UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XIII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Prova – 2 ª fase de 2010
Nível 3

---

1. Qual o menor inteiro **n** para o qual

$$\sqrt{\mathbf{n}} - \sqrt{\mathbf{n}-1} < \frac{1}{2010} \ ?$$

2. Dizemos que um número racional $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$, é matriz de um outro número racional $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, que satisfaz $0 < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2}$, se $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^{\mathbf{k}}$, em que **k** é um número inteiro positivo tal que $\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2^k}$. Nesse caso, dizemos que $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ é uma filial do número $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$.

   a) Qual a matriz de $\frac{3}{7}$?

   b) Qual a matriz de $\frac{3}{16}$?

   c) Mostre que todo número racional $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$ é matriz de uma infinidade de filiais.

3. Considere números inteiros positivos **a**, **b** e **c** que satisfazem a igualdade $\mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$. Por exemplo:

$$3^3 + 13^2 = 14^2 \text{ e } 6^3 + 15^2 = 21^2$$

   a) Apresente mais uma solução de inteiros positivos **a**, **b** e **c** que satisfazem a igualdade acima.
   b) Mostre que existe uma infinidade de soluções de inteiros positivos **a**, **b** e **c** que satisfazem a igualdade acima.

4. Considere uma função real f, definida no conjunto dos números reais diferentes de 0 e 1, satisfazendo a todas as seguintes relações:

$$\text{(i) } f(1-x) = \frac{1}{f(x)}$$

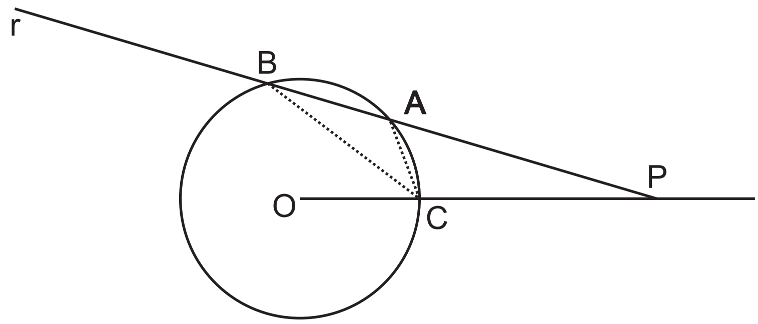
$$\text{(ii) } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(f(x))}$$

$$\text{(iii) } f(f(f(x))) = x$$

   a) Calcule $f(2)$, $f(-1)$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

   b) Determine $f(x)$.

5. Na figura abaixo o raio da circunferência é igual a 6 e a distância **PC** é igual a 10. Por **P** traça-se uma reta r que intercepta a cicunferência em dois pontos **A** e **B**.



a) Calcular a razão entre as distâncias dos pontos **O** à reta r e de **C** à reta r.

b) Variando a inclinação da reta r produzimos outros pontos **A** e **B**, e consequentemente temos novos triângulos **ABC**. Dentre todos esses triângulos, um deles possui a maior área. Calcular essa área.