{\frac{5a}{8} \pm \sqrt{\frac{25a^2}{64} - \frac{9a^2}{32}}}{2} = \frac{\frac{5a}{8} \pm \sqrt{\frac{7a^2}{64}}}{2} = \frac{\frac{5a}{8} \pm \frac{a}{8}\sqrt{7}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{16}a$$

Então:

$$AP = \frac{5}{-}\sqrt{7}16a$$

e

$$AN = \frac{5}{+}\sqrt{7}16a$$

Portanto:

$$\frac{AP}{AN} = \frac{5 - \sqrt{7}}{5 + \sqrt{7}} = \frac{(5 - \sqrt{7})^2}{25 - 7} = \frac{32 - 10\sqrt{7}}{18} = \frac{16 - 5\sqrt{7}}{9}$$

(Independe de a).