UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Prova – 2 ª fase de 2009
Nível 3

---

1. Chamaremos um número inteiro y maior do que 1 de *harmômico* se existir um número inteiro positivo x de n algarismos tal que:

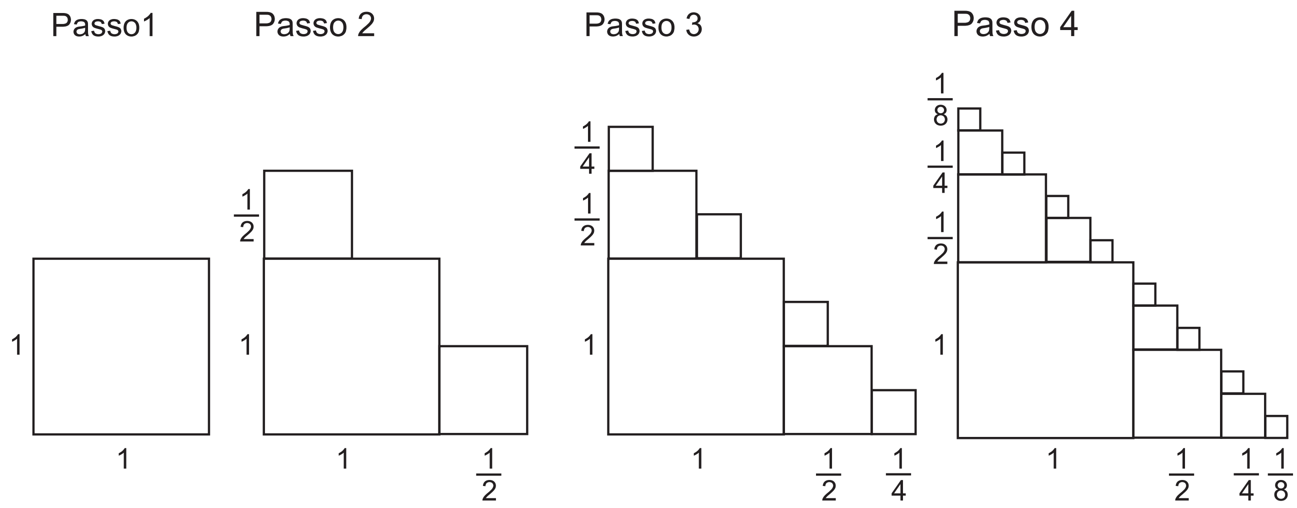
$$\frac{y}{y-1} = \frac{x}{10^n - x}$$

Neste caso diremos que x é um conjugado hamônico de y.

a) Encontre o menor número harmônico.
b) Prove que todo número harmônico, exceto o menor deles, termina em 13 ou em 63.
c) Mostre que não é possível encontrar um número harmônico cujo conjugado harmônico seja também harmônico.

2. Escreva 2009 como a soma de três quadrados perfeitos positivos.

3. Considere a figura plana construída com quadrados empilhados de forma recursiva da seguinte maneira:



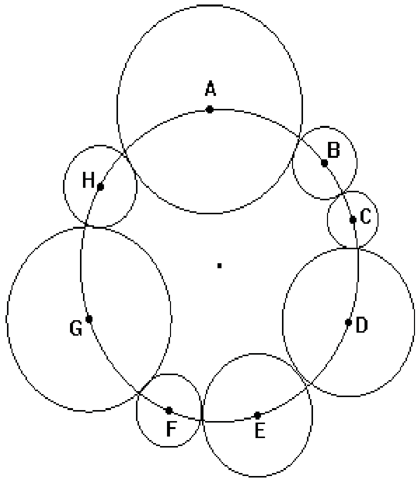
Após uma infinidade de passos obtemos uma figura final com infinitos quadrados (suponha que isso fosse possível de ser feito).

a) Calcule o perímetro da figura final.
b) Calcule a área da figura final.

4. Encontre todos os pares (x, y), com x e y inteiros, para os quais a expressão

$$(x^2 + 3y^2) \cdot 2^{(1-x^2-y^2)}$$

atinge seu valor máximo. Que valor é esse?



5. Oito pontos A, B, C, D, E, F, G e H são distribuídos aleatoriamente em uma circunferência de raio R fixado. Se for possível traçar oito circunferências, com centros em cada um desses pontos e com raios menores do que a distância de cada um deles aos dois pontos vizinhos, tais que elas sejam tangentes consecutivamente (conforme figura), diremos que essa distribuição de pontos apresenta solução para o problema de tangência das circunferências.

a) Mostre que, se os pontos forem distribuídos formando um octógono com quatro pares de lados consecutivos de mesmo comprimento (por exemplo, se AB = BC, CD = DE, EF = FG e GH = HA), então essa distribuição de pontos apresenta uma infinidade de soluções para o problema de tangência.

b) Dê um exemplo de uma distribuição de pontos que não apresenta solução para o problema de tangência.

c) Seja S a soma dos comprimentos das oito circunferências quando uma distribuição de pontos apresenta solução para o problema de tangência. Mostre que S não varia, qualquer que seja a solução para a distribuição de pontos do item (a).

d) Calcule S , em função de R, no caso em que os oito pontos estão distribuídos formando um octógono regular.