UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XIII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova 2ª fase de 2010
Nível 3

Questão 1

Note que

$$\sqrt{\mathbf{n}} - \sqrt{\mathbf{n}-1} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{n}} + \sqrt{\mathbf{n}-1}}. \qquad (*)$$

Portanto a pergunta passa a ser: qual o menor inteiro **n** para o qual

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{n}} + \sqrt{\mathbf{n}-1}} < \frac{1}{2010} \Leftrightarrow \sqrt{\mathbf{n}} + \sqrt{\mathbf{n}-1} > 2010.$$

Como $\sqrt{\mathbf{n}} > \sqrt{\mathbf{n}-1}$ então se $\sqrt{\mathbf{n}-1} \geq \frac{2010}{2} = 1005$ teremos $\sqrt{\mathbf{n}} > 1005$ e então $\sqrt{\mathbf{n}} + \sqrt{\mathbf{n}-1} > 2010$.

Mas

$$\sqrt{\mathbf{n}-1} \geq 1005 \Rightarrow \mathbf{n}-1 \geq 1005^2 \Rightarrow \mathbf{n} \geq 1005^2 + 1.$$

Observe agora que $\mathbf{n} = 1005^2 \Rightarrow \sqrt{\mathbf{n}} = 1005$ e $\sqrt{n-1} < 1005$, o que nos dá

$$\sqrt{\mathbf{n}} + \sqrt{\mathbf{n}-1} < 2010.$$

Portanto o menor inteiro n para o qual a desigualdade acima ocorre é
$1005^2 + 1 = 1010026$.

Resposta: O menor inteiro **n** para o qual a desigualdade acima ocorre é 1010026.

Questão 2

(a) Note que

$$\frac{1}{2^2} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}.$$

Portanto $\mathbf{k} = 1$ e a matriz $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ de $\frac{3}{7}$ será $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{6}{7}$. Observe que $\frac{1}{2} < \frac{6}{7} < 1$.

Resposta: a matriz de $\frac{3}{7}$ é $\frac{6}{7}$.

(b) Note que

$$\frac{1}{2^3} < \frac{3}{16} < \frac{1}{2^2}.$$

Portanto $\mathbf{k} = 2$ e a matriz $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ de $\frac{3}{16}$ será $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{3}{16} \cdot 2^2 = \frac{3}{4}$. Observe que $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$.

Resposta: a matriz de $\frac{3}{16}$ é $\frac{3}{4}$.

(c) Seja $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$. Queremos provar que existe um número $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, que satisfaz $0 < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2}$, tal que $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^k$, em que $\mathbf{k}$ é um número inteiro positivo tal que $\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2^{\mathbf{k}}}$.

Então, tomando $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}}$, qualquer que seja $\mathbf{k}$ inteiro positivo, teremos que $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^{\mathbf{k}}$ e

$$\frac{1}{2^{\mathbf{k}+1}} < \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}} \leq \frac{1}{2^{\mathbf{k}}},$$

pois $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$.

Assim, dado $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$, o número$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}}$ é uma filial de $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, para todo $\mathbf{k}$ inteiro positivo.
Portanto, todo número racional $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$, é matriz de uma infinidade de filiais.

Questão 3

(a) Uma maneira de dar uma resposta para este item consiste em encontrar um terno Pitagórico no qual um dos quadrados correspondentes a um cateto também seja um cubo. Por exemplo, $64 = 4^3 = 8^2$. Então, como $64 + 36 = 100$, temos:

$$4^3 + 6^2 = 10^2,$$

Fornecendo-nos mais uma solução.

(b) Observe agora que

$$\mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{b}^2 = (\mathbf{c} - b) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{b})$$

Assim, se fizermos

$$\mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{a}$$
$$\mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{a}^2$$

teremos $\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{a}+1)}{2}$ e $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{a}-1)}{2}$. Note que $\mathbf{c}$ e $\mathbf{b}$ são inteiros, pois o produto de dois inteiros consecutivos é par.

Portanto, para todo inteiro a maior do que 1, teremos uma solução, com $\mathbf{c}$ e $\mathbf{b}$ encontrados acima.

Assim, existe uma infinidade de soluções de inteiros positivos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ que satisfazem
$\mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$.

Questão 4

Observemos inicialmente que, como a relação (iii) deve ser satisfeita para todo x do domínio, os valores 0 e 1 não devem pertencer à imagem de f. Então:

(a) Fazendo $x = \dfrac{1}{2}$ em (i), obtemos

$$f\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\dfrac{1}{2}\right)} \Rightarrow \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 1.$$

mas então ou $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ ou $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$. Pela observação acima, só podemos ter $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$

Fazendo agora $x = 2$ em (ii), obtemos
$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{f(f(2))} \Rightarrow f(f(2)) = -1$ e, de (iii) obtemos

$$f(f(f(2))) = f(-1) \Rightarrow f(-1) = 2.$$

Finalmente, fazendo $x = 2$ em (i), obtemos

$$f(1-2) = \frac{1}{f(2)} \Rightarrow f(-1) = 2 = \frac{1}{f(2)} \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}.$$

Resposta: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$, $f(-1) = 2$ e $f(2) = \dfrac{1}{2}$.

(b) Para determinar f, mudamos x para em (i). Então, usando sucessivamente (ii) e (iii), obtemos

$$f\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)} \Rightarrow f\left(1-\frac{1}{x}\right) = f(f(x)) \Rightarrow f\left(f\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) = f(f(f(x))) = x.$$

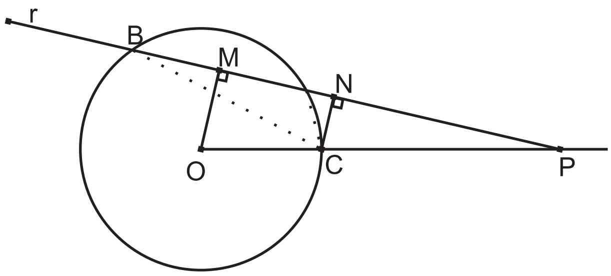
Aplicando f mais uma vez e novamente usando (iii), obtemos

$$f\left(f\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\right) = f(x) \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Resposta: A função f é dada por $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.

Questão 5

(a) Os triângulos retângulos $\triangle POM$ e $\triangle PON$ são semelhantes, pois são retângulos e têm o ângulo agudo $\angle P$ comum.

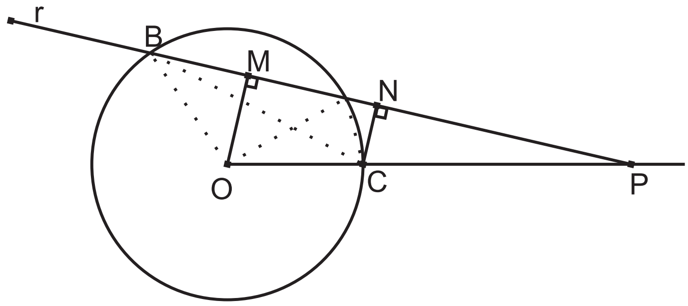


Então, a razão entre as distâncias do ponto O à reta r e de C à reta r é igual a

$$\frac{OM}{CN}=\frac{PO}{PC}=\frac{PC+OC}{PC}=\frac{10+6}{10}=\frac{8}{5}.$$

Resposta: A razão é igual a $\frac{8}{5}$.

(b) Os triângulos $\triangle ABO$ têm a mesma base $\overline{AB}$ e alturas $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$ respectivamente.



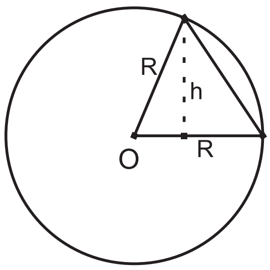
Então, a razão entre suas áreas será

$$\frac{A_{\triangle ABO}}{A_{\triangle ABC}}=\frac{OM}{ON}=\frac{8}{5}.$$

Portanto, a área do triângulo $\triangle ABC$ será máxima quando a área do triângulo $\triangle ABO$ for máxima.

Mas a área do triângulo $\triangle ABO$ será máxima quando o ângulo $\angle AOB$ for reto, pois

$$A_{\triangle AOB}=\frac{R\times h}{2}\leq\frac{R^2}{2} \text{ e } A_{\triangle AOB}=\frac{R^2}{2}\Rightarrow A\hat{O}B=90^\circ.$$



Se então $AB=AO\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ e $OM=\dfrac{AB}{2}=3\sqrt{2}$.

Então, do item (a), temos $\dfrac{OM}{CN}=\dfrac{8}{5}\Rightarrow\dfrac{3\sqrt{2}}{CN}=\dfrac{8}{5}\Rightarrow CN=\dfrac{15\sqrt{2}}{8}$. Logo, a área máxima do triângulo $\triangle ABC$ será:

$$A_{\triangle ABC}=\frac{AB\times CN}{2}=\frac{6\sqrt{2}\times\dfrac{15\sqrt{2}}{8}}{2}=\frac{90}{8}=\frac{45}{4}.$$