Gabarito da Prova 2ª fase de 2011
Nível 2

1. a) De $\overline{DE}//\overline{AC}$ temos que :

$$\begin{cases} B\hat{D}E = B\hat{A}C = 60^{\circ} \\ B\hat{E}D = B\hat{C}A = 60^{\circ} \end{cases}$$

De $\overline{FG}//\overline{BD}$ temos que $I\hat{G}H = B\hat{D}E = 60^{\circ}$, e de $\overline{HI}//\overline{FE}$ temos que $I\hat{H}G = B\hat{E}D = 60^{\circ}$. Portanto $G\hat{I}H = 60^{\circ}$ e o triângulo IHG é equilátero.

b) De $AD = \frac{1}{3}AB$ temos que $BD = \frac{2}{3}AB$, mas $BE = BD$ e portanto $BE = \frac{2}{3}AB$ De $BF = \frac{1}{3}BE$ temos $FE = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}AB = \frac{4}{9}AB$. Mas $EG = FE$. De $EH = \frac{1}{3}EG$ temos $GH = \frac{2}{3}EG = \frac{2}{3}FE = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}AB = \frac{8}{27}AB$.

Portanto a razão de semelhança entre os triângulos IHG e ABC é igual a $\frac{8}{27}$.

Segue-se que a razão entre suas áreas é igual a $\left(\frac{8}{27}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$.

2. Para que o número de casas seja o menor possível devemos distribuir os gatos a partir da maior quantidade permitida por casa, sem repetir esses números. Então os 2011 gatos ficarão distribuídos segundo a soma

$$70 + 69 + 68 + ...$$

Efetuando a soma de 70 até 20 (inclusive) obtemos:

$$70 + 69 + ... + 21 + 20 = (70 + 20) + (69 + 21) + ... + (46 + 44) + (45) = 25.90 + 45 = 2295$$

Esse valor ultrapassa 2011 em 284. Vamos então subtrair as casa entre 20 e 29:

$$20 + 21 + ... + 28 + 29 = (20 + 29) + (21 + 28) + ... + (24 + 25) = 5.49 = 245$$

Assim, a soma

$$70 + ... + 30 = 2295 - 245 = 2050$$

e portanto a soma

$$70 + ... + 31 = 2050 - 30 = 2020$$

Este número ultrapassa o valor 2011 em 9 unidades. Não é possível uma casa acolher 9 gatos somente, então retiramos a casa com 31 gatos e teremos a soma:

$$70 + ... + 32 = 2020 - 31 = 1989 \text{ gatos}$$

Agora faltam 22 gatos para totalizar 2011 e uma casa ficará com esses 22 gatos. Portanto distribuindo gatos em

$$(70 - 32) + 1 + 1 = 38 + 1 + 1 = 40 \text{ casas}$$

com $70, 69, 68, ..., 33, 32$ e 22 gatos respectivamente, teremos o número mínimo de casas.

3. Cada torneira e o ralo esvaziam $\frac{1}{3}$ do tanque em $\frac{120}{3}$ minutos $= 40$ minutos. O primeiro terço do tanque é esvaziado pelos três abertos que, tendo a mesma vazão constante, o farão em $\frac{40}{3}$ minutos $= 13 + \frac{1}{3}$ minutos $= 13$ minutos e 20 segundos. O segundo terço do tanque será esvaziado pelo ralo e por **uma** torneira, que o farão em $\frac{40}{2}$n minutos $= 20$ minutos. O último terço do tanque será esvaziado pelo ralo em 40 minutos. Portanto, otempo total para esvaziar o tanque será:

   13 minutos e 20 segundos $+20$ minutos $+40$ minutos $= 1$ hora 13 minutos e 20 segundos.

4. Observe que, de $abc + bcd = (a + d)bc = 825$, temos que os três fatores $(a + d)$, b e c devem ser ímpares. Mas como a soma de dois primos ímpares é par, então $a = 2$ (para que $a + d$ seja ímpar).

   Agora observe que a decomposição em fatores primos de 825 é:

   $$825 = 3 \cdot 5^2 \cdot 11.$$

   Então só há duas possibilidades para que o produto $(a + d)bc$ seja igual a 825. Uma delas é $a + d = 25$, e nesse caso $d = 23$, $b = 3$ e $c = 11$. Mas então teremos $ab + bc + cd = 6 + 33 + 253 > 208$. A outra possibilidade é que b ou c sejam iguais a 5. Se $c = 5$ então $b = 3$ e $a + d = 55$, ou seja, $d = 53$. Nesse caso também teriamos $ab + bc + cd > 208$. Então $b = 5$.

   Ficamos então com o sistema:

   $$\begin{cases} 10 + 5c + cd = 208 & (1) \\ 10c + 5cd = 825 & (2) \end{cases}$$

   A equação (1) nos dá: $cd = 198 - 5c$ e, substituindo na equação (2) obtemos: $10c + 5(198 - 5c) = 825$, o que nos dá $c = 11$. Voltando à equação (1) temos: $10+55+11d = 208$, o que nos dá $d = 13$. Note que, na equação original, teremos: $ab+bc+cd = (2\cdot 5)+(5\cdot 11)+(11\cdot 13) = 10 + 55 + 143 = 208$.

   Portanto, os quatro primos são: $a = 2, b = 5, c = 11$ e $d = 13$.

5. Note que $1 < \frac{10}{9}\sqrt{3} < 2$, pois $\frac{10\sqrt{3}}{9} < 2$ se, e somente se $10\sqrt{3} < 18$, e isso ocorre se e somente se $100 \times 3 < 18^2$, o que é verdade; e $\frac{10\sqrt{3}}{9} > 1$ se, e somente se $10\sqrt{3} > 9$, e isso ocorre se e somente se $100\times 3 > 9^2 = 81$, o que é verdade.Então, somando 2 nas desigualdades, temos: $3 < 2 + \frac{10\sqrt{3}}{9} < 4$ (1). Agora, de $1 < \frac{10}{9}\sqrt{3} < 2$ obtemos $-2 < -\frac{10}{9}\sqrt{3} < -1$. Somando 2 nas duas desigualdades obtemos: $0 < 2-\frac{10\sqrt{3}}{9} < 1$ (2). Extraindo a raiz cúbica em (1) e (2) obtemos: $1 < \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} < \sqrt[3]{4} < 2$ e $0 = \sqrt[3]{0} < \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} < \sqrt[3]{1} = 1$. Somando, obtemos: $1 < \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} < 3$. Como a soma das duas raízes é um inteiro, esse inteiro é 2.