UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XIII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova 2ª fase de 2010
Nível 1

Questão 1

Observe que

$$2010 = 67 \times 30$$

Portanto há 30 múltiplos de 67 entre 1 e 2010, e o fator 67 aparecerá pelo menos 30 vezes no produto de 1 a 2010. Agora, como

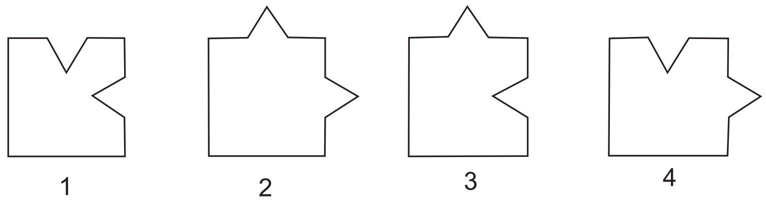
$$67^2 = 4489 > 2010,$$

então não há números que são potências de 67, com expoente maior do que um, nos números de 1 a 2010. Portanto o expoente de 67 no produto de 1 a 2010 é igual a 30.

Resposta: O expoente de 67 no produto de 1 a 2010 é igual a 30.

Questão 2

Vamos numerar as peças, para efeito de referência:

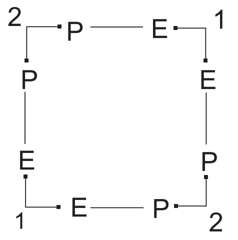


Cada peça tem pontas (P) ou entradas (E). A peça 1 é do tipo (EE), a peça 2 do tipo (PP) e as peças 3 e 4 do tipo (PE). A peça 3 não pode ser obtida da peça 4 por rotação sobre a mesa. Os números de pontas e de entradas de quatro peças em um quadrado devem ser iguais (devido ao encaixe).
Observemos então o seguinte:

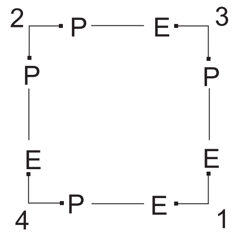
(a) Definindo-se duas peças em diagonal no quadrado, as outras duas peças ficam determinadas.

(b) b) Para cada peça do tipo 2 (PP) usada deverá haver uma peça do tipo 1 (EE), para compensar o número de pontas e de entradas no total, já que as peças do tipo 3 e 4 se auto-compensam.

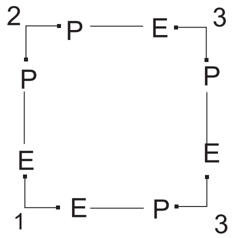
Vamos então considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 2. Na sua diagonal podemos ter :
(i) Outra peça tipo 2 - neste caso, as peças da outra diagonal serão do tipo 1.
(ii) Uma peça tipo 1 - neste caso, as peças da outra diagonal serão, uma do tipo 3 e outra do tipo 4, em posições definidas.
(iii) Uma peça do tipo 3 - neste caso, as peças da outra diagonal serão, uma do tipo 1 e outra do tipo 3.
(iv) Uma peça do tipo 4 - neste caso, as peças da outra diagonal serão, uma do tipo 1 e outra do tipo 4.
Vejamos as figuras:



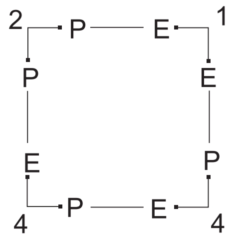
(i)



(ii)

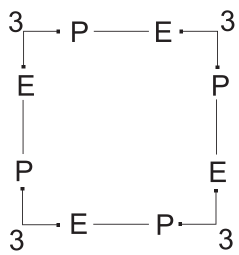


(iii)



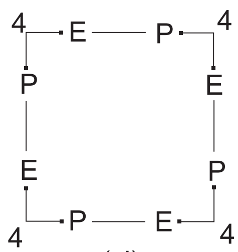
(iv)

Observe que todos esses quadrados são distintos.
Vamos agora considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 3 e sem peças dos tipos 1 e 2. Então só há uma possibilidade de quadrado: o quadrado com peças todas do tipo 3:



(v)

Vamos agora considerar os quadrados montados com uma peça do tipo 4 e sem peças dos tipos 1 e 2. Então só há uma possibilidade de quadrado: o quadrado com peças todas do tipo 4:



(vi)

Os seis quadrados obtidos acima são todos distintos.
Resposta: São seis maneiras diferentes de montar um quadrado branco.

Questão 3

(a) O maior número do conjunto é aquele que é obtido pela multiplicação dos três 3:

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

O menor número do conjunto é aquele que é obtido pela subtração de $3 \times 3 = 9$ do número 3:

$$3 - (3 \times 3) = -6$$

Resposta: O maior número é 27 e o menor é -6.

(b) A melhor maneira de resolver esse item é realizar as operações de forma sistemática, obtendo todos os possíveis valores (o que incluirá o item a):

$(3 \times 3) \times 3 = 27$
$(3 \times 3) + 3 = 12$
$(3 \times 3) - 3 = 6$ e $3 - (3 \times 3) = -6$
$(3 \times 3)/3 = 3$ e $3/(3 \times 3)$ não é inteiro

$(3 + 3) \times 3 = 18$
$(3 + 3) + 3 = 9$
$(3 + 3) - 3 = 3$ e $3 - (3 + 3) = -3$
$(3 + 3)/3 = 3$ e $3/(3 + 3)$ não é inteiro

$(3 - 3) \times 3 = 0$
$(3 - 3) + 3 = 3$
$(3 - 3) - 3 = -3$ e $3 - (3 - 3) = 3$
$(3 - 3)/3 = 0$ e $3/(3 - 3)$ não tem sentido

$(3/3) \times 3 = 3$
$(3/3) + 3 = 4$
$(3/3) - 3 = -2$ e $3 - (3/3) = 2$
$(3/3)/3$ não é inteiro e $3/(3/3) = 3$

Resposta: Os números do conjunto $\{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ que podem ser obtidos dessa maneira são: -6, -2, 0, 2, 4, 6, 12 e 18.

Questão 4

(a) Em 15 partidas disputadas o máximo possível de pontos que podem ser obtidos é igual a $15 \times 3 = 45$.
Tomando 20% desse total teremos $\frac{45}{5} = 9$ pontos. Então a pergunta é: de quantas maneiras distintas ele pode obter 9 pontos em 15 partidas (a menos da ordem em que isso ocorra)?

Vamos fazer sistematicamente:

- ele pode ter 3 vitórias e 12 derrotas;
- ele pode ter 2 vitórias, 3 empates e 10 derrotas;
- ele pode ter uma vitória, 6 empates e 8 derrotas;
- ele pode ter 9 empates e 6 derrotas.

Resposta: São 4 maneiras distintas, a menos da ordem em que ocorrem os resultados.

(b) O número mínimo deverá ocorrer se todas as partidas seguintes forem ganhas. A quantidade total de pontos disputados, das 15 partidas já jogadas mais esse número mínimo de partidas, é igual a 45 mais três vezes esse número mínimo de partidas.
(I). A quantidade de pontos que a pessoa obterá com as 15 partidas já jogadas mais esse número de partidas, é igual a 9 mais três vezes esse número mínimo de partidas.
(II). Como a pessoa deverá alcançar 50% do total de pontos disputados, a diferença entre (I) e (II) deve ser igual ao valor de (II). Mas essa diferença é igual a $45 - 9 = 36$. Portanto a pessoa deverá jogar mais $\frac{(36 - 9)}{3} = 9$ partidas, ganhando sempre.

Resposta: A pessoa deverá jogar no mínimo 9 partidas.

Questão 5

(a) Gautino e Gatarina têm seu primeiro casal aos seis meses de idade. Para ter mais seis casais de filhos eles deverão ter, no mínimo, mais $6 \times 3 = 18$ meses de idade. Portanto, aos $6 + 18 = 24$ meses, ou seja, 2 anos de idade, eles acabaram de ter o sétimo casal de gatos.
Resposta: Aos 24 meses de idade.

(b) Vejamos o desenvolvimento das ninhadas:
- Aos 6 meses Gautino e Gatarina têm um casal, que chamaremos de casal 1 (C1).
- Aos 9 meses Gautino e Gatarina têm mais um casal, que chamaremos de C2.
- Aos 12 meses Gautino e Gatarina têm mais um casal, que chamaremos de C3, e C1 tem o seu primeiro casal (C11). Portanto são gerados 2 casais aos 12 meses de idade de Gautino e Gatarina.
- Aos 15 meses Gautino e Gatarina têm mais um casal, que chamaremos de C4, o casal C2 tem seu primeiro casal (C21) e o casal C1 tem seu segundo casal (C12). Portanto nascem 3 casais quando Gautino e Gatarina têm 15 meses de idade.
- Aos 18 meses Gautino e Gatarina têm mais um casal, que chamaremos de C5, o casal C3 tem seu primeiro casal (C31), o casal C2 tem seu segundo casal (C22), o casal C1 tem seu terceiro casal (C13) e o casal C11 tem seu primeiro casal (C111). Portanto nascem 5 casais nessa época.

Basta agora observar a seqüência de casais que nascem:

6 meses	1 casal
9 meses	1 casal
12 meses	$1 + 1 = 2$ casais
15 meses	$1 + 2 = 3$ casais
18 meses	$2 + 3 = 5$ casais

Essa é a seqüência de Fibonacci. Então teremos:

21 meses	$3 + 5 = 8$ casais
24 meses	$5 + 8 = 13$ casais

No total, Gautino e Gatarina terão gerado $1+1+2+3+5+8+13 = 33$ casais, ou seja, 66 gatos.

Resposta: Aos 24 meses de idade Gautino e Gatarina terão 66 descendentes no máximo.

(c) Aos 27 meses nascerão mais 8 + 13 = 21 casais, ou seja, mais 42 gatos, totalizando $66 + 42 = 108$ descendentes de Gautino e Gatarina.

Resposta: Aos 27 meses de idade, no mínimo, Gautino e Gatarina terão mais de 100 gatos em sua família.