UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da XII Prova da ORM - 2ª fase de 2009
Nível 3

1. **Chamaremos um número inteiro y maior do que 1 de *harmômico* se existir um número inteiro positivo x de n algarismos tal que:**

$$\frac{y}{y-1} = \frac{x}{10^n - x}$$

Neste caso diremos que x é um conjugado hamônico de y.

a) Encontre o menor número harmônico.
b) Prove que todo número harmônico, exceto o menor deles, termina em 13 ou em 63.
c) Mostre que não é possível encontrar um número harmônico cujo conjugado harmônico seja também harmônico.

Solução:
De $\frac{y}{y-1} = \frac{x}{10^n - x}$, obtemos $x = \frac{10^n y}{2y-1}$.
Os números y e $2y-1$ não possuem fatores em comum pois, caso contrário, se $y = mk$ e $2y-1 = lk$, com $k > 1$, teríamos $2y = 2mk$ e $2mk - 1 = lk$ ou $(2m-l)k = 1$; o que nos dá $k = 1$. Portanto, $2y-1$ divide 10^n e, como $2y-1$ é ímpar, então $2y-1$ deve ser potência de 5:
$2y - 1 = 5^p$, ou $y = \frac{5^p + 1}{2}$.

a) Se $p = 0$, então $y = 1$ e não serve.

Se $p = 1$, então $y = 3$, que é o menor número harmônico.
Nesse caso, $x = \frac{10.3}{6-1} = 6$.

Resposta:
O menor número harmônico é $x = 6$.

b) Para $p = 2$, temos $y = \frac{25+1}{2} = 13$ e $x = \frac{10^2.13}{25} = 52$ (para x com 1 algarismos não teríamos x inteiro).

Para $p = 3$, temos $y = \frac{126}{2} = 63$ e $x = \frac{10^3.63}{125} = 498$ (para x com 2 algarismos não teríamos x inteiro).

Agora note que, se y termina em 13, então $y = 10^2.a + 13$, para algum inteiro a. Então $10^2.a + 13 = \frac{5^n + 1}{2}$, ou $5^n = 2.10^2 a + 25$, o que nos dá para o número harmônico seguinte:
$\frac{5^{n+1} + 1}{2} = \frac{10.10^2 a + 125 + 1}{2} = 5a.10^2 + 63$, ou seja, o próximo número harmônico termina em 63.

Se y termina em 63, então $y = 10^2.b + 63 = \frac{5^n + 1}{2}$, o que nos dá para o número harmônico seguinte:
$\frac{5^{n+1} + 1}{2} = \frac{10.10^2 b + 5.125 + 1}{2} = 5b.10^2 + 313$, ou seja, o próximo número harmônico termina em 13.

c) De $\frac{y}{y-1} = \frac{x}{10^n - x}$, obtemos $10^n y = (2y-1)x$ e, como $10^n y$ é par e $2y - 1$ é ímpar, então x deve ser par (qualquer conjugado harmônico é par). Como todos os números harmônicos são ímpares (terminam em 3), então não é possível encontrar um número harmônico cujo conjugado harmônico seja harmônico.

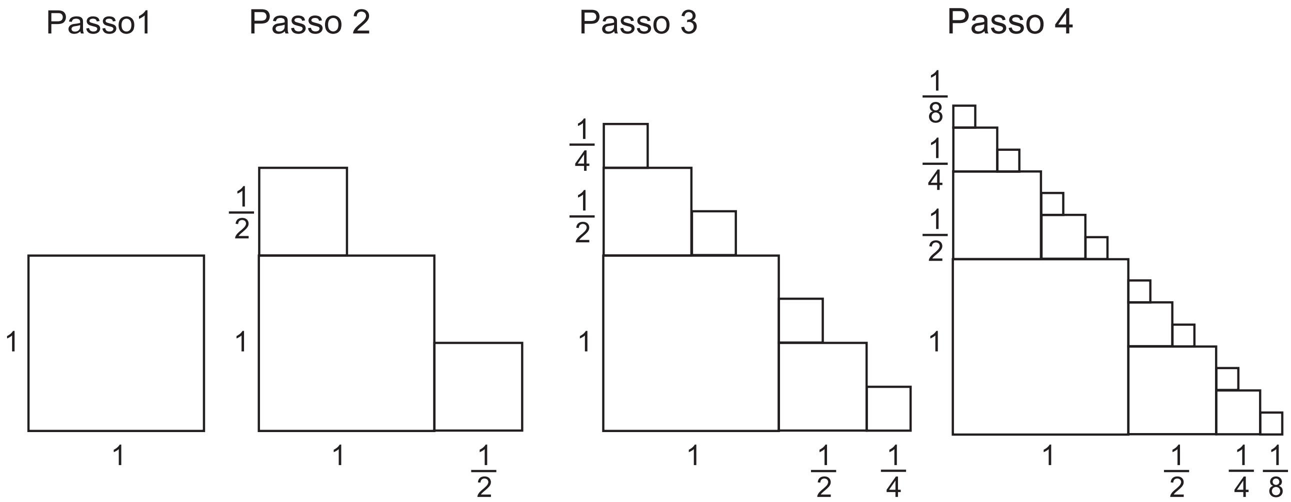
2. **Escreva 2009 como a soma de três quadrados perfeitos positivos.**

Solução:
Note que 7 divide 2009. Daí temos:

$$2009 = 7^2 \cdot 41 = 7^2(16 + 25) = 7^2(16 + 16 + 9) = 7^2(4^2 + 4^2 + 3^2) = 28^2 + 28^2 + 21^2.$$

OBS: Há outras respostas possíveis. Por exemplo: $2009 = 1600 + 400 + 9 = 40^2 + 20^2 + 3^2$.

3. **Considere a figura plana construída com quadrados empilhados de forma recursiva da seguinte maneira:**



Após uma infinidade de passos obtemos uma figura final com infinitos quadrados (suponha que isso fosse possível de ser feito).

a) **Calcule o perímetro da figura final.**

b) **Calcule a área da figura final.**

Solução:

a) Note que, no passo n, a altura e o comprimento da pilha são iguais a $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$.
Assim, o perímetro da figura nesse passo n é igual a

$$2p_n = 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

No "passo ∞"teremos

$$2p_\infty = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 8$$

Resposta:
O perímetro da figura final será 8.

b) No passo n a área total da figura será:

$$A_n = 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \ldots + 2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Assim, no "passo ∞"teremos:

$$A_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

OBS: Embora as figuras se "aproximem", em termos de área, do triângulo retângulo de catetos iguais a 2. Em termos de perímetro isso não acontece, pois para n "bem grande"o perímetro está "próximo"de 8, e o perímetro daquele triângulo é igual a $2 + 2 + 2\sqrt{2} \cong 6,8$.

Resposta:
A área da figura final será 2.

4. **Encontre todos os pares (x, y), com x e y inteiros, para os quais a expressão**

$$(x^2 + 3y^2) \cdot 2^{(1-x^2-y^2)}$$

atinge seu valor máximo. Que valor é esse?

Solução:
Vamos analisar os valores da expressão para x e y na circunferência de raio k:

$$x^2 + y^2 = k^2$$

(e centro $(0, 0)$). Então,

$$(x^2 + 3y^2) \cdot 2^{1-x^2-y^2} = (x^2 + y^2 + 2y^2) \cdot 2^{1-(x^2+y^2)} = (k^2 + 2y^2) \cdot 2^{1-k^2}$$

Como 2^{1-k^2} é constante (na circunferência) teremos que o valor máximo da expressão, para x e y na circunferência de raio k, será atingido quando $y = \pm k$ (e neste caso $x = 0$). Tal valor será

$$3k^2 \cdot 2^{1-k^2} = \frac{6k^2}{2^{k^2}} = \frac{6n}{2^n}, \quad n = k^2.$$

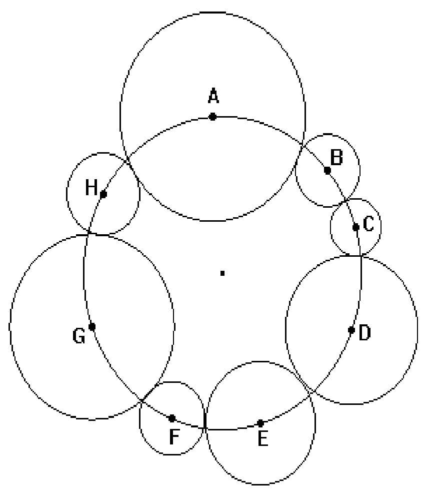
Basta então analisar os valores de $\frac{6n}{2^n}$, $n = k^2$.
Se $n = 1$ ou $n = 2$ teremos o valor 3. Para $n = 1$ teremos $k = 1$, e portanto $y = \pm 1$. Para $n = 2$ teremos $k = \sqrt{2}$, o que não nos dá valor inteiro para y.
Vamos mostrar agora que $\frac{6n}{2^n} < 3$, se $n \geq 3$. Para $n = 3$ teremos $\frac{6n}{2^n} = \frac{18}{8} < 3$. Suponhamos verdadeiro para n. Então, para $n + 1$:

$$6(n + 1) = 6n + 6 < 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 2 = 3(2^n + 2).$$

Mas $2^n + 2 = 2(2^{n-1} + 1) < 2 \cdot 2^n < 2^{n+1}$, já que $2^{n-1} + 1 < 2^n$, se $n \geq 3$.
Logo, o valor máximo é 3 e é atingido para $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Resposta:
O valor máximo é 3 e é atingido para $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

5. **Oito pontos A, B, C, D, E, F, G e H são distribuídos aleatoriamente em uma circunferência de raio R fixado. Se for possível traçar oito circunferências, com centros em cada um desses pontos e com raios menores do que a distância de cada um deles aos dois pontos vizinhos, tais que elas sejam tangentes consecutivamente (conforme figura), diremos que essa distribuição de pontos apresenta solução para o problema de tangência das circunferências.**



a) **Mostre que, se os pontos forem distribuídos formando um octógono com quatro pares de lados consecutivos de mesmo comprimento (por exemplo, se AB = BC, CD = DE, EF = FG e GH = HA), então essa distribuição de pontos apresenta uma infinidade de soluções para o problema de tangência.**

b) **Dê um exemplo de uma distribuição de pontos que não apresenta solução para o problema de tangência.**

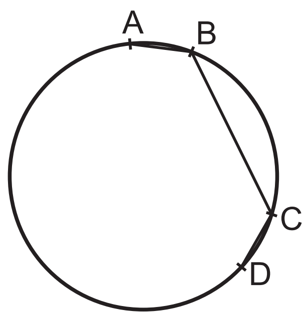
c) **Seja S a soma dos comprimentos das oito circunferências quando uma distribuição de pontos apresenta solução para o problema de tangência. Mostre que S não varia, qualquer que seja a solução para a distribuição de pontos do item (a).**

d) **Calcule S , em função de R, no caso em que os oito pontos estão distribuídos formando um octógono regular.**

Solução:
Antes de mais nada notamos que, se as duas circunferências são tangentes, então os seus centros e o ponto de tangência são colineares.

a) Seja B o vértice tal que $AB = BC$, e tal que esses sejam os menores lados do polígone $ABCDEFG$. Então, considerando que $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FG$ e $GH = HA$ e que T_1 é o ponto de tangência entre A e B (das circunferências de centro A e B), T_2 entre B e C, T_3 entre C e D, T_4 entre D e E, T_5 entre E e F, T_6 entre F e G, T_7 entre G e H, e T_8 entre H e A, teremos, chamando de r_A o raio da circunferência de centro A, de r_B o raio da circunferência de centro B e assim por diante, as seguintes igualdades: $BT_1 = BT_2 = r_B$
$CT_2 = CT_3 = r_C$
$DT_3 = DT_4 = r_D$
$ET_4 = ET_5 = r_E$
$FT_5 = FT_6 = r_F$
$GT_6 = GT_7 = r_G$
$HT_7 = HT_8 = r_H$
$AT_8 = AT_1 = r_A$
Das igualdades acima e de:
$AB = BC$ obtemos que $r_A = AT_8 = AT_1 = CT_2 = CT_3 = r_C$
$CD = DE$ obtemos que $r_C = CT_3 = ET_4 = r_E$
$GH = HA$ obtemos que $r_G = GT_7 = AT_8 = r_A$
Portanto $r_A = r_C = r_E = r_G$ e haverá quatro circunferências de mesmo raio. Note que começando pelo vértice que possui os dois lados iguais consecutivos menores, sempre podemos obter as oito circunferências de modo que a distribuição apresente solução para o problema de tangência das circunferências. Além diso, qualquer pequena variação em $r_B = BT_1 = BT_2$, continuará a dar soluções para o problema. Portanto há uma infinidade de soluções.

b) Basta tomar uma distribuição tal que $AB = CD$ e tal que $AB < \frac{BC}{2}$. Nesse caso, teremos $BT_1 < AB < \frac{BC}{2}$, o que nos dá $BT_1 = BT_2 < \frac{BC}{2}$ e daí $CT_2 > \frac{BC}{2} = CD$, ou seja, qualquer que seja r_A temos que $r_C > CD$, e não haverá solução para o problema de tangência.

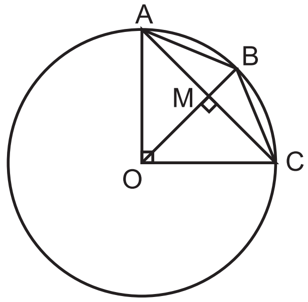


c) A soma S será dada por:

$$S = 2\pi(r_A + r_B + r_C + r_D + r_E + r_F + r_G + r_H),$$

mas $2(r_A + r_B + r_C + r_D + r_E + r_F + r_G + r_H)$ é o perímetro do polígono $ABCDEFGH$, que é constante, fixados os oito pontos.

d) Se $ABCDEFG$ for um octógono regular, então:



$$S = \pi 2p = 8\pi l, \text{ com}$$
$$l = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH$$

Vamos calcular l em função de R;
Temos que AC é o lado do quadrado inscrito na circunferência. Portanto $AC = R\sqrt{2}$. Assim, $AM = CM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.
Agora, como $O\widehat{A}C = O\widehat{C}A = 45^o$, e como $A\widehat{O}B = C\widehat{O}B = 45^o$, então
$OM = AM = CM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Logo, $BM = OB - OM = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{2}(2-\sqrt{2})$.
No $\triangle BMC$:

$$BC^2 = CM^2 + BM^2, oul^2 = [\frac{R\sqrt{2}}{2}]^2 + [\frac{R}{2}(2-\sqrt{2})] = \frac{2R^2}{4} + \frac{R^2(6-4\sqrt{2})}{4} = \frac{R^2(8-4\sqrt{2})}{4} = R^2(2-\sqrt{2}).$$

Portanto, $l = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ e daí $S = 8\pi R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Resposta:
$S = 8\pi R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Local: PET Matemática – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas – Universidade Federal de Santa Catarina
Fone/FAX: (48) 3721-6809 orm@pet.mtm.ufsc.br www.orm.mtm.ufsc.br