Gabarito da XII Prova da ORM - 2ª fase de 2009
Nível 2

1. **Amanda, Bianca, Cláudia, Carmem, Danilo, Eliezer, Lício, Michely, Nereu e Virgínia são dez amigos que possuem pelo menos um gato em suas casas. Bianca, Michely e Eliezer têm o mesmo número de gatos e Carmen e Lício também possuem o mesmo número de gatos. Além disso, Virgínia não tem o mesmo número de gatos que Bianca. Sabe-se as somas dos gatos de algumas dessas pessoas, segundo as linhas e colunas da tabela a seguir:**

	Danilo	Bianca	Cláudia	10
Nereu	Michely	Virgínia	Carmen	30
Eliezer	Amanda	Lício		21
13	13	24	11	

Por exemplo, na quarta coluna, a soma dos números de gatos de Cláudia e Carmem é 11, **e na terceira linha, a soma dos números de gatos de Eliezer, Amanda e Lício é** 21.**Quantos gatos têm cada um deles?**

Solução:
Sejam:
A - número de gatos de Amanda
B - número de gatos de Bianca
C - número de gatos de Cláudia
K - número de gatos de Carmem
D - número de gatos de Danilo
E - número de gatos de Eliezer
L - número de gatos de Lício
M - número de gatos de Michely
N - número de gatos de Nereu
V - número de gatos de Virgínia

Então as três linhas e as quatro colunas fornecem as sete equações:

$D + B + C = 10$
$N + M + V + K = 30$
$E + A + L = 21$
$N + E = 13$
$D + M + A = 13$
$B + V + L = 24$
$C + K = 11$

Sabemos que $B = M = E$, e que $K = L$. Substituindo M e E por B, e L por K nas equações acima obtemos:

$D + B + C = 10$ **(1)**
$N + B + V + K = 30$ **(2)**
$B + A + K = 21$ **(3)**
$N + B = 13$ **(4)**
$D + B + A = 13$ **(5)**
$B + V + K = 24$ **(6)**
$C + K = 11$ **(7)**

De **(2)** e **(6)**, obtemos $N + 24 = 30$ ou $N = 6$.

Levando esse valor para **(4)**, obtemos: $6 + B = 13$ ou $B = 7$.

Levando esses valores em **(1)**, **(3)**, **(5)**, **(7)** obtemos:

$D + C = 3$ **(8)**
$A + K = 14$ **(9)**
$D + A = 6$ **(10)**
$C + K = 11$ **(11)**

A equação **(8)** é fundamental e fornece-nos duas respostas possíveis:

a) $D = 1; C = 2$
b) $D = 2; C = 1$

Então, levando, em cada caso, esses valores nas outras equações, obtemos:

a) $D = 1$;

$C = 2$;
$1 + A = 6 \Longrightarrow A = 5$;
$5 + K = 14 \Longrightarrow K = 9$;
$7 + V + 9 = 24 \Longrightarrow V = 8$

b) $D = 2$;

$C = 1$;
$2 + A = 6 \Longrightarrow A = 4$;
$4 + K = 14 \Longrightarrow K = 10$;
$7 + V + 10 = 24 \Longrightarrow V = 7$

O caso b é descartado, pois $V = B = 7$.

Resposta:
$N = 6$
$B = M = E = 7$
$D = 1$
$C = 2$
$A = 5$
$K = L = 9$
$V = 8$

2. **Escreva** 2009 **como soma dos quadrados de dois números inteiros positivos.**

Solução:
Precisamos encontrar uma nova forma de representar o número 2009. Através da fatoração temos que

$$2009 = 7^2 \cdot 41$$

Contudo ainda não possuimos uma soma, nem dois números quadrados. Note que $41 = 16 + 25$, que são dois números quadrados (4^2 e 5^2 respectivamente). Então:

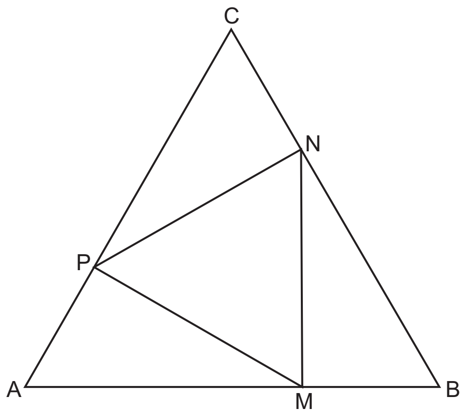
$$2009 = 7^2 \cdot (16 + 25) = 7^2 \cdot (4^2 + 5^2)$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação obtemos:

$$2009 = 7^2 \cdot 4^2 + 7^2 \cdot 5^2 = 28^2 + 35^2$$

Resposta:
O número 2009 pode ser escrito como a soma dos quadrados de 28 e 35.

3. **Na figura, ΔABC é um triângulo equilátero de lado igual a l, e ΔMNP é um triângulo inscrito em ΔABC tal que MN é perpendicular a AB, NP é perpendicular a BC e PM é perpendicular a AC.**



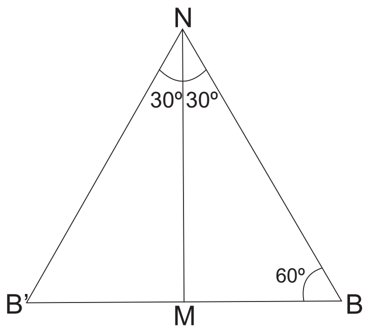
Explique porque ΔMNP também é equilátero e calcule a razão entre as áreas dos triângulos ΔABC e ΔMNP.

Solução:
Observe que os triângulos $\triangle AMP$, $\triangle BNM$ e $\triangle CP$ são retângulos com ângulos 30º e 60º graus. Segue-se que os ângulos do $\triangle MNP$ são: $\angle PMN = \angle MNP = \angle NPM = 60^o$.

Mas então aqueles triângulos retângulos são congruentes. Por outro lado, em qualquer daqueles triângulos retângulos tem-se que o cateto menor é igual à metade da hipotenusa, ou seja, $BM = \dfrac{BM}{2}$, $CN = \dfrac{CP}{2}$ e $AP = \dfrac{AM}{2}$, ou ainda, cada lado do triângulo $\triangle ABC$ está dividido na razão 2 : 1 pelos pontos M, N e P respectivamente:

$CN = BM = AP = \dfrac{l}{3}$ e $BN = AM = CP = \dfrac{2l}{3}$.

Isto ocorre porque, se fizermos no $\triangle BMN$,



então $\widehat{B'} = 60^o$, e $\triangle B'BN$ será equilátero. Logo, como $B'M = BM$ (pois os triângulos $\triangle B'MN$ e $\triangle BMN$ são congruentes) teremos $BM = \dfrac{BN}{2}$.

Então, no $\triangle BMN$, obteremos (usando o Teorema de Pitágoras) que:

$MN^2 = BN^2 - BM^2 = \left(\dfrac{2l}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{l}{3}\right)^2 = \dfrac{3l^2}{3^2}$, ou $MN = \dfrac{l\sqrt{3}}{3}$.

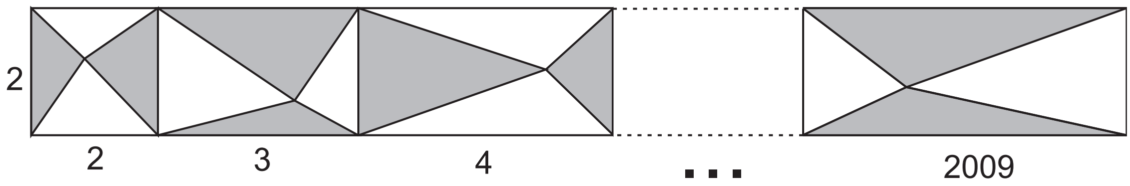
Então Área $\triangle BMN = \dfrac{BM \times MN}{2} = \dfrac{\frac{l}{3} \times \frac{l\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{18}$.

Assim: Área $\triangle MNP =$ Área $\triangle ABC - 3 \times$ Área $\triangle BMN = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{l^2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{12}$

Resposta:

$$\frac{\text{Área } \triangle ABC}{\text{Área } \triangle MNP} = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{l^2\sqrt{3}}{12}} = 3$$

4. **Na figura abaixo estão 2008 retângulos colados, todos de mesma altura 2cm, e de bases 2cm, 3cm, 4cm, ..., 2009cm (são mostrados apenas os três primeiros e o último retângulo). Em cada um desses retângulos há um ponto em seu interior que forma, com os vértices do retângulo, dois triângulos que estão sombreados. Calcule a soma das áreas de todos esses triângulos sombreados.**



Solução:
Em qualquer retângulo de base n, a área rachurada será igual a $\frac{2 \cdot n}{2} = n$, pois os dois triângulos sombreados têm lados iguais (altura do retângulo ou base do retângulo) e alturas que somadas são iguais a base (ou a altura) do retângulo. Assim, a soma A das áreas sombreadas será:

$$A = 2 + 3 + 4 + ... + 2008 + 2009$$

Vamos calcular esta soma.
Seja

$$S = 1 + 2 + ... + 2008 + 2009$$

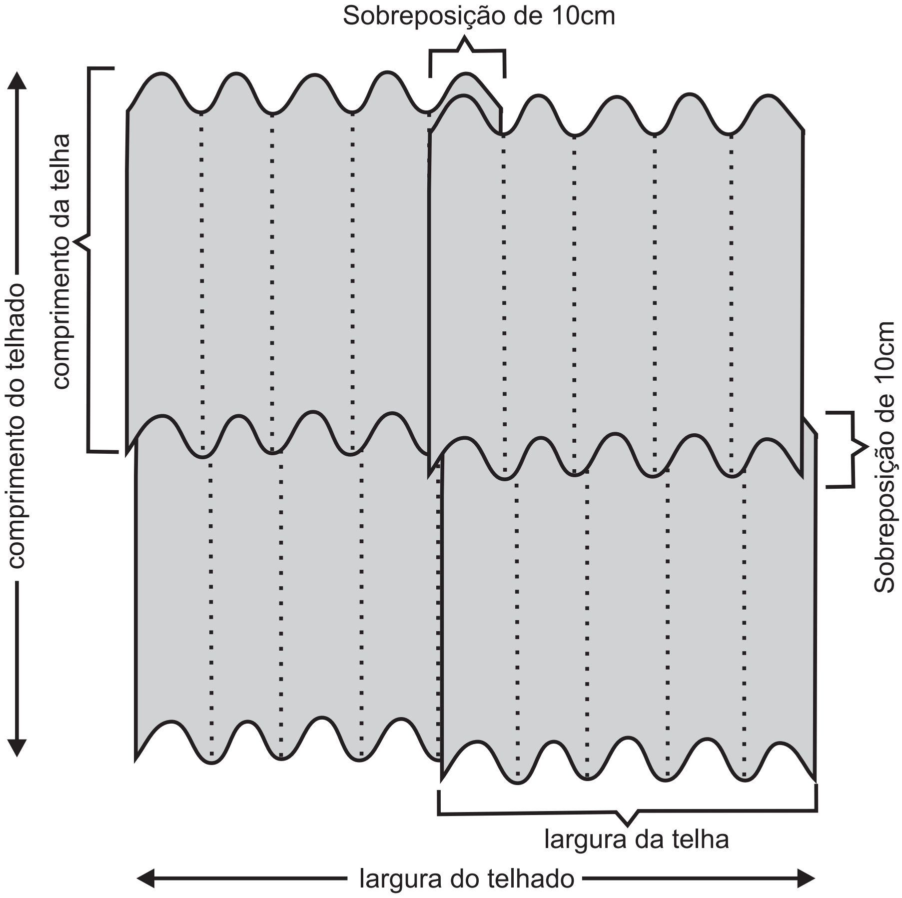
$$S = 2009 + 2008 + ... + 2 + 1$$

$$2S = (1 + 2009) + (2 + 2008) + (3 + 2007) + (2009 + 1) = 2009 \cdot 2010$$

$$S = 2009 \cdot 2005 = 2019045$$

Resposta:
$A = S - 1 = 2019044.$

5. **O Sr. Tejado pretende construir um telhado retangular de 3m de comprimento por 10m de largura. Uma loja vende três tipos de telhas , T_1, T_2 e T_3, todas com 1 metro de largura e comprimentos de 1 metro, 60 centímetros e 40 centímetros, respectivamente. Os três tipos de telhas podem ser usados para cobrir o telhado (não é necessário usar apenas um tipo de telha), no entanto, quaisquer duas telhas vizinhas devem ser sobrepostas por 10cm (conforme exemplo com um telhado de 4 telhas). Além disso, qualquer fileira de telhas ao longo da largura deve ser formada por telhas de mesmo tipo, sendo permitida a variação de tipo ao longo do comprimento.**



a) **Dê um exemplo de como cobrir o telhado (quantas telhas de cada tipo) sem que sobrem ou faltem telhas.**

b) **Com quantas combinações de telhas é possível cobrir o telhado (sem sobrar nem faltar telhas)?**

c) **Para fixar as telhas são usadas ripas de madeira, ao longo da largura do telhado, da seguinte forma: 5 ripas para cada telha T_1, 3 ripas para cada telha T_2 e 2 ripas para cada telha T_3. Qual combinação de telhas deve ser usada para que seja gasto a menor quantidade possível de metros de ripas para fixar o mesmo telhado? Sabe-se que uma ripa pode suportar mais de uma telha, e que o espaçamento entre as ripas deve ser pelo menos 15cm. Quantos metros de ripas são necessários neste caso?**

Solução:
Como Todas as telhas têm $1m$ de largura e como há a sobreposição de $10cm$ serão necessárias 11 telhas em cada fileira ao longo da largura (podemos considerar 1 telha de $1m = 100cm$ e mais 10 telhas de $90cm$ - devido à sobreposição - totalizando uma largura de $100cm + 10 \times 90cm = 1000cm = 10m$) Para o comprimento consideramos a primeira telha como sendo a maior e as seguintes do mesmo comprimento ou menor, diminuídas de $10cm$ cada.

a) Assim, um exemplo possível, ao longo do comprimento será:

2 telhas de $1m = 100cm \to 100cm + 90cm$ restando $110cm$ para serem cobertos. Ora, $110cm$ não é múltiplo de $50cm$ (correspondente a uma telha T_2, de $60cm$, menos $10cm$) nem é múltiplo de $30cm$ (correspondente a uma telha T_3, de $40cm$, menos $10cm$). Portanto, para cobrir os $110cm$ faltantes podemos ter: $50cm + 60cm = 50cm + 2 \times 30cm$, ou seja, 1 telha T_2 2 telhas T_3

Resposta:
Ao longo do comprimento, teríamos, $2T_1$,$1T_2$ e $2T_3$. No total seriam:

$2 \times 11 = 22$ telhas T_1, $1 \times 11 = 11$ telhas T_2 e $2 \times 11 = 22$ telhas T_3, para cobrir o telhado.

b) Além da possibilidade em (a), temos para o comprimento:

b_1) $1T_1 \to 100cm$ (restam $200cm$)

$4T_2 \to 4 \times 50 = 200cm$

b_2) $1T_1 \to 100cm$ (restam $200cm$)

$1T_2 \to 50cm$ (restam $150cm$)

$5T_3 \to 5 \times 30 = 150cm$

b_3) $1T_2 \to 60cm$ (restam $240cm$)

$3T_2 \to 3 \times 50cm$ (restam $90cm$)

$3T_3 \to 3 \times 30 = 90cm$

b_4) $1T_2 \to 60cm$ (restam $240cm$)

$8T_3 \to 8 \times 30cm = 240cm$

Não é possível cobrir o telhado só com telhas T_3.

Resposta:
No total, são 5 combinações de telhas, a menos de ordem em que são usadas ao longo do comprimento.

b_1) Nos dá: 11 telhas T_1 mais 44 telhas T_2.

b_2) Nos dá: 11 telhas T_1, mais 11 telhas T_2 mais 55 telhas T_3.

b_3) Nos dá: 44 telhas T_2 mais 33 telhas T_3.

b_4) Nos dá: 11 telhas T_2 mais 88 telhas T_3.

c) Temos que analisar as 5 combinações encontradas nos itens (a) e (b). Para saber a quantidade mínima de metros de ripas, basta analisar cada combinção de telhas ao longo do comprimento, considerando os tipos de cada telha a serem usadas. Para a primeira telha consideramos o número dado, segundo o tipo, de ripas que é necessário, e para as seguintes consideramos o número dado menos 1 (já que uma ripa pode suportar mais de uma telha). Isso pode ser feito independentemente da ordem das telhas.

Resposta:

a) $2T_1 + 1T_2 + 2T_3 \to 5$ ripas $+4$ ripas $+2$ ripas $+2 \times 1$ ripas$= 13$ ripas. (1ªT_1, 2ªT_1, uma T_2, $2{\times}T_3$)

b_1) $1T_1 + 4T_2 \to 5$ ripas $+4 \times 2$ ripas $= 13$ ripas.

b_2) $1T_1 + 1T_2 + 5T_3 \to 5$ ripas $+2$ ripas $+5 \times 1$ ripas $= 12$ ripas.

b_3) $1T_2 + 3T_2 + 3T_3 \to 3$ ripas $+3 \times 2$ ripas $+3 \times 1$ ripas $= 12$ ripas.

b_4) $1T_2 + 8T_3 \to 3$ ripas $+8 \times 1$ ripas $= 11$ ripas.

Portanto a combinação (b_4) dá o número mínimo de ripas, e serão $11 \times 11 = 121$ metros de ripas.