UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XIII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova 2ª fase de 2010
Nível 2

Questão 1

Para responder a essa pergunta vamos determinar quantos múltiplos de 5 existem entre 1 e 2010.

Esses múltiplos são $2010/5 = 402$. Portanto o expoente de 5 na fatoração do produto acima é pelo menos 402.

Agora, há múltiplos de $5^2 = 25$, de $5^3 = 125$ e de $5^4 = 625$. Cada um desses múltiplos contribui com mais fatores 5 na fatoração do produto acima.

Os múltiplos de 25 contribuem com mais um fator 5. Note que $2010 = 25 \times 80 + 10$. Portanto há 80 múltiplos de 25 entre os números de 1 a 2010.

Os múltiplos de 125 contribuem com mais um fator 5. Note que $2010 = 125 \times 16 + 10$. Portanto há 16 múltiplos de 125 entre os números de 1 a 2010.

Os múltiplos de 625 contribuem com mais um fator 5. Note que $2010 = 625 \times 3 + 135$. Portanto há 3 múltiplos de 625 entre os números de 1 a 2010.

Então o expoente de 5 na fatoração em primos do produto acima será:

$$402 + 80 + 16 + 3 = 501.$$

Resposta: O expoente de 5 na fatoração em primos do produto acima é igual a 501.

Questão 2
Note que

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}. \qquad (*)$$

Portanto a pergunta passa a ser: qual o menor inteiro n para o qual

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} < 0,01 \Leftrightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 100$$

Como $\sqrt{n} > \sqrt{n-1}$ então se $\sqrt{n-1} \geq 50$ teremos $\sqrt{n} > 50$ e então $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 100$.
Mas

$$\sqrt{n-1} \geq 50 \Rightarrow n - 1 \geq 2500 \Rightarrow n \geq 2501$$

Observe agora que $n = 2500 \Rightarrow \sqrt{n} = 50$ e $\sqrt{n-1} < 50$ o que nos dá

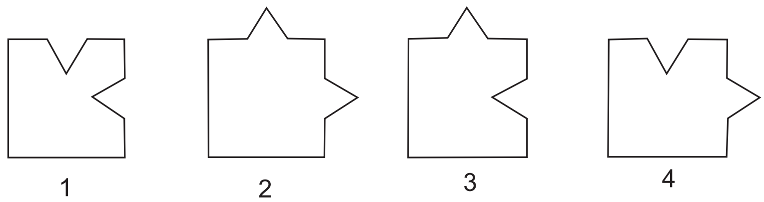
$$\sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 100.$$

Portanto o menor inteiro **n** para o qual a desigualdade acima ocorre é 2501.

Resposta: O menor inteiro **n** para o qual a desigualdade acima ocorre é 2501.

Questão 3

Vamos numerar as peças, para efeito de referência:



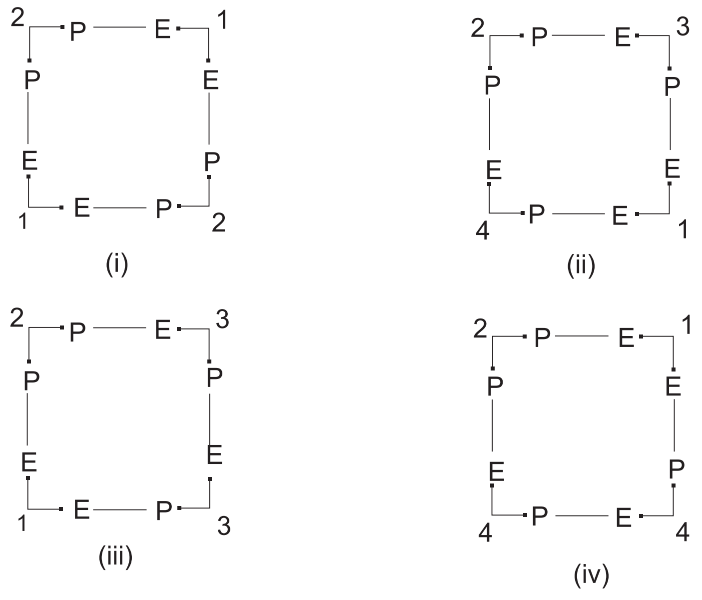
Cada peça tem pontas (P) ou entradas (E). A peça 1 é do tipo (EE), a peça 2 do tipo (PP) e as peças 3 e 4 do tipo (PE). A peça 3 não pode ser obtida da peça 4 por rotação sobre a mesa. Os números de pontas e de entradas de quatro peças em um quadrado devem ser iguais (devido ao encaixe).
Observemos então o seguinte:

(a) Definindo-se duas peças em diagonal no quadrado, as outras duas peças ficam determinadas.

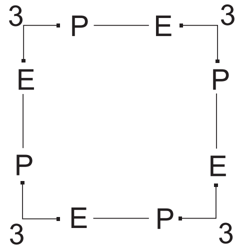
(b) Para cada peça do tipo 2 (PP) usada deverá haver uma peça do tipo 1 (EE), para compensar o número de pontas e de entradas no total, já que as peças do tipo 3 e 4 se auto-compensam.

(c) A peça 4 pode ser obtida da peça 3 virando-a ao contrário (do avesso), e reciprocamente.

Vamos então considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 2. Na sua diagonal podemos ter :
(i) Outra peça tipo 2 - neste caso, as peças da outra diagonal serão do tipo 1.
(ii) Uma peça tipo 1 - neste caso, as peças da outra diagonal serão, uma do tipo 3 e outra do tipo 4, em posições definidas.
(iii) Uma peça do tipo 3 - neste caso, as peças da outra diagonal serão, uma do tipo 1 e outra do tipo 3.
(iv) Uma peça do tipo 4 - neste caso, as peças da outra diagonal serão, uma do tipo 1 e outra do tipo 4.
Vejamos as figuras:

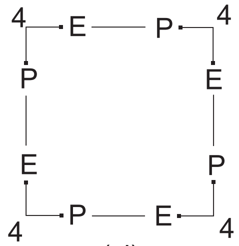


Observe que todos esses quadrados são distintos.
Vamos agora considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 3 e sem peças dos tipos 1 e 2. Então só há uma possibilidade de quadrado: o quadrado com peças todas do tipo 3:



(v)

Vamos agora considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 4 e sem peças dos tipos 1 e 2. Então só há uma possibilidade de quadrado: o quadrado com peças todas do tipo 4:



(vi)

Os seis quadrados obtidos acima são todos distintos por rotação sobre a mesa.
Vamos agora determinar quais desses seis quadrados coincidem ao virar ao contrário (ou seja do avesso). Isso só poderá ocorrer naqueles quadrados que contenham peças do tipo 3 ou 4, mas não ambas.
Então vemos que os quadrados (iii) e (iv) são os mesmos ao virar um ou outro ao contrário. O mesmo ocorre com os quadrados (v) e (vi). Portanto há somente 4 quadrados distintos.

Resposta: São quatro maneiras diferentes de montar um quadrado com quatro peças.

Questão 4

(a) Note que

$$\frac{1}{2^2} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}.$$

Portanto $\mathbf{k} = 1$ e a matriz $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ de $\frac{3}{7}$ será

$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{6}{7}.$$

Observe que $\frac{1}{2} < \frac{6}{7} < 1$.

Resposta: a matriz de $\frac{3}{7}$ é $\frac{6}{7}$.

(b) Note que

$$\frac{1}{2^3} < \frac{3}{16} < \frac{1}{2^2}.$$

Portanto $\mathbf{k} = 2$ e a matriz $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ de $\frac{3}{16}$ será

$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{3}{16} \cdot 2^2 = \frac{3}{4}.$$

Observe que $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$.

Resposta: a matriz de $\frac{3}{16}$ é $\frac{3}{4}$.

(c) Seja $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$. Queremos provar que existe um número $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, que satisfaz $0 < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2}$, tal que $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^{\mathbf{k}}$, em que **k** é um número inteiro positivo tal que $\frac{1}{2^{\mathbf{k}+1} < \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq \frac{1}{2^{\mathbf{k}}}}$.

Então, tomando $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}}$, qualquer que seja **k** inteiro positivo, teremos que $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot 2^{\mathbf{k}}$ e

$$\frac{1}{2^{\mathbf{k}+1} < \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}}} \leq \frac{1}{2^{\mathbf{k}}},$$

pois $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$.

Portanto dado $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ que satisfaz $\frac{1}{2} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \leq 1$, o número $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{2^{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}}$ é uma filial de $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$.

Questão 5

(a) Em 15 partidas disputadas o máximo possível de pontos que podem ser obtidos é igual a $15 \times 3 = 45$. Tomando 20% desse total teremos $45/5 = 9$ pontos. Então a pergunta é: de quantas maneiras distintas ele pode obter 9 pontos em 15 partidas (a menos da ordem em que isso ocorra) ?

Vamos fazer sistematicamente:

- ele pode ter 3 vitórias e 12 derrotas;
- ele pode ter 2 vitórias, 3 empates e 10 derrotas;
- ele pode ter uma vitória, 6 empates e 8 derrotas;
- ele pode ter 9 empates e 6 derrotas.

Resposta: São 4 maneiras distintas, a menos da ordem em que ocorrem os resultados.

(b) O número mínimo deverá ocorrer se todas as partidas seguintes forem ganhas. A quantidade total de pontos disputados, das 15 partidas já jogadas mais esse número mínimo de partidas, é igual a 45 mais três vezes esse número mínimo de partidas.
(I). A quantidade de pontos que a pessoa obterá com as 15 partidas já jogadas mais esse número de partidas, é igual a 9 mais três vezes esse número mínimo de partidas
(II). Como a pessoa deverá alcançar 50% do total de pontos disputados, a diferença entre (I) e (II) deve ser igual ao valor de (II). Mas essa diferença é igual a $45 - 9 = 36$. Portanto a pessoa deverá jogar mais $\frac{(36-9)}{3} = 9$ partidas, ganhando sempre.

Resposta: A pessoa deverá jogar no mínimo 9 partidas.

(c) Sejam **V** o número de vitórias, **D** o número de derrotas e **E** o número de empates obtidos após jogadas as 15 partidas iniciais (item (a)). Então devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}+\mathbf{D}+\mathbf{E} &\leq 15 && (1)\ \text{e} \\ 9+3\mathbf{V}+\mathbf{E} &= \frac{45+3(\mathbf{V}+\mathbf{D}+\mathbf{E})}{2} && (2) \end{aligned}$$

De (2) obtemos:

$$\mathbf{V} = 9+\mathbf{D}+\frac{\mathbf{E}}{3} \qquad (3)$$

A igualdade (3) nos diz que **E** deve ser múltiplo de 3 e que $\mathbf{V} = 9+\mathbf{D}+\dfrac{\mathbf{E}}{3} \geq 9$. Segue-se daí que $\mathbf{D}+\mathbf{E} \leq 6$. Portanto teremos três casos: $\mathbf{E}=0$, $\mathbf{E}=3$ e $\mathbf{E}=6$.

(i) Se $\mathbf{E}=0$, então de (3) teremos $\mathbf{V}=9+\mathbf{D}$ e, de (1), teremos que

$$9+\mathbf{D}+\mathbf{D} \leq 14 \Rightarrow \mathbf{D} \leq 3$$

Portanto, se

$\mathbf{D}=3$ então $\mathbf{V}=12$,
$\mathbf{D}=2$ então $\mathbf{V}=11$,
$\mathbf{D}=1$ então $\mathbf{V}=10$
e
$\mathbf{D}=0$ então $\mathbf{V}=9$.

(ii) Se $\mathbf{E}=3$, então de (3) teremos $\mathbf{V}=9+\mathbf{D}+1=\mathbf{10}+\mathbf{D}$ e, de (1) teremos que

$$10+\mathbf{D}+\mathbf{D}+3 \leq 15 \Rightarrow \mathbf{D} \leq 1.$$

Portanto, se

$\mathbf{D}=1$ então $\mathbf{V}=11$ e
$\mathbf{D}=0$ então $\mathbf{V}=10$.

(iii) Se $\mathbf{E}=6$, então de (3) teremos $\mathbf{V}=9+\mathbf{D}+2=11+\mathbf{D}$ e, de (1) teríamos que

$$11+\mathbf{D}+\mathbf{D}+6 \leq 15, \text{ o que é impossível.}$$

Resposta: Há seis maneiras para (**V**,**E**,**D**) de se conseguir o pedido neste item: (12, 0, 3), (11, 0, 2), (10, 0, 1), (9, 0, 0), (11, 3, 1) e (10, 3, 0).