

Prova – 2^a fase de 2010
Nível 2

1. Qual é o expoente de 5 na fatoração em primos do produto

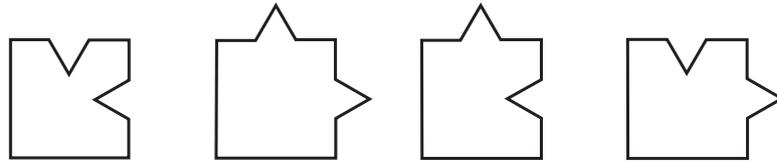
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2010$$

dos números inteiros de 1 a 2010?

2. Qual o menor inteiro n para o qual

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0,01 ?$$

3. Deseja-se montar um quadrado, sobre uma mesa, utilizando quatro tipos de peças. Um mesmo tipo de peça pode ser usado mais de uma vez na montagem de cada quadrado. Os tipos de peças são:



De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito considerando-se que a montagem de dois quadrados é a mesma se um quadrado pode ser obtido a partir do outro por rotação sobre a mesa ou virando a peça ao contrário? Por exemplo, as montagens nas figuras 1, 2 e 3 são as mesmas pois a da figura 2 é obtida da montagem da figura 1 por rotação sobre a mesa, enquanto que a montagem da figura 3 é obtida das outras duas virando-se o quadrado ao contrário:

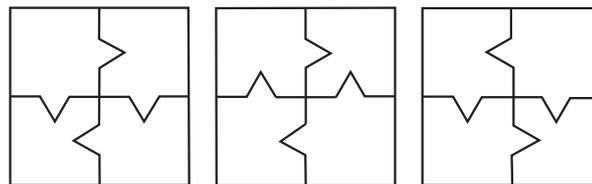


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

4. Dizemos que um número racional $\frac{c}{d}$, que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{c}{d} \leq 1$, é matriz de um outro número racional $\frac{a}{b}$, que satisfaz $0 < \frac{a}{b} \leq \frac{1}{2}$, se $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot 2^k$, em que k é um número inteiro positivo tal que $\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{a}{b} \leq \frac{1}{2^k}$. Nesse caso, dizemos que $\frac{a}{b}$ é uma filial do número $\frac{c}{d}$.

a) Qual a matriz de $\frac{3}{7}$?

b) Qual a matriz de $\frac{3}{16}$?

c) Mostre que todo número racional $\frac{c}{d}$, que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{c}{d} \leq 1$ é matriz de alguma filial.

5. Uma pessoa disputa um torneio com partidas nas quais ela não obtém ponto se perder a partida, obtém um ponto se empatar e obtém três pontos se ganhar a partida.
- a) De quantas maneiras distintas ela pode obter 20%, do máximo possível de pontos disputados, em 15 partidas?
 - b) Após 15 partidas jogadas, e com a pontuação obtida no item (a), qual é o número mínimo de partidas que ela deverá ainda jogar para obter 50% do total de pontos disputados?
 - c) Após 15 partidas jogadas, e com a pontuação obtida no item (a), de quantas maneiras é possível obter 50%, do total de pontos disputados, com no máximo mais 15 partidas?