

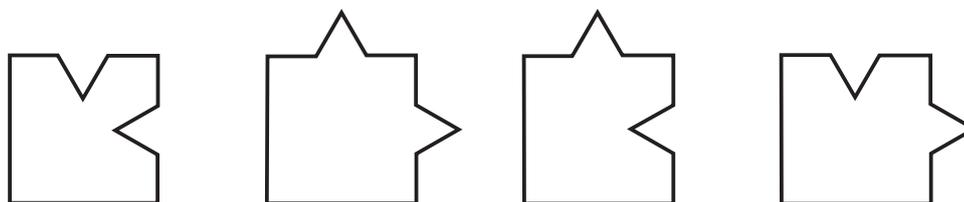
Prova – 2^a fase de 2010
Nível 1

1. Qual é o expoente de 67 na fatoração em primos do produto

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2010$$

dos números inteiros de 1 a 2010?

2. Deseja-se montar um quadrado, sobre uma mesa, utilizando quatro tipos de peças. Um mesmo tipo de peça pode ser usado mais de uma vez na montagem de cada quadrado. Os tipos de peças são:



Se cada peça tem um dos lados branco e o outro lado cinza, de quantas maneiras diferentes pode-se montar um quadrado branco? Considere que a montagem de dois quadrados é a mesma se um quadrado pode ser obtido a partir do outro por rotação sobre a mesa. Por exemplo, as montagens nas figuras 1 e 2 são as mesmas, pois uma é obtida da outra por rotação sobre a mesa.

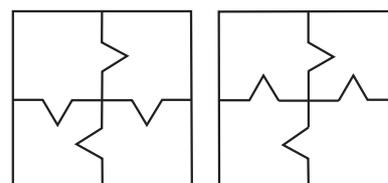


Fig. 1

Fig. 2

3. Considere o conjunto dos números inteiros que podem ser formados com três números 3 e as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão, quando esta for possível e exata). É permitido o uso de parêntesis quando necessário. Por exemplo, $3 - (3 + 3) = -3$, e $(3 \times 3) + 3 = 12$.
- Qual o maior e qual o menor número desse conjunto?
 - Quais são os números do conjunto $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ que podem ser obtidos dessa maneira?
4. Uma pessoa disputa um torneio com partidas nas quais ela não obtém ponto se perder a partida, obtém um ponto se empatar e obtém três pontos se ganhar a partida.
- De quantas maneiras distintas ela pode obter 20%, do máximo possível de pontos disputados, em 15 partidas?
 - Após 15 partidas jogadas, e com a pontuação obtida no item (a), qual é o número mínimo de partidas que ela deverá ainda jogar para obter 50% do total de pontos disputados?
5. Sabe-se que cada casal de gatos triameses gera um primeiro casal de filhos aos 6 meses de idade, e depois, a cada 3 meses gera mais um novo casal. Gautino e Gatarina são um casal de gatos triameses que acabaram de ter seu sétimo casal de gatos.
- Qual a idade mínima do casal Gautino e Gatarina?
 - Quantos descendentes (filhos, netos, bisnetos etc) teriam, no máximo, o casal Gautino e Gatarina nesse momento?
 - Quantos meses de idade, no mínimo, terão Gautino e Gatarina quando a sua família ultrapassar 100 gatos?